4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 20. Mai 2009

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtrierung in $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $A_n \in \mathcal{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{A}_{n-1}) = \infty$$

P-fast sicher. Beweisen Sie, dass dann $P(\limsup A_n) = 1$ gilt.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $a, b \in \mathbb{N}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die symmetrische Irrfahrt auf den ganzen Zahlen mit $S_0 = 0$ und

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N}; S_n = a, \text{ oder } S_n = -b\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(\tau) < \infty$ ist.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von Martingal-Theorie, dass $P(S_\tau = a) = \frac{b}{a+b}$ gilt.

(c) Es sei nun $\tau' := \inf\{n \in \mathbb{N}; S_n = a\}$ mit $a \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{E}(\tau') = \infty$ gilt.

3. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal und $p > 1$. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left(\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k^+\right)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left(\left(X_n^+\right)^p\right)$$

gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die Aufgabe 4 von Blatt 3, die Hölder-Ungleichung und die folgende Gleichung für nicht-negative $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$\int_\Omega f^p \, dP = \int_0^\infty p\, \lambda^{p-1}\, P(f > \lambda)\, d\lambda.$$

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ und $p > 1$. Beweisen Sie, dass ein $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ existiert, so dass X_n in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und P-fast sicher gegen X konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.