Eichelsbacher/Döbler
Sommersemester 2009

5. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 28. Mai 2009

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette mit abzählbarem Zustandsraum S und Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$. Dies bedeutet

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1}, ..., X_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

für alle $i, j \in S$. Eine Funktion $\phi : S \to \mathbb{R}$ heißt superharmonisch, falls $\sum_{j\in S} p_{ij}\phi(j) \leq \phi(i)$ für alle $i \in S$ gilt. Beweisen Sie, dass $(\phi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ P-fast sicher gegen eine integrierbare Zufallsvariable konvergiert, falls ϕ beschränkt und superharmonisch ist.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(\mathcal{A}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ eine Familie aufsteigender σ-Algebren. Eine $\mathcal{A}_n$-adaptierte Folge von integrierbaren Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ heißt Rückwärts-Martingal, wenn für alle $n \leq -1$ und P-fast sicher

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{A}_n) = X_n$$

gilt. Beweisen Sie, dass $X_{-\infty} := \lim_{n\to-\infty} X_n$ P-fast sicher und in $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ existiert. Zeigen Sie, dass $X_{-\infty} = \mathbb{E}(X_1|\mathcal{A}_{-\infty})$ gilt, wobei $\mathcal{A}_{-\infty} := \bigcap_{n\in-\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.

3. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...$ unabhängig, identisch verteilt mit $\mathbb{E}(|\xi_1|) < \infty$. Zudem seien für $n \in \mathbb{N}$ $X_{-n} := n^{-1}S_n$, $\mathcal{A}_{-n} := \sigma(S_n, S_{n+1}, ...)$ mit $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$. Beweisen Sie mithilfe von Aufgabe 2, dass P-fast sicher X_n gegen $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{A}_{-\infty})$ konvergiert. Aus dem Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov folgt, dass $\mathcal{A}_{-\infty}$ nur aus Mengen mit P-Maß Eins oder Null besteht. Somit erhalten wir einen alternativen Beweis für das starke Gesetz der großen Zahlen.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal und $K > 0$, so dass $\mathbb{E}(X_n^2) < K < \infty$ für alle $n \geq 1$ gelte. Zudem gelte

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{k,l\in\mathbb{N}_0} |\mathbb{E}(X_n X_{n+k}) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+l})| = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} X_n =: X_\infty$ P-f.s. existiert und konstant ist.