

Präsenzaufgaben zur Vorlesung Stochastische Modelle Blatt 3

Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein W-Raum.

Aufgabe 1. Für Zufallsvektoren $Y = (Y_1, \dots, Y_k)^T$ und $W = (W_1, \dots, W_m)^T$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) definieren wir die *Kovarianz* durch $\text{Cov}(Y, W) := \mathbb{E}(YW^T) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(W)^T \in \mathbb{R}^{k \times m}$ und nennen Y und W *unkorreliert*, falls $\text{Cov}(Y, W) = 0$ gilt. Dabei sei für eine zufällige Matrix A mit Einträgen A_{ij} der Erwartungswert $\mathbb{E}(A)$ definiert als die Matrix mit den Einträgen $\mathbb{E}(A_{ij})$ an den entsprechenden Stellen.

- (a) Y und W sind genau dann unkorreliert, wenn für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und alle $j \in \{1, \dots, m\}$ die Zufallsvariablen Y_i und W_j unkorreliert sind.
- (b) Sei jetzt $X = (X_1, \dots, X_d)^T \sim N_d(\mu, \Sigma)$ d -dimensional normalverteilt. Seien $d_1, \dots, d_r \in \{1, \dots, d\}$ mit $\sum_{i=1}^r d_i = d$ und seien $Y_1 := (X_1, \dots, X_{d_1})^T$, $Y_2 := (X_{d_1+1}, \dots, X_{d_1+d_2})^T, \dots, Y_r := (X_{d_1+\dots+d_{r-1}+1}, \dots, X_d)^T$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
- (i) Y_1, \dots, Y_r sind stochastisch unabhängig.
 - (ii) Y_1, \dots, Y_r sind paarweise unkorreliert.
 - (iii) Es gibt positiv definite Matrizen $\Sigma_i \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}$, $i = 1, \dots, r$, mit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \Sigma_r \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man verwende (für $(iii) \Rightarrow (i)$) die (bekannte) Tatsache, dass Y_1, \dots, Y_r (genau dann) unabhängig sind, wenn ihre gemeinsame Verteilung eine Dichte der Gestalt $(y_1, \dots, y_r) \mapsto \prod_{i=1}^r g_i(y_i)$ besitzt. Ferner benutze man (für $(ii) \Rightarrow (iii)$), dass für den Eintrag s_{ij} von Σ an der Stelle (i, j) gilt: $s_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$.

Aufgabe 2.

- (a) Man begründe, dass durch $F : [0; \pi) \times [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(\psi, \phi) := (\cos \psi, -\sin \phi \sin \psi, \cos \phi \sin \psi)$ die Sphäre S^2 parametrisiert wird.
- (b) Man zeige, dass die Gramsche Determinante von F gegeben ist durch $g_F(\psi, \phi) = (\sin \psi)^2$ für alle $(\psi, \phi) \in [0; \pi) \times [0; 2\pi)$.

- (c) Man berechne $\text{vol}_2(S^2)$ und mit den Bezeichnungen von Aufgabe 2 auf Blatt 2 auch die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{(Y,Z)}(\alpha, \beta) = P(Y \leq \alpha, Z \leq \beta)$ von Y und Z .