

Präsenzaufgaben zur Vorlesung Stochastische Modelle Blatt 9

Aufgabe 1. Man fertige in Partner- oder Gruppenarbeit eine Beweisskizze des Satzes von Donsker, entweder in Form einer schriftlichen Argumentationskette oder einer graphischen Skizze, an. Dabei soll die genaue Struktur des Beweises deutlich werden und begründet werden, wie die Aussage aus mehreren Einzelaussagen (z.B. Sätzen aus der Vorlesung) gefolgert wird. Diese Einzelaussagen müssen nicht gesondert bewiesen werden.

Aufgabe 2. Man überlege sich in Stillarbeit eine durchaus schwierige Verständnisaufgabe zu einem Themenkomplex aus der Vorlesung. Diese kann in Form einer Frage, aber gerne auch als These formuliert werden, wie zum Beispiel:
Nimm Stellung zu folgender Aussage: „*Der zentrale Grenzwertsatz ist nur eine Folgerung aus dem Satz von Donsker!*“

Aufgabe 3. Man bearbeite soweit wie möglich den folgenden Fragenkatalog. Den Rest kann man gerne für die nächste Übung vorbereiten, wo dieser besprochen wird.

- 1) Welche intuitive Idee steckt hinter dem Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit und bedingter Erwartungswerte?
- 2) Inwiefern verläuft die Konstruktion bedingter Wahrscheinlichkeiten und bedingter Erwartungen konträr zur Konstruktion von Maß und Integral in W-Theorie I?
- 3) Kennst du eine geometrische Interpretation bedingter Erwartungen? Auf welchen Fakten beruht die Konstruktion bedingter Erwartungen mittels dieser Anschauung?
- 4) Nimm Stellung zu folgender Aussage: *Bedingte Erwartungen sind nichts anderes als Erwartungswerte bezüglich zufälliger Maße!*
- 5) Kennst du Ungleichungen aus W-Theorie I, für die es auch bedingte Varianten gibt? Welche Beweise verlaufen analog zum unbedingten Fall und bei welchen muss man den Beweis ändern? Gibt es bei letzteren evtl. einen Trick, auf den Fall gewöhnlicher Erwartungswerte zu reduzieren?
- 6) Unter welchen dir bekannten Transformationen gehen Martingale wieder in Martingale über? Welche davon wurde zum Beweis der Doobschen Überquerungsungleichung genutzt?
- 7) Was besagen das Optional Sampling Theorem bzw. seine Folgerungen? Gib auch eine Interpretation des Resultats in einer typischen Spielsituation an! Unter welchen Voraussetzungen folgt daraus, dass man in einem fairen Spiel keinen Gewinn machen kann?
- 8) Gibt es ein faires Spiel sowie eine zugehörige Spielstrategie mit der man mit Sicherheit Gewinn macht? Falls ja, wieso widerspricht dieses Beispiel nicht den Aussagen der Optional Sampling Sätze?
- 9) Was ist an \mathcal{L}^2 -Martingalen schöner als an \mathcal{L}^1 -Martingalen?
- 10) Nimm differenziert Stellung zu folgender Aussage: *Jedes Martingal ist von der Form $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{A}_n)$ für ein $Y \in L^1(P)$ und eine Filtration $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$!*
- 11) In welcher Hinsicht ist die Theorie der Rückwärtsmartingale „glatter“ als die Martingaltheorie? Worin ist dies deiner Meinung nach hauptsächlich begründet?

- 12) Welche alternativen Beweise für das starke Gesetz der großen Zahlen hast du dieses Semester kennengelernt?
- 13) Nimm Stellung zu folgender Aussage: *Sind P und Q Produktmaße, deren Faktoren jeweils äquivalent sind, so gilt dasselbe für P und Q !*
- 14) Welche Beziehung besteht zwischen stationären Prozessen und maßerhaltenden Transformationen?
- 15) Welches wichtige Resultat aus W-Theorie I verallgemeinert der Birkhoffsche Ergodensatz? Kannst du es daraus ableiten?
- 16) Durch welche dir bekannten Konzepte wurden Summen unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariablen in diesem Semester verallgemeinert? Begründe deine Antwort im Einzelnen!
- 17) Erkläre, inwiefern der Begriff *fast sicher im Sinne der Zufallsgraphen* von dem in der Stochastik üblichen Begriff *fast sicher* abweicht! Ist letzterer im $\mathcal{G}(n, p)$ -Modell überhaupt formulierbar?
- 18) Welche Grundidee steckt hinter der sogenannten *probabilistischen Methode*? Welches Resultat hat Erdős 1959 damit gezeigt und wieso ist die Aussage ein wenig überraschend?
- 19) Was ist eine Schwellenfunktion? Für welche Grapheneigenschaft haben Erdős und Renyi die Schwellenfunktion ausgerechnet? Welche Voraussetzungen sind an dieses Resultat geknüpft und wie sieht die Schwellenfunktion konkret aus?
- 20) Welches physikalische Phänomen wird durch Perkolationstheorie modelliert? Beschreibe anschaulich das Modell, welches in der Vorlesung dafür gewählt wurde! Für welche Objekte und Größen interessiert man sich in diesem Zusammenhang und welche Resultate dazu kennst du?
- 21) Für die Beweise welcher Resultate wurden in dieser Vorlesung charakteristische Funktionen verwendet? Welcher Satz über charakteristische Funktionen spielte dabei deiner Meinung nach die Hauptrolle und wieso?
- 22) Was ist schwache Konvergenz von W-Maßen auf einem metrischen Raum (S, d) ? Wieso lautet die Definition nicht einfach $\mu_n \xrightarrow{w} \mu : \Leftrightarrow \mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}_S$? Gibt es dennoch Charakterisierungen von schwacher Konvergenz durch die Maße einzelner Mengen?
- 23) Welches Resultat ist deiner Meinung nach zentral für schwache Konvergenz? Begründe deine Antwort und erkläre die Begriffe, die in diesem Resultat eine

Rolle spielen! Skizziere, wie dieses Resultat ein allgemeines Prinzip zum Beweis von schwacher Konvergenz liefert!

- 24) Wodurch unterscheidet sich die Brownsche Bewegung von den bisher behandelten stochastischen Prozessen konzeptionell? Welche zusätzliche bei „solchen“ Prozessen wünschenswerte Eigenschaft hat sie? Welche weiteren Eigenschaften von ihr kennst du?
- 25) Prüfe, inwieweit beim Satz von Donsker die Voraussetzung, dass die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt ist, wirklich benötigt wurde!
- 26) Erkläre den Begriff *Invarianzprinzip* im Zusammenhang mit dem Satz von Donsker!