# Präsenzaufgaben zur Vorlesung Stochastische Modelle
## Blatt 2

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

**Aufgabe 1.** Es sei $(\mathcal{Y}, \mathcal{A}_\mathcal{Y})$ ein Messraum und $Y : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{A}_\mathcal{Y})$ eine Zufallsvariable. Weiter sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter-$\sigma$-Algebra. Es existiere eine *reguläre Version der bedingten Verteilung von $Y$ gegeben $\mathcal{F}$*, d.h. ein Markov-Kern $K : \Omega \times \mathcal{A}_\mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(\mathcal{Y}, \mathcal{A}_\mathcal{Y})$, so dass für jedes $B \in \mathcal{A}_\mathcal{Y}$ die Abbildung $\Omega \ni \omega \mapsto K(\omega, B) \in \mathbb{R}$ eine Version von $P(Y \in B|\mathcal{F})$ ist. Dann gilt:

(a) Ist $f : (\mathcal{Y}, \mathcal{A}_\mathcal{Y}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar und nicht-negativ, so ist die Abbildung $Z_f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $Z_f(\omega) := \int_\mathcal{Y} f(y) K(\omega, dy)$ messbar bezüglich $\mathcal{F}$ und eine Version von $\mathbb{E}(f(Y)|\mathcal{F})$.

(b) Ist $f : (\mathcal{Y}, \mathcal{A}_\mathcal{Y}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar und ist $f(Y)$ $P$-integrierbar, aber $f$ nicht notwendig nicht-negativ, so ist $G := \{\omega \in \Omega : f \text{ ist } K(\omega, \cdot) \text{ -integrierbar } \} \in \mathcal{F}$ und es gilt $P(G) = 1$. Weiter ist die Abbildung $W_f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$W_f(\omega) := \begin{cases} \int_\mathcal{Y} f(y) K(\omega, dy) & \text{, falls } \omega \in G \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$-messbar und eine Version von $\mathbb{E}(f(Y)|\mathcal{F})$.

**Hinweis:** Man zeige (i) durch *algebraische Induktion* über $f$, das heißt zunächst für nicht-negative, reellwertige einfache Funktionen (Treppenfunktionen) und dann für nicht-negative messbare Funktionen. Dabei verwende man den Satz von der monotonen Konvergenz (vgl. auch etwa den Beweis des Satzes von Fubini). Man kann zeigen, dass eine reguläre Version der bedingten Verteilung von $Y$ gegeben $\mathcal{F}$ stets existiert, falls $\mathcal{Y}$ ein polnischer Raum und $\mathcal{A}_\mathcal{Y}$ die Borelsche $\sigma$-Algebra auf $\mathcal{Y}$ ist.

**Aufgabe 2.** Man gebe einen alternativen Beweis der bedingten Version der Jensenschen Ungleichung (Satz 13.7), indem man die Aussage von Aufgabe 1 sowie die Jensensche Ungleichung für „normale“ Erwartungswerte (Satz 7.17 (c)) verwendet.