Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2008

4. Aufgabenblatt zur Statistik I

Abgabe bis 20. Mai 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):
Für $r > 0$ und $0 < p < 1$ heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{\mathcal{B}}_{r,p}$ auf $\mathbb{Z}_+$ mit Zähldichte

$$\bar{\mathcal{B}}_{r,p}(\{k\}) = \binom{-r}{k} p^r (p-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

die negative Binomialverteilung zu r, p. Betrachten Sie zu gegebenem $r > 0$ das negative Binomialmodell $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+), \bar{\mathcal{B}}_{r,\vartheta} : 0 < \vartheta < 1)$. Bestimmen Sie den besten Schätzer für $\tau(\vartheta) = 1/\vartheta$ und geben Sie dessen Varainz für jedes ϑ explizit an.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Zeigen Sie: Ist $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, \mathcal{F}, P_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ ein exponentielles Modell bezüglich einer Statistik $T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, so ist auch das n-fache Produktmodell $\mathcal{M}^{\otimes n} = (\mathcal{X}^n, \mathcal{F}^{\otimes n}, P_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in \Theta)$ exponentiell mit zugrunde liegender Statistik $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T \circ X_i$. Insbesondere ist T_n ein bester Schätzer für $\tau(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta(T)$.

3. Aufgabe (4 Punkte):
Betrachten Sie zu einem gegebenen Mittelwert $m \in \mathbb{R}$ das n-fache Gauß-sche Produktmodell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^{\otimes n}, \mathcal{N}_{m,\vartheta}^{\otimes n} : \vartheta > 0)$. Zeigen Sie: Die Statistik

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - m|$$

auf $\mathbb{R}^n$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\vartheta) = \sqrt{\vartheta}$. Zeigen Sie weiter, dass die Varianz dieser Statistik für kein ϑ die Cramér-Rao-Schranke $\tau'(\vartheta)^2/I(\vartheta)$ erreicht.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und binomialverteilt zu den Parametern m und p mit unbekanntem m und unbekanntem p mit $0 < p < 1$. Geben Sie zu jedem n einen Schätzer $\tau(X_1, \dots, X_n)$ von m so an, dass diese Folge von Schätzern konsistent ist.