Eichelsbacher/Döbler

1. Aufgabenblatt zur Vorlesung Stochastische Modelle

Abgabe bis 30. April 2009

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Das Maß Q habe eine Dichte $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bezüglich P. Es sei $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, Q)$. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}_P(X\, f|\mathcal{F}) = \mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F})\, \mathbb{E}_P(f|\mathcal{F}),$$

wobei $\mathbb{E}_P(X|\mathcal{F})$ die bedingte Erwartung bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P bezeichnet.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Zufallsvariablen, für die P-fast sicher $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ und $\mathbb{E}(Y|X) = X$ gelte. Beweisen Sie, dass daraus $X = Y$ P-fast sicher folgt.

3. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und seien $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ zwei Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$. Für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gelte

$$\int_{A_1 \cap A_2} X\, dP = \int_{A_1 \cap A_2} Y\, dP.$$

Zeigen Sie, dass dann für die von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{F}$

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$$

P-fast sicher gilt.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ und sei $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Beweisen Sie, dass P-fast sicher

$$\mathbb{E}(X_1|S_n, S_{n+1}, ...) = \frac{1}{n} S_n$$

gilt.