

11. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 22. Januar 2009

1. Aufgabe (4 Punkte):

- (a) Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maß-Raum und f_n ($n \in \mathbb{N}$) und f Wahrscheinlichkeitsdichten bezüglich μ . Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere μ -fast sicher gegen f . Zeigen Sie, dass dann $\int_{\Omega} |f_n - f| d\mu$ gegen Null konvergiert.
- (b) Seien X_n ($n \in \mathbb{N}$) und X Zufallsgrößen auf einem abzählbaren Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Zeigen Sie, dass aus der stochastischen Konvergenz von X_n gegen X die P -fast sichere Konvergenz von X_n gegen X folgt.

2. Aufgabe (4 Punkte):

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass

$$d(X, Y) := \inf\{\epsilon > 0 : P(|X - Y| > \epsilon) < \epsilon\}$$

eine Pseudometrik auf dem Raum der Zufallsvariablen definiert. Beweisen Sie zudem, dass Konvergenz bezüglich dieser Pseudometrik äquivalent zur stochastischen Konvergenz ist. (Eine Pseudometrik erfüllt alle Axiome einer Metrik bis auf die Definitheit, d.h. es gilt nur $X = Y \Rightarrow d(X, Y) = 0$.)

3. Aufgabe (4 Punkte):

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien X_n ($n \in \mathbb{N}$) und X reellwertige Zufallsvariablen. Zudem sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie, dass aus der stochastischen Konvergenz von X_n gegen X die stochastische Konvergenz von $\phi \circ X_n$ gegen $\phi \circ X$ folgt. Gilt diese Aussage auch noch, wenn ϕ nur als messbar vorausgesetzt wird?

4. Aufgabe (4 Punkte):

Seien X_n, Y_n ($n \in \mathbb{N}$) und X, Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) für die $X_n \rightarrow X$ und $Y_n \rightarrow Y$ jeweils in Verteilung gelten. Konvergiert dann die Folge $(X_n + Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen $X + Y$?