

2. Aufgabenblatt zur Statistik I

Abgabe bis 29. April 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):

In einer Lostrommel befinden sich N Lose mit den Nummern $1, \dots, N$. N ist unbekannt. Paul will wissen, wie viele Lose sich in der Trommel befinden und entnimmt heimlich ein Los, merkt sich die aufgedruckte Nummer und legt es in die Trommel zurück. Das macht er n -mal.

- Berechnen Sie aus den gemerkten Nummern X_1, \dots, X_n einen Maximum-Likelihood-Schätzer T für N . Ist dieser erwartungstreu?
- Nun zieht Paul die n Lose ohne Zurücklegen. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T für N , berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}_N(T)$ und geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für N an.

2. Aufgabe (4 Punkte):

Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer und überprüfen Sie, ob dieser eindeutig bestimmt ist:

- in der Situation von Aufgabe 3, Blatt 1,
- im reellen Produktmodell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, Q_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta > 0)$, wobei Q_ϑ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit der Dichte $q_\vartheta(x) = \vartheta x^{\vartheta-1} 1_{(0,1)}(x)$ sei.

3. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei X die Anzahl der Unfälle in einer bestimmten Stadt in einer Woche. Wir betrachten X als Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Wir wollen aus der Beobachtung von X die Wahrscheinlichkeit schätzen, dass in den folgenden drei Wochen kein Unfall geschieht. Zeigen Sie: Ist T ein erwartungstreuer Schätzer, so liefert T unsinnige Schätzwerte.

4. Aufgabe (4 Punkte):

Gegeben sei das statistische Produktmodell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, Q_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in \mathbb{R})$. Dabei sei Q_ϑ die sogenannte *zweiseitige Exponentialverteilung* oder *Laplace-Verteilung* mit Zentrum ϑ , d.h. das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit Dichtefunktion

$$q_\vartheta(x) := \frac{1}{2} e^{-|x-\vartheta|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ und zeigen Sie, dass dieser nur für ungerades n eindeutig bestimmt ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1, Blatt 1.