Präsenzaufgaben zur Vorlesung Stochastische Modelle
Blatt 8

Aufgabe 1. Sei S eine abzählbare Menge, ausgestattet mit der trivialen Metrik, das heißt $d(x, y) := 1 - \delta_{x,y}$. Man zeige, dass für W-Maße μ_n, μ $(n \in \mathbb{N})$ auf $(S, \mathcal{B}_S) = (S, \mathcal{P}(S))$ folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{x\}) = \mu(\{x\})$ für alle $x \in S$.

(iii) $d_{TV}(\mu_n, \mu) := \sup_{A \in \mathcal{B}_S} |\mu_n(A) - \mu(A)| \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2. Seien X, X_n, Y, Y_n $(n \in \mathbb{N})$ reellwertige Zufallsvariablen auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und sei $c \in \mathbb{R}$.

(a) Man zeige mit Hilfe des Portmanteau-Theorems, dass $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$ genau dann gilt, wenn $Y_n \xrightarrow{P} c$ gilt.

(b) Man zeige mit Hilfe von Lemma 6.25 die Lemmata von Slutsky:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \text{ und } Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c$$
$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \text{ und } Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c \Rightarrow Y_n X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$$

(c) Man überlege sich, dass die Aussage in (b) im Allgemeinen falsch wird, wenn c durch eine nicht-konstante Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ersetzt wird.