Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2008

8. Aufgabenblatt zur Statistik I

Abgabe bis 24. Juni 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei X eine $\mathcal{N}_{m,v}$-verteilte Zufallsvariable und $Y = e^X$. Bestimmen Sie die Verteilungsdichte von Y.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sei eine n-dimensionale Normalverteilung. Zeigen Sie:

(a) $X_1, \dots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn sie paarweise unkorreliert sind.

(b) Es gibt Konstanten $a, a_1, \dots a_{n-1} \in \mathbb{R}$, so dass für $\hat{X}_n := a + \sum_{i=1}^{n-1} a_i X_i$ gilt: $X_n - \hat{X}_n$ ist unabhängig von $X_1, \dots, X_{n-1}$, und $\mathbb{E}(\hat{X}_n - X_n) = 0$.

Hinweis: zu (b): Minimieren Sie die quadratische Abweichung $\mathbb{E}((\hat{X}_n - X_n)^2)$ und verwenden Sie Teil (a).

3. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei C eine positiv definite symmetrische $n \times n$ Matrix und $\mathcal{W}_C$ die Klasse aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ mit den Eigenschaften: P ist zentriert mit Kovarianzmatrix C und P besitzt eine Dichtefunktion ϱ, für die die differentielle Entropie

$$H(P) := -\int_{\mathbb{R}^n} dx\, \varrho(x) \log \varrho(x)$$

existiert. Zeigen Sie:

$$H(\mathcal{N}_n(0, C)) = \frac{n}{2} \log[2\pi e (\det C)^{1/n}] = \max_{P \in \mathcal{W}_C} H(P).$$

Hinweis: Betrachten Sie die relative Entropie $H(P, \mathcal{N}_n(0, C))$.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Betrachten Sie das n-fache Produkt des Modells $([0, \infty), \mathcal{B}_{[0,\infty)}, Q_\vartheta : \vartheta > 0)$. Dabei ist Q_ϑ die Weibull-Verteilung mit bekannter Potenz $\beta > 0$ und unbekanntem Skalenparameter $\vartheta > 0$, d.h. Q_ϑ hat die Dichtefunktion

$$\varrho_\vartheta(x) = \vartheta\, \beta\, x^{\beta - 1} \exp(-\vartheta x^\beta).$$

Dieses Modell beschreibt die zufällige Funktionsdauer von technischen Produkten.

(a) Zeigen Sie: Unter $Q_\vartheta^{\otimes n}$ hat $T = \vartheta \sum_{i=1}^n X_i^\beta$ die Gamma-Verteilung $\Gamma_{1,n}$.

(b) Bestimmen Sie einen besten Niveau-α Test φ für die Nullhypothese $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ (mittlere Lebensdauer überschreitet Minimalwert) gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.