Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2008

7. Aufgabenblatt zur Statistik I

Abgabe bis 17. Juni 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):
In der Situation des Neyman-Pearson-Lemmas sei

$$G^*(\alpha) := \sup\{\mathbb{E}_1(\psi) : \psi \text{ Test mit } \mathbb{E}_0(\psi) \leq \alpha\}$$

die beim Niveau $0 < \alpha < 1$ bestenfalls zu erreichende Macht. Zeigen Sie:

(a) G^* ist monoton wachsend und konkav.

(b) Ist φ ein Neyman-Pearson-Test mit Schwellenwert c, so ist c die Steigung einer Tangente an G^* an der Stelle $\mathbb{E}_0(\varphi)$.

Hinweis: Die Aussage in (b) ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass

$$\mathbb{E}_1(\varphi) - c\,\mathbb{E}_0(\varphi) \geq \mathbb{E}_1(\psi) - c\,\mathbb{E}_0(\psi)$$

für jeden Test ψ.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Betrachten Sie ein einfaches Alternativ-Standardmodell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, P_0, P_1)$. Ein Test φ von P_0 gegen P_1 heißt Minimax-Test, wenn das Maximum der Irrtumswahrscheinlichkeiten erster und zweiter Art minimal ist. Zeigen Sie: Es gibt einen Neyman-Pearson-Test φ mit $\mathbb{E}_0(\varphi) = \mathbb{E}_1(1 - \varphi)$, und dieser ist ein Minimax-Test.

3. Aufgabe (4 Punkte):
Unter 3000 Geburten wurden in einer Klinik 1578 Knaben gezählt. Würden Sie aufgrund dieses Ereignisses mit einer Sicherheit von 95 % an der Hypothese festhalten wollen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt gleich 1/2 ist?

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(E, \mathcal{E}, Q_0, Q_1)$ ein statistisches Standardmodell mit einfacher Hypthese und Alternative und strikt positiven Dichten ϱ_0, ϱ_1. Für den Log-Likelihood-Quotienten $h = \log(\varrho_1/\varrho_0)$ existiere die Varianz $v_0 = \mathbb{V}_0(h)$. Im zugehörigen unendlichen Produktmodell sei R_n der Likelihood-Quotient nach n Beobachtungen. Zeigen Sie: Der Neyman-Pearson-Test zu einem vorgegebenen $0 < \alpha < 1$ hat einen Ablehnungsbereich der Gestalt

$$\{\log R_n > -n\,H(Q_0, Q_1) + \sqrt{n\,v_0}\,\Phi^{-1}(1-\alpha)(1+\delta_n)\}$$

mit $\delta_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Hinweis: Bestimmen Sie das asymptotische Niveau der Tests mit konstantem $\delta_n = \delta \neq 0$.