

9. Aufgabenblatt zur Statistik I

Abgabe bis 1. Juli 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):

Konstruieren Sie einen zweiseitigen Binomialtest zum Niveau α , d.h. einen Test im Binomialmodell für die Nullhypothese $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen die Alternative $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$, wobei $0 < \vartheta_0 < 1$. Leiten Sie mit Hilfe des Satzes von de Moivre und Laplace eine asymptotische Version des Tests her.

2. Aufgabe (4 Punkte):

Zeigen Sie direkt, ohne Benutzung von Satz 8.3, dass der einseitige t -Test im zweiparametrischen Gauß'schen Produktmodell unverfälscht ist. Benutzen Sie dazu den Satz von Gosset, Satz 7.10.

3. Aufgabe (4 Punkte):

Eine Firma liefert physikalische Widerstände und behauptet, deren Widerstände seien normalverteilt mit Mittelwert 50 und Standardabweichung 5, gemessen in Ohm. Geben Sie je einen Test für die beiden Testprobleme

$$H_0 : m \leq 50 \text{ gegen } H_1 : m > 50$$

und

$$H_0 : v \leq 25 \text{ gegen } H_1 : v > 25$$

zum Niveau α an (bei Vorliegen von 10 Messungen unter Normalverteilungsannahme; m und v beide unbekannt). Wie lautet die Entscheidung bei folgenden Messergebnissen für 10 Widerstände:

$$45.9 \quad 68.5 \quad 56.8 \quad 60.0 \quad 57.7 \quad 63.0 \quad 48.2 \quad 59.6 \quad 55.7 \quad 50.1$$

4. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_l$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung $\mathcal{N}_{m,v}$ bzw. $\mathcal{N}_{m',v}$; m, m' und v seien unbekannt. Zeigen Sie: Jeder Likelihood-Quotienten-Test für das Testproblem $H_0 : m \leq m'$ gegen $H_1 : m > m'$ hat einen Ablehnungsbereich der Form $\{T > c\}$ mit der Zweistichproben- t -Statistik

$$T = \sqrt{\frac{kl}{k+l}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{V^*}}.$$

Dabei ist $\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l Y_j$ sowie

$$V^* = \frac{1}{k+l-2} \left(\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^l (Y_j - \bar{Y})^2 \right).$$