Präsenzaufgaben zur Vorlesung Stochastische Modelle
Blatt 4

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

Aufgabe 1. Es sei $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration von $\mathcal{A}$ sowie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Submartingal mit Werten in einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend, so ist die Folge $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ wieder ein $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Submartingal.

(b) Die Folgen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Y_n := X_n^+$ für $n \in \mathbb{N}$, sowie $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Z_n := (X_n^+)^p$ $(p \geq 1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Submartingale. (Dabei muss man streng genommen die Definition von Submartingalen auf quasi-integrierbare Zufallsvariablen erweitern.)

(c) Man behandele mit Hilfe von (b) den Fall von Aufgabe 3, Blatt 4, in dem $K_n := \mathbb{E}\Big[\big(\max_{1\leq k\leq n} X_k^+\big)^p\Big] = \mathbb{E}\Big[\max_{1\leq k\leq n} \big(X_k^+\big)^p\Big] = +\infty$ gilt, so dass man im Folgenden $K_n < \infty$ annehmen kann.

Aufgabe 2. Sei $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration von $\mathcal{A}$ und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Martingal. Es gelte $X_0 = 0$ und es gebe ein $M \in (0, +\infty)$ mit $|X_{n+1} - X_n| \leq M$ für alle $n \geq 0$. Definiere die Ereignisse

$$\begin{aligned} C &:= \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existiert in } \mathbb{R}\} \quad \text{sowie} \\ D &:= \{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = +\infty \text{ und } \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = -\infty\}. \end{aligned}$$

Man zeige, dass dann $P(C \cup D) = 1$ gilt.

Hinweis: Man definiere zunächst für $K \in \mathbb{N}$ die Stoppzeit $\tau_K := \inf\{n \geq 0 : X_n \leq -K\}$, begründe, dass $(X_{n\wedge\tau_K})_{n\geq 0}$ wieder ein Martingal ist und zeige, dass dieses außerhalb einer P-Nullmenge N_K gegen eine integrierbare, reellwertige Zufallsvariable Y_K konvergiert. Man folgere, dass für $\omega \in \{\tau_K = +\infty\} \cap N_K^c$ die Folge $(X_n(\omega))_{n\geq 0}$ gegen einen reellen Grenzwert konvergiert. Man zeige nun die Gleichheit
$\bigcup_{K\in\mathbb{N}}\{\tau_K = +\infty\} = \{\liminf_{n\to\infty} X_n > -\infty\}$ und folgere, dass $(X_n(\omega))_{n\geq 0}$ für alle $\omega \in \{\liminf_{n\to\infty} X_n > -\infty\} \cap \bigcap_{K\in\mathbb{N}} N_K^c$ gegen einen reellen Limes konvergiert. Wieso folgt jetzt schon die Behauptung?