

Präsenzaufgaben zur Vorlesung Stochastische Modelle Blatt 5

Aufgabe 1. Sei (Ω, \mathcal{A}) ein Messraum und seien μ, ν und ρ σ -endliche Maße auf \mathcal{A} . Man sagt, ν sei *absolutstetig bezüglich* μ , in Zeichen $\nu \ll \mu$, falls für alle $A \in \mathcal{A}$ aus $\mu(A) = 0$ auch $\nu(A) = 0$ folgt. Der Satz von Radon-Nikodym besagt, dass dies dazu äquivalent ist, dass eine nichtnegative, messbare Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ existiert mit $\nu = f\mu$, das heißt mit $\nu(A) = \int_A f d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dieses f ist gegebenenfalls bis auf eine μ -Nullmenge eindeutig bestimmt und wird als *Radon-Nikodym-Ableitung* von ν nach μ bezeichnet, in Zeichen $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Es heißen weiter die Maße μ und ν äquivalent, in Zeichen $\mu \sim \nu$, wenn $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll \nu$ gilt. Man zeige die folgenden Aussagen:

- (a) Gilt $\nu \ll \mu$ mit $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, so gilt $\mu \ll \nu$ genau dann, wenn $f > 0$ μ -fast überall gilt und dann ist $\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{1}{f} \cdot 1_{\{f>0\}}$.
- (b) Gilt $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll \rho$, so gilt auch $\nu \ll \rho$ mit

$$\frac{d\nu}{d\rho} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\rho}.$$

- (c) Es gibt stets ein σ -endliches Maß ρ mit $\mu \ll \rho$ und $\nu \ll \rho$.
- (d) Mit der Notation aus dem Beweis von Satz 2.2 zeige man, dass $\frac{dQ_n}{dP_n} = M_n$ gilt.

Aufgabe 2. Man beweise den Satz von Radon-Nikodym, wie in **Aufgabe 1** formuliert, für σ -endliche Maße mit Hilfe des Satzes 2.5 aus der Vorlesung. Dazu nehme man an, dass dieser auch für nicht-separable σ -Algebren gilt.

Hinweis: Man nehme zunächst μ als W-Maß und ν als σ -endlich an. Dann erinnere man sich an die folgende Übungsaufgabe aus W-Theorie I: Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist genau dann σ -endlich, wenn eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ existiert mit $\int_{\Omega} f d\mu = 1$.