

9. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 2. Juli 2009

1. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph der Ordnung $k \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie, dass G ein Baum ist, genau dann wenn G zusammenhängend ist und $|E| = k - 1$ gilt.
- (b) Zeigen sie, dass ein Baum balanciert ist.

2. Aufgabe (4 Punkte):

Hat die Eigenschaft, einen zum d -dimensionalen Würfel isomorphen Teilgraphen zu enthalten, eine Schwellenfunktion? Wenn ja, welche; wenn nein, warum nicht?

3. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ und \mathcal{A} die von den endlich-dimensionalen Projektionen erzeugte σ -Algebra. Zudem sei $P_p := \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e$ mit $\mu_e(\omega(e) = 1) = p$ und $\mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p$. Sei $K(\omega) = \{e \in \mathbb{E}^d; \omega(e) = 1\}$. Eine Zufallsvariable X auf (Ω, \mathcal{A}, P) heißt monoton wachsend, wenn aus $K(\omega_1) \subset K(\omega_2)$ auch $X(\omega_1) \leq X(\omega_2)$ folgt. Beweisen Sie, dass für zwei quadrat-integrierbare, monotone wachsende Zufallsvariablen X und Y die folgende Ungleichung gilt:

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y).$$

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage induktiv für Zufallsvariablen, die nur von Zuständen endlich vieler Kanten abhängen und benutzen Sie Aufgabe 4 von Blatt 4, um die Ungleichung im allgemeinen Fall zu zeigen.

4. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei $p_c(d)$ die kritische Wahrscheinlichkeit im d -dimensionalen Perkolationsmodell (siehe S.63 im Skript). Beweisen Sie, dass

$$p_c(2) \leq 1 - \lambda(2)^{-1}$$

gilt, wobei $\lambda(d) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n)^{1/n}$ und $\sigma(n)$ die Anzahl der selbst-meidenden Pfade von der Länge n bezeichnet (siehe Skript Seite 64/65).