Präsenzaufgaben zur Vorlesung Stochastische Modelle
Blatt 1

Es sei stets $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

Aufgabe 1. Sei I eine höchstens abzählbare Menge und sei $\mathcal{P} = \{B_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{A}$ eine *messbare Partition* von Ω, das heißt es gilt $B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ und $\Omega = \bigcup_{i \in I} B_i$. Sei weiter $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P})$.

(a) Man zeige, dass $\mathcal{F} = \{\bigcup_{i \in J} B_i \mid J \subset I\}$ das System aller Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{P}$ ist.

(b) Für $A \in \mathcal{A}$ definieren wir die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben $\mathcal{F}$* durch
$$P(A|\mathcal{F}) := \sum_{i \in I} P(A|B_i) 1_{B_i}\,,$$
wobei wir $P(A|B_i) := 0$ setzen, falls $P(B_i) = 0$ gilt. Ist weiter $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar und quasi-integrierbar bezüglich P, so definieren wir die *bedingte Erwartung von X gegeben $\mathcal{F}$* durch
$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) := \sum_{i \in I} \mathbb{E}(X|B_i) 1_{B_i}\,.$$
Dabei sei auch $\mathbb{E}(X|B_i) := 0$, falls $P(B_i) = 0$ gilt. Man zeige, dass $P(A|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(1_A|\mathcal{F})$ gilt, dass $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-messbar ist und für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt
$$\int_F \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) dP = \int_F X dP\,,$$
so dass diese Definition mit derjenigen aus der Vorlesung übereinstimmt für den Spezialfall einer durch eine abzählbare Partition von Ω erzeugten σ-Algebra $\mathcal{F}$.

Aufgabe 2. Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der P-f.s. Eindeutigkeit der bedingten Erwartung für quasi-integrierbares $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$.
Seien $Y, Z : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ zwei $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariablen. Für jedes $F \in \mathcal{F}$ gelte $\int_F Y dP = \int_F Z dP$. Man zeige, dass dann $P(Y = Z) = 1$ gilt.
Hinweis: Man gehe wiefolgt schrittweise vor:

(1) Man begründe, dass es reicht zu zeigen, dass $P(Z < Y) = 0$ ist.

(2) Man betrachte die Mengen $F_n := \{-n \leq Z < Y \leq n\}$ ($n \in \mathbb{N}$), zeige, dass diese in $\mathcal{F}$ liegen und, dass sowohl Y als auch Z über F_n integrierbar sind. Man folgere daraus, dass $P(F_n) = 0$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(3) Man zeige, dass $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$ liegt mit $P(F) = 0$ und, dass $F = \{-\infty < Z < Y < \infty\}$ gilt.

(4) Sei $G := \{Z < Y = +\infty\}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $G_n := \{Z \leq n < Y = +\infty\}$. Man zeige, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = G$ gilt und, dass $P(G_n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und daher auch $P(G) = 0$ gilt.

(5) Die Menge $\{-\infty = Z < Y\}$ behandele man analog.