2. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 30. Oktober 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):

(a) Das Zählmaß $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ ist definiert durch $\nu(N) := |N|$. Finden Sie im Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ eine fallende Folge $(A_i)_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $\nu(\bigcap_i A_i) \neq \lim_i \nu(A_i)$.

(b) Zeigen Sie, dass auf $\mathcal{F}^1$, dem Ring der 1-dimensionalen Figuren, genau ein Inhalt μ existiert mit $\mu\Big([a,b)\Big) = 1$, falls $a < 0 \leq b$ und $\mu\Big([a,b)\Big) = 0$ sonst, für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Ist μ ein Prämaß?

2. Aufgabe (4 Punkte):

Seien $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{O} := \{O \subset \Omega \,|O \text{ offen}\}$ und $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O})$ die Borel-σ-Algebra von $[0,1]$. Sei weiter A_5 die Menge aller Zahlen in $[0,1]$ deren Dezimaldarstellung unendlich viele Fünfen enthält. Beweisen Sie, dass $A_5 \in \mathcal{B}$ gilt.

3. Aufgabe (4 Punkte):

Seien $\Omega := [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $\mathcal{F}_1 := \{A \subset \Omega \mid \exists\, a,b \in \Omega : A \in \{[a,b] \cap \Omega, [a,b) \cap \Omega, (a,b] \cap \Omega, (a,b) \cap \Omega\}\}$ und $\mathcal{F}_2 := \{A \subset \Omega \mid \exists\, n \geq 0, A_i \in \mathcal{F}_1, A_i \cap A_j = \emptyset\ (0 \leq i \neq j \leq n) : A = \bigcup_{i=1}^n A_i\}$. Definiere $P : \mathcal{F}_2 \to [0,\infty]$ durch $P(A) := \sum_{i=0}^n (b_i - a_i)$, wobei $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ und b_i, a_i die Endpunkte von $A_i \in \mathcal{F}_1$ $(0 \leq i \leq n)$ sind. (Ist P wohldefiniert?)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_2$ eine Algebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass P additiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass P nicht σ-additiv ist.

4. Aufgabe (4 Punkte):

Sei μ ein endlicher Inhalt auf einer Algebra $\mathcal{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ für alle $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$.

(a) Zeigen Sie direkt, dass μ σ-additiv ist.

(b) Wieso widerspricht dies nicht der Konstruktion in Aufgabe 3?