# 12. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 29. Januar 2009

**1. Aufgabe (4 Punkte):**
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen mit zugehöriger Parameterfolge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Geben Sie eine Bedingung an die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die äquivalent zur stochastischen Konvergenz der $X_n$ gegen Null ist.

(b) Geben Sie eine Bedingung an die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die äquivalent zur fast sicheren Konvergenz der $X_n$ gegen Null ist.

**2. Aufgabe (4 Punkte):**

(a) Geben Sie ein Beispiel für unkorrelierte aber nicht unabhängige Zufallsvariablen.

(b) Geben Sie ein Beispiel für paarweise unabhängige aber nicht unabhängige Zufallsvariablen.

**3. Aufgabe (4 Punkte):**

(a) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Ereignisse mit $P(A_n) < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $P(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = 1$. Zeigen Sie $P(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k\geq n} A_n) = 1$.

(b) Geben Sie eine Folge unabhängiger Ereignisse an, so dass $P(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = 1$, aber $P(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k\geq n} A_n) \neq 1$ gelten.

**4. Aufgabe (4 Punkte):**
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ und $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Beweisen Sie, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ fast sicher gegen $\mu$ konvergiert.

*Hinweis:* Benutzen Sie die Tschebyschev-Ungleichung für vierte Momente, und zeigen Sie schnelle stochastische Konvergenz

.