

## 6. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 10. Juni 2009

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein W-Raum.

### 1. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen und  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Abbildung. Die Größe

$$U_n := U_n(h) := \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(X_i, X_j)$$

heißt  $U$ -Statistik mit Kernfunktion  $h$ . Die Kernfunktion heißt degeneriert, wenn

$$\mathbb{E}(h(X_1, X_2)|X_1) = 0 \quad P - f.s.$$

- (a) Zeigen Sie, dass für ein degeneriertes  $h$  mit  $\mathbb{E}(h(X_1, X_2)) < \infty$  die Folge  $\left(\binom{n}{2} U_n\right)_n$  ein Martingal bezüglich der kanonischen Filtration ist.
- (b) Zeigen Sie, dass für ein degeneriertes  $h$  und unter der Bedingung  $\mathbb{E}(h(X_1, X_2)^2) < \infty$  gilt:

$$\mathbb{V}(U_n) = \frac{2}{n(n-1)} \mathbb{V}(h(X_1, X_2)).$$

### 2. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  und  $P = \otimes_{i \in \mathbb{N}} P_i$  und  $Q = \otimes_{i \in \mathbb{N}} Q_i$  zwei Produktmaße auf  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ . Es sei

$$p_i = P_i(\{1\}), \quad q_i = Q_i(\{1\}).$$

- (a) Finden Sie Bedingungen für die Folgen  $(p_i)_i$  und  $(q_i)_i$ , die es ermöglichen, bei Beobachtung einer 0-1-Sequenz zu unterscheiden, ob sie von  $P$  oder  $Q$  erzeugt wurde.
- (b) Für ein  $\delta > 0$  sei  $\delta \leq q_i, p_i \leq 1 - \delta$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $P$  und  $Q$  genau dann zueinander äquivalent sind, wenn

$$\sum_{i=1}^{\infty} (p_i - q_i)^2 < \infty.$$

### 3. Aufgabe (4 Punkte):

Angenommen  $P$  und  $Q$  sind zwei Wahrscheinlichkeitsmaße mit Dichten  $p$  und  $q$  bezüglich eines gemeinsamen  $\sigma$ -endlichen Bezugsmaßes  $\mu$ . Wir definieren

$$d_H(P, Q) := \left( \int (\sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)})^2 d\mu(x) \right)^{1/2}$$

Bitte wenden

und

$$a_H(P, Q) := \int \sqrt{p(x)q(x)} d\mu(x).$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Definitionen nicht von der Wahl des Maßes  $\mu$  abhängen.  
(b) Zeigen Sie die folgende Identität:

$$d_H^2(P, Q) = \int (p(x) + q(x) - 2\sqrt{p(x)q(x)}) d\mu(x) = 2(1 - a_H(P, Q)).$$

- (c) Berechnen Sie  $d_H$  einer  $N(0, \sigma^2)$  und einer  $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung.  
(d) Es sei  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger und normalverteilter Zufallsgrößen mit Erwartungswert Null und Varianz  $\mathbb{V}(X_i) = \sigma_i^2$  und sei  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$ . Zeigen Sie, dass  $X := (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  fast sicher in  $l_2$  liegt. Auf diese Weise definiert man eine Gauß-Verteilung im Hilbert-Raum  $l_2$ .

#### 4. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  eine maßerhaltende Transformation auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und sei  $E \in \mathcal{A}$ . Beweisen Sie, dass eine  $\mathcal{A}$ -messbare Menge  $F \subset E$  existiert mit  $P(E) = P(F)$ , die folgende Eigenschaft erfüllt: für alle  $\omega \in F$  gibt es eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $T^{n_i}(\omega) \in F$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

*Hinweis:* Man versuche es mit

$$F := E \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} T^{-n}(E).$$