

Präsenzaufgaben zur Vorlesung Stochastische Modelle Blatt 7

Aufgabe 1.

- (a) Man überlege sich, für welche \mathbb{C} -Algebra von stetigen Funktionen auf $B_N := [-N, N]^n$ im Beweis von Satz 6.2 der Satz von Stone-Weierstrass angewandt wird und zeige, dass diese dessen Voraussetzungen erfüllt.
- (b) Man berechne die charakteristische Funktion von $\mu := N(0; 1)$. Dazu leite man die lineare Differentialgleichung $\hat{\mu}'(t) = -t\hat{\mu}(t)$ her und beachte, dass $\hat{\mu}(0) = 1$ gilt.
- (c) Man zeige mit Hilfe charakteristischer Funktionen: Zwei reellwertige Zufallsvariablen X und Y auf dem W-Raum (Ω, \mathcal{A}, P) sind genau dann unabhängig, wenn für alle stetigen, beschränkten Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Zufallsvariablen $f(X)$ und $g(Y)$ unkorreliert sind.
Hinweis: Man überlege sich zunächst, dass die Unkorreliertheit dann auch für \mathbb{C} -wertige stetige und beschränkte Funktionen gilt!

Aufgabe 2. Sei S eine abzählbare Menge, ausgestattet mit der trivialen Metrik, das heißt $d(x, y) := 1 - \delta_{x,y}$. Man zeige, dass für W-Maße μ_n, μ ($n \in \mathbb{N}$) auf $(S, \mathcal{B}_S) = (S, \mathcal{P}(S))$ folgende Bedingungen äquivalent sind:

- (i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\{x\}) = \mu(\{x\})$ für alle $x \in S$.
- (iii) $d_{TV}(\mu_n, \mu) := \sup_{A \in \mathcal{B}_S} |\mu_n(A) - \mu(A)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.