3. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 14. Mai 2009

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

1. Aufgabe (4 Punkte): *Doob-Zerlegung*
Es seien $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine daran adaptierte Folge von reellwertigen Zufallsvariablen. Man zeige, dass es ein Martingal $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie eine vorhersehbare Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $Z_0 = 0$ und

(b) $X_n = Y_n + Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Man zeige weiter, dass diese Zerlegung P-fast sicher eindeutig ist, und dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann ein Submartingal ist, wenn die Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ P-fast sicher monoton wachsend ist.

2. Aufgabe (4 Punkte): *Optional Sampling Theorem*
Es seien $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man zeige die folgenden Aussagen:

(a) Ist τ eine beschränkte Stoppzeit, das heißt es gibt ein $T \in \mathbb{N}$ mit $\tau \leq T$, und ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar ein Martingal, so gilt $X_\tau = \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_\tau)$ P-fast sicher.

(b) Sind $\sigma \leq \tau \leq T \in \mathbb{N}$ beschränkte Stoppzeiten, so gilt P-fast sicher $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma$. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal, so gilt sogar die Gleichheit.

(c) Ist $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge beschränkter Stoppzeiten, so ist die Folge $(X_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal, so auch $(X_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Für (b) verwende man die Zerlegung aus Aufgabe 1 sowie Teil (a).

3. Aufgabe (4 Punkte):
Sei Y_0 gleichverteilt auf $(0,1]$. Für jedes $n \geq 1$ sei Y_n gleichverteilt auf dem zufälligen Intervall $(1 - Y_{n-1}, 1]$. Sei $X_0 := Y_0$ und für $n \geq 1$ sei $X_n := 2^n \prod_{k=1}^n \frac{1-Y_k}{Y_{k-1}}$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich der kanonischen Filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ ist.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein nicht-negatives Submartingal. Beweisen Sie, dass für jedes $c \geq 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$c\,P\left(\sup_{k\leq n} X_k \geq c\right) \leq \int_{\{\sup_{k\leq n} X_k \geq c\}} X_n\,dP \leq \mathbb{E}(X_n).$$