Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2008

1. Aufgabenblatt zur Statistik I

Abgabe bis 22. April 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):
Zeigen Sie für eine reelle Zufallsvariable X:
(a) Ist $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ mit Erwartungswert m, so gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}((X-a)^2) \geq \mathbb{V}(X)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = m$.
(b) Ist $\mathbb{E}(X) < \infty$ und μ ein Median von X, so gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(|X-a|) \geq \mathbb{E}(|X-\mu|)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn auch a ein Median ist.

Hinweis: Teil (b): Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Verteilung Q auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Eine Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ heißt ein Median (Zentralwert) von X bzw. Q, wenn $P(X \geq \mu) \geq 1/2$ und $P(X \leq \mu) \geq 1/2$. Ein Median ist also eine Stelle, an der die Verteilungsfunktion von X das Niveau $1/2$ überschreitet (oder überspringt). Ohne Einschränkung sei $a < \mu$. Zeigen Sie

$$|X-a| - |X-\mu| = (\mu - a)(2 1_{\{X \geq \mu\}} - 1) + 2(X-a)\, 1_{\{a < X < \mu\}}.$$

2. Aufgabe (4 Punkte): *(Beste lineare Vorhersage)*
Es seien X und Y reelle Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Weiter gelte $\mathbb{V}(X) = 1$. Zeigen Sie: die quadratische Abweichung

$$\mathbb{E}((Y-a-bX)^2)$$

zwischen Y und der affinen Funktion $a + bX$ von X wird minimiert für $b = \mathrm{Cov}(X,Y)$ und $a = \mathbb{E}(Y - bX)$. Was bedeutet dies im Fall, wenn X und Y unkorreliert sind?

3. Aufgabe (4 Punkte):
Die Strahlenbelastung von Pilzen soll überprüft werden. Dazu wird bei n unabhängigen Pilzproben die Anzahl der Geigerzähler-Impulse jeweils während einer Zeiteinheit gemessen. Stellen Sie ein geeignetes statistisches Modell auf und geben Sie einen Schätzer für die Strahlenbelastung an, der im Erwartungswert den Modellparameter liefert (man nennt dies Erwartungstreue).

Hinweis: Die Anzahl der Atomzerfalls-Zeitpunkte einer radioaktiven Substanz ist in der Regel Poisson-verteilt.

Bitte wenden

4. Aufgabe (4 Punkte):
Gegeben sei das n-fache Produktmodell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{U}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in \mathbb{R})$, wobei $\mathcal{U}_\vartheta$ die Gleichverteilung auf dem Intervall $[\vartheta - \frac{1}{2}, \vartheta + \frac{1}{2}]$ sei. Berechnen Sie jeweils den Erwartungswert der Schätzer

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

und

$$T = \frac{1}{2} \Big(\max_{1 \leq i \leq n} X_i + \min_{1 \leq i \leq n} X_i \Big).$$

Verwenden Sie die Verteilungssymmetrie der X_i.