

1. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 23. Oktober 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):

Für $\Omega \neq \emptyset$ und $A, B \subset \Omega$ heißt $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ symmetrische Differenz von A und B .

(a) Beweisen Sie für $A, B, C \subset \Omega$ die Gleichungen

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \quad \text{und} \quad (A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C) .$$

(b) Zeigen Sie, dass ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ genau dann ein Ring in Ω ist, wenn $(\mathcal{R}, +, \cdot) := (\mathcal{R}, \Delta, \cap)$ ein Ring im algebraischen Sinn ist.

2. Aufgabe (4 Punkte):

(a) Ist \mathcal{A}_j für jedes $j \in J \neq \emptyset$ eine σ -Algebra in Ω , so ist $\bigcap_j \mathcal{A}_j$ eine σ -Algebra.

(b) Für $M \subset \Omega \neq \emptyset$ ist $\mathcal{A}_M := \{X \subset \Omega \mid M \subset X \text{ oder } M \subset X^c\}$ eine σ -Algebra.

(c) Beschreiben Sie $\sigma(\mathcal{E})$ für $\mathcal{E} = \left\{ \{g\} \mid g \in \mathbb{N} \text{ gerade} \right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3. Aufgabe (4 Punkte):

Für jedes System \mathcal{C} von Teilmengen einer Menge Ω existiert ein kleinster Ring $\varrho(\mathcal{C})$ in Ω , welcher \mathcal{C} enthält. Er heißt der von \mathcal{C} erzeugte Ring.

(a) Beweisen Sie die Existenz von $\varrho(\mathcal{C})$.

(b) Bestimmen Sie $\varrho(\mathcal{C})$ und $\sigma(\mathcal{C})$ für den Fall, dass \mathcal{C} aus zwei beliebigen Teilmengen A und B von Ω besteht. Wann gilt $\varrho(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ in diesem Spezialfall, wann für beliebiges \mathcal{C} ?

4. Aufgabe (4 Punkte):

Sei Ω eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass jedes Maß μ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ diskret ist, d.h. es existiert eine Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, so dass $\mu(A) = \sum_{\omega \in A} \varphi(\omega)$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt.