

Eine kleine Einführung in die Theorie  
der Spingläser



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Mutter aller Modelle</b>	<b>5</b>
1.1	Methoden (k)einen <a href="#">Phasenübergang</a> festzustellen . . . . .	9
1.2	Lässt sich das Ausgangsmodell noch anders <i>vereinfachen</i> ? . . .	10
1.3	Warum ist das hilfreich? . . . . .	11
1.4	Anwendung auf das Curie-Weiss-Modell . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Einige Spin-Glas-Modelle</b>	<b>17</b>
2.1	Das Edwards-Andersson-Modell . . . . .	17
2.2	Das Sherrington-Kirkpatrick-Modell (SK-Modell) . . . . .	18
2.3	Das Hopfield-Modell . . . . .	20
2.4	Das P-Spin SK-Modell . . . . .	23
2.5	Das Random Energy Modell (REM) . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Was Physiker denken - eine Skizze</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>Das einfachste Spinglas: Das REM</b>	<b>31</b>
4.1	Grundzustandsenergie . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Ein Ergebnis im SK-Modell</b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Das Hopfield-Modell</b>	<b>45</b>
6.1	Thermodynamik des Hopfield-Modells . . . . .	51



# Kapitel 1

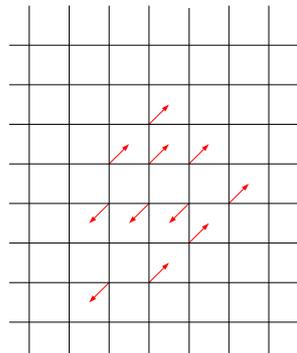
## Die Mutter aller Modelle

Motivation:

- Spingläser sind **ungeordnete** magnetische Modelle
- Wir versuchen zunächst die **geordneten** zu verstehen

Geschichte:

- 1924: ISINGS Doktorarbeit (Doktorvater: LENZ)
- ISING analysiert „magnetische Systeme“
  - Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$  endlich (Gitterpunkte  $\hat{=}$  Atomen mit zwei „**quantisierten**“ magnetischen Zuständen  $\pm 1$ )



- Sei  $\sigma_x \in \{\pm 1\}$  der Spinwert in  $x \in \mathbb{Z}^d$

– Betrachte die **Energiefunktion**:

$$H_\Lambda(\sigma) = - \sum \sigma_x \sigma_y \Phi(x, y) - h \sum \sigma_x$$

Hierbei:

- \*  $\sigma = (\sigma_x)_{x \in \Lambda} \in \{\pm 1\}^\Lambda$
  - \*  $\Phi(\cdot) \geq 0$  Die Wechselwirkungsstärke (typischerweise abhängig von  $|x - y|$  und **fallend**)
  - \*  $h \geq 0$  Das äußere **Magnetfeld**
- ISINGS Frage: Gibt es in Diesem Modell einen **Phasenübergang**?
  - ISINGS Antwort:
    - $d = 1$  : **Nein** (Richtig)
    - $d \geq 2$  : **Nein** (Falsch!)

Um uns das Leben leichter zu machen:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} 1 & |x - y| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow H_\Lambda(\sigma) = - \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ \langle x, y \rangle}} \sigma_x \sigma_y - h \sum_x \sigma_x$$

- Diese Energiefunktion spendiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das **GIBBS-Maß**

$$\mu_{\Lambda, \beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}}{Z_{\Lambda, \beta}}$$

Mit:

$$\beta = 1/\text{Temperatur}$$

$$Z_{\Lambda, \beta} = \text{Zustandssumme}$$

$$= \sum_{\sigma'} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma')}$$

- $\beta$  **sehr klein** (hohe Temperatur)  
 $\mu_{\Lambda, \beta}$  ist nahezu eine **Gleichverteilung**.

- $\beta$  sehr groß (tiefe Temperaturen)  
 $\mu_{\Lambda, \beta}$  konzentriert sich in den  $\sigma$  minimaler Energie

Was ist Phasenübergang?

- (Vage) Existenz verschiedener Makrozustände, die im thermodynamischen Limes ( $|\Lambda| \rightarrow \infty$ ) Masse bekommen
- (Physikalische Definition) Der Limes der freien Energie pro Teilchen

$$\begin{aligned} f_\beta &:= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{|\Lambda_n|} \frac{1}{\beta} \log Z_{\beta, \Lambda_n} \\ &=: \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{|\Lambda_n|} F_{\beta, \Lambda_n} \end{aligned}$$

existiert (Für jede „richtig“ gegen  $\infty$  divergente Mengenfolge  $\Lambda_n$ ), ist aber nicht analytisch in  $\beta$ .

- Es gibt mehr als ein GIBBS-Maß im unendlichen Volumen  $\mathbb{Z}^d$  (Im Sinne der sogenannten DLR-Gleichungen)
- Es gibt  $\beta_c > 0$ , bei der die Korrelationen

$$\mu_{\Lambda, \beta_c, 0}(\sigma_i \sigma_j)$$

nicht exponentiell in  $d(i, j)$  fallen.

**Fakt 1:** All diese Definitionen sind im Allgemeinen nicht äquivalent (Wohl aber im Falle des Ising-Modells).

**Fakt 2:** In den obigen Ferromagnetischen Modellen (D.h.  $\Phi \geq 0$ ) existiert  $f_\beta$ . Ist zudem

$$\sup_{\sigma} \frac{H_\Lambda(\sigma)}{|\Lambda|} \geq C > -\infty$$

für alle endlichen  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$ , so ist  $f_\beta$  endlich.

Der Beweis beruht auf einem Subadditivität-Argument:

**Beweis:** Beachte, dass

$$\bar{H}(\sigma) := \sum_{x,y \in \Lambda} \Phi(x,y)(\sigma_x - \sigma_y)^2 - h \sum_x \sigma_x$$

Sich nur um die Konstante

$$\sum_{x,y \in \Lambda} \Phi(x,y)$$

von  $H_\Lambda(\sigma)$  unterscheidet. Die freie Energie bezüglich  $H$  existiert also **genau dann, wenn** sie bezüglich  $\bar{H}$  existiert. Ist nun

$$\Lambda = \Lambda_1 \dot{\cup} \Lambda_2$$

so folgt

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{\beta,\Lambda} &= \sum_{\substack{\sigma_x \\ x \in \Lambda_1}} \sum_{\substack{\tau_y \\ y \in \Lambda_2}} \exp(-\beta(H_{\Lambda_1}(\sigma) + H_{\Lambda_2}(\tau))) \\ &\quad \times \exp\left(-\beta \sum_{x \in \Lambda_1} \sum_{y \in \Lambda_2} \Phi(x,y)(\sigma_x - \tau_y)^2\right). \end{aligned}$$

Also wegen  $\Phi \geq 0$

$$\bar{Z}_{\beta,\Lambda} \leq \bar{Z}_{\beta,\Lambda_1} \times \bar{Z}_{\beta,\Lambda_2}.$$

D.h.

$$-\bar{F}_{\beta,\Lambda_1} \leq (-\bar{F}_{\beta,\Lambda_1}) + (-\bar{F}_{\beta,\Lambda_1})$$

Die Behauptung folgt also aus einer mehrdimensionalen Version von

**Lemma 1** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall n, m.$$

Dann existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a_n.$$

Ist zudem  $\frac{1}{n} a_n$  gleichmäßig beschränkt, so ist der Limes endlich. (Der Rest ist

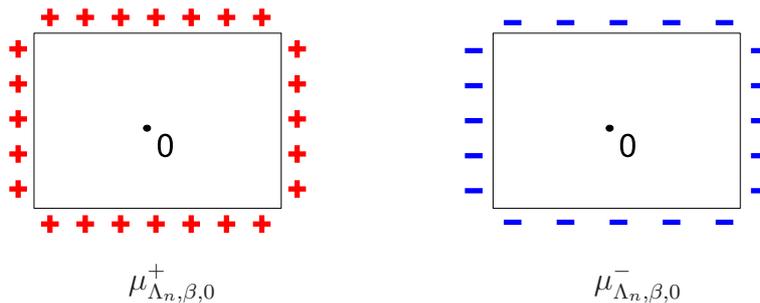
eine Übung)

□

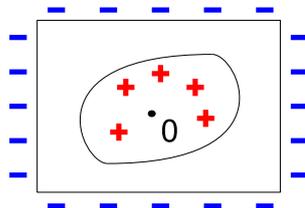
## 1.1 Methoden (k)einen Phasenübergang festzustellen

- Hängen die „lokalen Gibbsmaße“ „nicht zu stark“ von den Randbedingungen ab, so gibt es **keinen Phasenübergang** (Dobrushin Koeffizienten)
- **Phasenübergang im Ising-Modell** lässt sich mithilfe des **Peierlschen Arguments** nachweisen.

– Idee: Vergleiche  $\mu_{\Lambda_n, \beta, 0}^+$  und  $\mu_{\Lambda_n, \beta, 0}^-$



– Betrachte das Ereignis  $\{\sigma(0) = +1\}$ . Um dies unter  $\mu_{\Lambda_n, \beta, 0}^-$  zu realisieren bedarf es einer **Barriere**. Dies ist unter  $\mu_{\Lambda_n, \beta, 0}^-$  **nicht der Fall**.



– Solche Barrieren (**Konturen**) sind **exponentiell teuer**

- Es gibt aber nur **wenig kurze Konturen**
- Für  $\beta$  groß:  $\mu_{\Lambda_n, \beta, 0}^-(\sigma(0) = +1) < \frac{1}{2}$ .

**Bemerkung 1** Dieses schöne Argument steht leider für **soft spins**, z.B. im **Rotor Modell** ( $\sigma_x \in S'$ ) nicht zur Verfügung.

- In  $d = 1, 2$  lässt sich die freie Energie **exakt berechnen**
  - Dies geschieht in  $d = 1$  mittels Markov-Ketten
  - In  $d = 2$  ist dies eine recht anspruchsvolle algebraische Rechnung (Onsager)
- Für  $d \geq 3$  scheint dies nicht möglich zu sein.

## 1.2 Lässt sich das Ausgangsmodell noch anders vereinfachen?

**Mean-Field-Ansatz:** Ersetze die Wechselwirkung für  $\sigma_x$

$$\sigma_x \sum_y \Phi(x, y) \sigma_y$$

durch „einen großen Spin“ **mittlerer Stärke**

$$\sigma_x \sum_y \sigma_y \frac{1}{|\Lambda_n|}$$

- ⇒ keine **Geometrie**
- ⇒ schreibe  $N = |\Lambda_n|$  und  $\sigma_i \in \pm 1$ ,  $i = 1, \dots, N$
- ⇒ Energiefunktion des **Curie-Weiss-Modells:**

$$H_{N,h}(\sigma) = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

⇒ zugehöriges **Gibbs-Maß**

$$\mu_{N,\beta,h}(\sigma) = \frac{\exp(-\beta H_{N,h}(\sigma))}{Z_{N,\beta,h}}$$

Mit  $\beta > 0$  und

$$Z_{N,\beta,h} = \sum_{\sigma' \in \{\pm 1\}^N} e^{-\beta H_{N,h}(\sigma')}$$

**Nachteil des Modells:** Keine **räumliche Struktur**, daher keine **geometrischen Aussagen** möglich

**Vorteil:** Die Energiefunktion hängt nur von dem **Ordnungsparameter** der **(mittleren) Magnetisierung** ab:

- Sei

$$m_n(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

- Dann ist

$$H_{N,h}(\sigma) = -\frac{N}{2} m_N^2(\sigma) - hN m_n(\sigma)$$

## 1.3 Warum ist das hilfreich?

Zwei wichtige Sätze:

**Satz 1** Wählt man die Spins **unabhängig, identisch verteilt (i.i.d.)** mit

$$\mathbb{P}(\sigma_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

(dies entspricht dem Fall  $\beta = 0$ ), so erfüllt  $m_N(\cdot)$  ein **Prinzip der großen Abweichungen (L.D.P)** mit **Ratenfunktion**

