Eichelsbacher/Döbler
Sommersemester 2009

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 7. Mai 2009

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei X eine Zufallsvariable, die gleich verteilt Werte auf der Sphäre S^2 annimmt. Seien $(\psi, \phi) : S^2 \to [0, \pi[\times [0, 2\pi[$ die Polarkoordinaten und $Y := \psi(X)$, $Z := \phi(X)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}(Y|Z)$ und $\mathbb{E}(Z|Y)$.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Der zufällige Vektor $(Y_0, Y_1, ..., Y_n)$ habe eine Normal-Verteilung mit Kovarianz-Matrix Σ und Erwartungswert-Vektor μ. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen $c_0, ..., c_n$ gibt, so dass

$$\mathbb{E}(Y_0|Y_1, ..., Y_n) = c_0 + c_1 Y_1 + \cdots + c_n Y_n.$$

3. Aufgabe (4 Punkte):
Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der P-f.s. Eindeutigkeit der bedingten Erwartung für quasi-integrierbares $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$. Seien $Y, Z : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ zwei $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariablen. Für jedes $F \in \mathcal{F}$ gelte $\int_F Y dP = \int_F Z dP$. Man zeige, dass dann $P(Y = Z) = 1$ gilt.

Hinweis: Man gehe wie folgt schrittweise vor:

(a) Man begründe, dass es reicht zu zeigen, dass $P(Z < Y) = 0$ ist.

(b) Man betrachte die Mengen $F_n := \{-n \leq Z < Y \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, zeige, dass diese in $\mathcal{F}$ liegen und, dass sowohl Y als auch Z über F_n integrierbar sind. Man folgere daraus, dass $P(F_n) = 0$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(c) Man zeige, dass $F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$ liegt mit $P(F) = 0$ und, dass $F = \{-\infty < Z < Y < \infty\}$ gilt.

(d) Sei $G := \{Z < Y = +\infty\}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $G_n := \{Z \leq n < Y = +\infty\}$. Man zeige, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = G$ gilt und, dass $P(G_n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und daher auch $P(G) = 0$ gilt.

(e) Die Menge $\{-\infty = Z < Y\}$ behandele man analog.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$. Beweisen Sie, dass für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ aus $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ und $\mathbb{E}(|Y|^q) < \infty$

$$\mathbb{E}(|XY||\mathcal{F}) \leq (\mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{F}))^{1/p} \, (\mathbb{E}(|Y|^q|\mathcal{F}))^{1/q}$$

P-fast sicher folgt. Dabei sei $\frac{1}{\infty} = 0$ vereinbart.