Eichelsbacher/Döbler

10. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 15. Januar 2009

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R}^+)$. Zeigen Sie, dass

$$G_f := \{(\omega, x) | \omega \in \Omega, 0 \leq x \leq f(\omega)\}$$

in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ liegt und dass $\int_\Omega f(\omega) d\mu = (\mu \otimes \lambda)(G_f)$ gilt. Hier bezeichnet $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$

2. Aufgabe (4 Punkte):
(a) Sei $\varphi : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie

$$\int_a^b \int_a^x \varphi(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \int_y^b \varphi(x, y)\, dx\, dy\ .$$

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie

$$\int_a^b f(x) \Big(\int_a^x f(y)\, dy \Big)\, dx = \frac{1}{2} \Big(\int_a^b f(x)\, dx \Big)^2\ .$$

3. Aufgabe (4 Punkte):
(a) Sei $a > 0$. Bestimmen Sie das n-dimensionale Volumen der Menge

$$\{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \mid\ 0 \leq x_i\, ,\ \sum_{i=1}^n x_i \leq a \,\}\ .$$

(b) Ist $(x, y) \mapsto e^{-xy}$ λ^2-integrierbar über $\mathbb{R}_+^2$? Berechnen Sie $\int_{[0,1]^2} e^{-xy}\, d\lambda^2$.

Hinweis: Sie müssen keinen geschlossenen Ausdruck finden!

4. Aufgabe (4 Punkte):
(a) Sei $r > 0$ und C eine reelle, symmetrische, positiv-definite $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie

$$\lambda^n \Big(\langle x, Cx \rangle < r^2 \Big) = \frac{r^n \omega_n}{\sqrt{\det C}}\ .$$

Hierbei bezeichnet ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

(b) Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, C\, x \rangle}\, d\lambda^n(x) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det C}}\ .$$

Frohe Weihnachten und alles Gute für 2009.