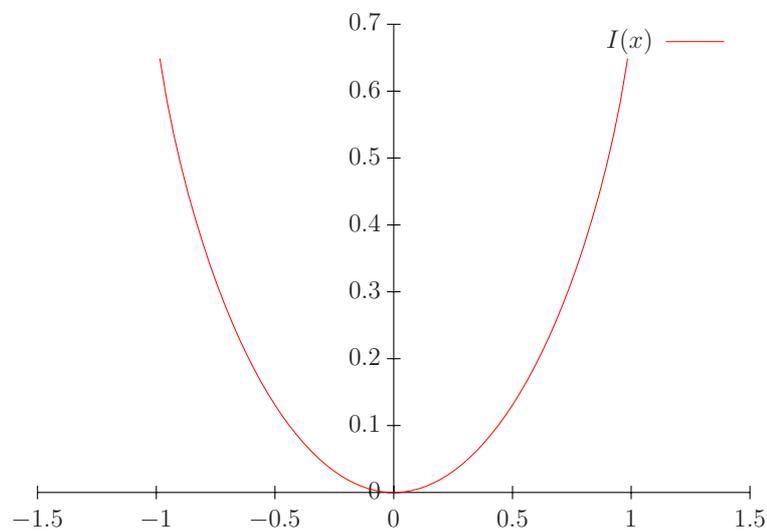
$$I(x) = \frac{1+x}{2} \log(1+x) + \frac{1-x}{2} \log(1-x)$$

und *Geschwindigkeit*  $N$ , d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}(m_N(\sigma) \approx x) = -I(x)$$

für  $x \in [-1, 1]$ . Mit anderen Worten

$$\mathbb{P}(m_N(\sigma) \approx x) \sim e^{-NI(x)}$$



*Beweis:* Anschreiben der [Binomialwahrscheinlichkeiten](#) und anwenden der [Stirlingschen Formel](#) □

**Satz 2** (*Laplacesche Methode*)

Es sei  $(\mu_n)$  eine Folge von Maßen, die einem mit *Geschwindigkeit*  $n$  und *Ratenfunktion*  $I$  genüge, d.h.

$$\mu_n(dx) \approx e^{-nI(x)}$$

Dann gilt für stetig, beschränkte  $F$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int e^{nF(x)} d\mu_n(x) = \sup_x [F(x) - I(x)]$$

Und: Ist

$$\frac{d\nu_n}{d\mu_n}(x) = \frac{e^{nF(x)}}{\int e^{nF(x)} d\mu_n(x)},$$

so **genügt auch**  $(\nu_n)_n$  **einer LDP** mit **Geschwindigkeit**  $n$  und **Ratenfunktion**

$$J(x) = F(x) - I(x) - \sup_y [F(y) - I(y)].$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \int e^{nF(x)} d\mu_n(x) &\approx \int e^{nF(x)} e^{-nI(x)} dx \\ &= \int e^{n(F(x)-I(x))} \approx e^{n \sup_x (F(x)-I(x))} \end{aligned}$$

Den zweiten Teil der Aussage macht man sich ebenso plausibel.  $\square$

## 1.4 Anwendung auf das Curie-Weiss-Modell

Setze

$$\begin{aligned} \mu_n(dx) &= \mathbb{P}(m_n(\sigma) \in dx) \\ \nu_n(dx) &= \mu_{N,\beta}(dx) \end{aligned}$$

mit

$$F(x) = \frac{\beta x^2}{\alpha} + \beta h x.$$

Dann ist

$$Z_{N,\beta,h} = \alpha^N \int e^{NF(x)} d\mu_n.$$

Also:

$$f_\beta = \lim -\frac{1}{\beta N} \log Z_{N,\beta,h} = -\frac{1}{\beta} \left[ \log 2 + \sup_y \left( \frac{\beta y^2}{2} + h\beta y - I(y) \right) \right]$$

(mit

$$I(y) = \frac{1+y}{2} \log(1+y) + \frac{1-y}{2} \log(1-y))$$

⇒ Formel für die freie Energie

Außerdem genügt  $\mu_{N,\beta,h}(m_N(\sigma) \in dx)$  einem LDP mit Ratenfunktion

$$J(x) = F(x) - I(x) - \sup_y [F(y) - I(y)]$$

mit  $I(\cdot)$  wie oben und

$$F(x) = \frac{\beta x^2}{2} + \beta h x.$$

**Fakt:** Genügt  $(\nu_n)$  einem LDP mit Ratenfunktion  $J$ , so konvergieren gemäß  $\nu_n$  verteilte Zufallsvariablen  $X_n$  gegen die Nullstellen von  $J$ .

