

Präsenzaufgaben zur Vorlesung Stochastische Modelle Blatt 6

Aufgabe 1. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *Baum*, falls er zusammenhängend ist und keine Kreise als Teilgraphen enthält. In dieser Aufgabe behandeln wir Eigenschaften von Bäumen, die für die Lösung von Aufgabe 1, Blatt 9 hilfreich sind.

- (a) Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit mindestens zwei Knoten. Dann gibt es ein $x^* \in V$, so dass x^* in genau einer Kante $e \in E$ enthalten ist. Solch ein x^* nennen wir ein *Blatt*.

Hinweis: Man betrachte einen Pfad P maximaler Länge in G .

- (b) Für einen nicht-leeren Graphen $G = (V, E)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (i) G ist ein Baum.
- (ii) Je zwei Knoten sind durch genau einen Pfad verbunden.
- (iii) G ist *minimal zusammenhängend*, das heißt G ist zusammenhängend und für jedes $e \in E$ ist $\tilde{G} := (V, \tilde{E})$ mit $\tilde{E} := E \setminus \{e\}$ unzusammenhängend.
- (iv) G ist *maximal azyklisch*, das heißt G enthält keinen Kreis und für alle $x, y \in V$ mit $x \neq y$ und $xy \notin E$ enthält der Graph $G' := (V, E')$ mit $E' := E \cup \{xy\}$ einen Kreis.

- (c) Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $U \subseteq V$, so sei $G[U] := (U, E_U)$ der Teilgraph von G mit $E_U := \{xy \in E : x, y \in U\}$. Man nennt $G[U]$ den von U *induzierten Teilgraphen* von G . Ein Teilgraph $G' = (V', U')$ von G heißt *Erzeuger* von G , falls $G[V'] = G$ gilt, also falls $V' = V$ ist.

Man folgere aus (b), dass jeder zusammenhängende Graph einen Erzeuger hat, der ein Baum ist.

- (d) Sei $G = (V, E)$ ein Baum und sei $x_0 \in V$ ein Knoten, welcher kein Blatt in G ist. Seien $m \geq 2$ und e_1, \dots, e_m die paarweise verschiedenen Kanten in E , welche x_0 enthalten. Sei weiter $G' := (V', E')$ der Teilgraph von G mit $V' := V \setminus \{x_0\}$ und $E' := E \setminus \{e_1, \dots, e_m\}$. Man begründe, dass G' ein Graph mit genau m nicht-leeren *Zusammenhangskomponenten* C_1, \dots, C_m ist, und dass jedes C_i wiederum ein Baum ist mit weniger Knoten als G .