

## 7. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 18. Juni 2009

### 1. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum und sei  $\mathcal{B}(X)$  die Borel- $\sigma$ -Algebra von  $X$ . Zudem sei  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(X, \mathcal{B}(X))$ , das jeder nicht-leeren offenen Menge in  $X$  positives Maß zuordnet. Weiterhin sei  $T : X \rightarrow X$  eine stetige, ergodische Transformation. Beweisen Sie, dass dann für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$  der Orbit  $\{T^n(x); n \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $X$  liegt.

### 2. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  eine maßerhaltende Transformation. Beweisen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

- (a)  $T$  ist ergodisch.
- (b)  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(T^{-k}A \cap B) \rightarrow P(A)P(B)$  für  $n \rightarrow \infty$  und alle  $A, B \in \mathcal{A}$ .
- (c)  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega} f \circ T^k \cdot g dP \rightarrow \int_{\Omega} f dP \int_{\Omega} g dP$  für  $n \rightarrow \infty$  und alle  $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

### 3. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  ergodisch,  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $S_n := n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} X_i$  mit  $X_i := X \circ T^i$ . Beweisen Sie für  $c > 0$  die folgende Maximal-Ungleichung:

$$P(\max_{1 \leq i \leq n} S_i > c) \leq \frac{1}{c} \mathbb{E}(|X|).$$

### 4. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein stationärer, ergodischer Prozess und  $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}; (x_0, x_1, \dots) \mapsto f(x_0, x_1, \dots)$  eine  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ -messbare Funktion. Beweisen Sie, dass dann auch  $(Y_n)_n$  mit

$$Y_n := f(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

ein stationärer, ergodischer Prozess ist. Hierbei heißt ein Prozess ergodisch, wenn die Abbildung  $T$  aus Bemerkung 3.7 ergodisch ist.