Eichelsbacher/Döbler
Sommersemester 2009

8. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 25. Juni 2009

1. Aufgabe (4 Punkte):
Zeigen Sie mithilfe der Transformation $T : [0,1) \to [0,1)$, $T(x) := 2x \bmod 1$, dass fast alle Zahlen in $[0,1)$ *2-normal* sind, d.h. $\lambda(\{x \in [0,1) :$ die Häufigkeit der 1 in der binären Entwicklung von x ist $\frac{1}{2}\}) = 1$.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, für die $T : \Omega \to \Omega$ maßerhaltend ist.

(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{M}$ konvex ist, d.h. für $P, Q \in \mathcal{M}$ und $\alpha \in [0,1]$ gilt $\alpha P + (1-\alpha)Q \in \mathcal{M}$.

(b) Seien $P, Q \in \mathcal{M}$ und T ergodisch bzgl. P. Sei Q absolutstetig zu P, d.h. jede P-Nullmenge ist eine Q-Nullmenge. Beweisen Sie, dass dann $Q = P$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Radon-Nikodym.

3. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $0 < p < 1$. Beweisen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ für fast alle (im Sinne der Zufallsgraphen) Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$

$$\chi(G) > \frac{\log(1/(1-p))}{2+\epsilon} \frac{n}{\log n}$$

gilt. Dabei sei $\chi(G)$ die chromatische Zahl des Graphen G.

Hinweis: Benutzen Sie Proposition 4.18.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $i, j \in \mathbb{N}$, $n \geq i + j$ und $0 < p < 1$. Sei $B_{i,j}$ die Menge der Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$ mit der Eigenschaft, dass zu je zwei disjunkten Eckenmengen U und U' mit $|U| \leq i$ und $|U'| \leq j$ immer eine Ecke $v \notin U \cup U'$ existiert, die zu allen Ecken aus U benachbart ist, aber zu keiner Ecke aus U' benachbart ist. Beweisen Sie, dass im Sinne der Zufallsgraphen fast alle Graphen $G \in \mathcal{G}(p,n)$ die Eigenschaft $B_{i,j}$ haben.