

10. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 9. Juli 2009

1. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei $K \in \mathbb{N}$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, dessen k -te Momente für $k \leq K$ existieren. Beweisen Sie, dass dann die charakteristische Funktion $\hat{\mu}$ von μ stetige Ableitungen bis zur Ordnung K hat. Bestimmen sie den Wert der k -ten Ableitung im Nullpunkt.

2. Aufgabe (4 Punkte):

Die Cauchy-Verteilung zum Parameter $\alpha > 0$ besitzt die folgende Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes auf \mathbb{R} :

$$f(x) := \frac{\alpha}{\pi}(\alpha^2 + x^2)^{-1}.$$

Berechnen Sie die charakteristische Funktion zu dieser Verteilung. Beweisen Sie, dass alle Momente der Cauchy-Verteilung nicht existieren, und bestimmen Sie die Verteilung von $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ für unabhängige, identisch Cauchy-verteilte Zufallsvariablen X_j ($1 \leq j \leq n$).

3. Aufgabe (4 Punkte):

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf \mathbb{R} heißt Gitter-Verteilung, wenn zwei reelle Zahlen a, b mit $a > 0$ und eine Familie $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n = 1$ existieren, so dass

$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n \delta_{an+b}$$

gilt, wobei δ_x das Dirac-Maß in $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Beweisen Sie die folgende Aussage: μ ist eine Gitter-Verteilung, genau dann wenn für seine charakteristische Funktion $\hat{\mu}$ ein $t \neq 0$ existiert, so dass $|\hat{\mu}(t)| = 1$ gilt.

4. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und μ gegeben durch $d\mu := f d\lambda$. Zeigen Sie:

- $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\Phi(t) := \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\lambda(x)$ ist stetig in $t = 0$.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mu}(t) = 0$.