

## 9. Aufgabenblatt zur Statistik I

Abgabe bis 1. Juli 2008

### 1. Aufgabe (4 Punkte):

Konstruieren Sie einen zweiseitigen Binomialtest zum Niveau  $\alpha$ , d.h. einen Test im Binomialmodell für die Nullhypothese  $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$  gegen die Alternative  $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ , wobei  $0 < \vartheta_0 < 1$ . Leiten Sie mit Hilfe des Satzes von de Moivre und Laplace eine asymptotische Version des Tests her.

### 2. Aufgabe (4 Punkte):

Zeigen Sie direkt, ohne Benutzung von Satz 8.3, dass der einseitige  $t$ -Test im zweiparametrischen Gauß'schen Produktmodell unverfälscht ist. Benutzen Sie dazu den Satz von Gosset, Satz 7.10.

### 3. Aufgabe (4 Punkte):

Eine Firma liefert physikalische Widerstände und behauptet, deren Widerstände seien normalverteilt mit Mittelwert 50 und Standardabweichung 5, gemessen in Ohm. Geben Sie je einen Test für die beiden Testprobleme

$$H_0 : m \leq 50 \text{ gegen } H_1 : m > 50$$

und

$$H_0 : v \leq 25 \text{ gegen } H_1 : v > 25$$

zum Niveau  $\alpha$  an (bei Vorliegen von 10 Messungen unter Normalverteilungsannahme;  $m$  und  $v$  beide unbekannt). Wie lautet die Entscheidung bei folgenden Messergebnissen für 10 Widerstände:

$$45.9 \quad 68.5 \quad 56.8 \quad 60.0 \quad 57.7 \quad 63.0 \quad 48.2 \quad 59.6 \quad 55.7 \quad 50.1$$

### 4. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien  $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_l$  unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung  $\mathcal{N}_{m,v}$  bzw.  $\mathcal{N}_{m',v}$ ;  $m, m'$  und  $v$  seien unbekannt. Zeigen Sie: Jeder Likelihood-Quotienten-Test für das Testproblem  $H_0 : m \leq m'$  gegen  $H_1 : m > m'$  hat einen Ablehnungsbereich der Form  $\{T > c\}$  mit der Zweistichproben- $t$ -Statistik

$$T = \sqrt{\frac{kl}{k+l}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{V^*}}.$$

Dabei ist  $\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l Y_j$  sowie

$$V^* = \frac{1}{k+l-2} \left( \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^l (Y_j - \bar{Y})^2 \right).$$