

# 11. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 16. Juli 2009

## 1. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei  $(S, d)$  ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass  $S$  genau dann separabel ist, wenn eine abzählbare Menge  $\mathcal{B}$  von Kugel-Umgebungen in  $S$  existiert, so dass jede offene Menge  $U \subset S$  wie folgt dargestellt werden kann:

$$U = \bigcup_{A \in \mathcal{B}, A \subset U} A.$$

Erinnerung: Ein metrischer Raum  $(S, d)$  heißt separabel wenn er eine abzählbare und dichte Teilmenge enthält

## 2. Aufgabe (4 Punkte):

Beweisen Sie auf direktem Weg, ohne Anwendung des Satzes von Prohorov, dass in einem separablen und vollständigen metrischen Raum jedes Wahrscheinlichkeits-Maß straff ist.

## 3. Aufgabe (4 Punkte):

Eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zufallsvariablen heißt gleichgradig integrierbar, wenn

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\{|X_n| \geq \alpha\}} |X_n| dP = 0$$

gilt. Beweisen Sie, dass aus der gleichgradigen Integrierbarkeit von  $(|X_n|^\delta)_{n \in \mathbb{N}}$  für ein  $\delta > 0$  die Straffheit der Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt.

## 4. Aufgabe (4 Punkte):

Beweisen Sie, dass eine Familie von Wahrscheinlichkeits-Maßen  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathbb{R}^2$  genau dann straff ist, wenn die beiden Familien der Marginal-Verteilungen  $(\mu_n \circ \pi_1^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\mu_n \circ \pi_2^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  jeweils straff in  $\mathbb{R}$  sind. Hierbei bezeichnen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  die Projektionen auf die Faktoren von  $\mathbb{R}^2$ .