*Beweis:* Seien  $\mathcal{N}$  die Nullstellen,  $\varepsilon > 0$  und  $\mathcal{N}^\varepsilon$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\mathcal{N}$

$$\mathbb{P}(X_n \notin \mathcal{N}^\varepsilon) \leq e^{-n \sup_{x \notin \mathcal{N}^\varepsilon} J(x)} \longrightarrow 0$$

Die Konvergenz ist sogar  $\mathbb{P}$ -f.s. □

Ein wenig elementare Analysis zeigt, dass die Nullstellen von

$$J(x) = F(x) - I(x) - \text{const}$$

Erfüllen

$$\frac{\partial J(x)}{\partial(x)} = 0 \quad \text{d.h.} \quad \beta x + \beta h = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

4 Mögliche Situationen:

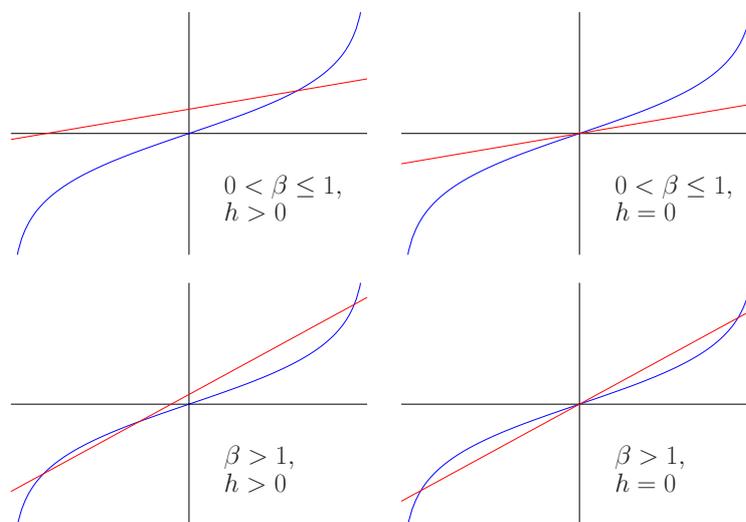
⇒ **Interessant ist**  $h = 0$

**Satz 3** Es sei  $h = 0$ . Dann gilt:

$$\lim \mu_{N,\beta,0} \cdot m_N^{-1}(\sigma) \Rightarrow \begin{cases} \delta_0 & \beta \leq 1 \\ \frac{1}{2}\delta_{m^+} + \frac{1}{2}\delta_{-m^+} & \beta > 1 \end{cases}$$

Hierbei ist  $m^+$  die größte Lösung von

$$\beta m = \underbrace{\frac{1}{2} \log \frac{1+m}{1-m}}_{\text{artanh}(m)} \Leftrightarrow \tanh \beta m = m.$$



Diese verschwindet für  $\beta \leq 1$  und ist echt positiv für  $\beta > 1$

$\Rightarrow$  **Phasenübergang bei  $\beta = 1$**

**Frage:** Lässt sich dies auch an den **Fluktuationen** erkennen?

**Satz 4** Betrachte wieder  $h = 0$ . Dann gilt für  $\beta < 1$  und messbare Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu_{N,\beta,0} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \sigma_i \in A \right) \longrightarrow \mathcal{N} \left( 0, \frac{1}{1-\beta} \right) (A).$$

Ein **CLT** für  $\beta > 1$  kann natürlich nur für die **bedingten Maße** gelten (und gilt dann auch). Für  $\beta = 1$  gilt

$$\mu_{N,1,0} \left( \frac{1}{N^{3/4}} \sum_{i=1}^N \sigma_i \in A \right) \longrightarrow \left. \frac{\int_A e^{-\frac{1}{12}x^4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{12}x^4} dx} \right\} \text{Nicht-Standard CLT.}$$



# Kapitel 2

## Einige Spin-Glas-Modelle

**Historisches:**  $\sim$  1970: Versuche **Amorphe Substanzen** (z.B. Glas) mithilfe von **Spin-Modellen** zu modellieren.

$\Rightarrow$  Wähle **zufällige Verbindungsstärken**  $J_{ij}$

$\Rightarrow$  Ungeordnete Systeme, **Spingläser**

### 2.1 Das Edwards-Andersson-Modell

$\sim$  1975, EDWARDS, ANDERSSON

Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$  endlich (und hübsch). Setze

$$H_\Lambda(\sigma) := - \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j J_{ij}$$

wobei die  $J_{ij}$  **iid** sind mit

- $J_{ij} = J_{ji}$
- $\mathbb{E}J_{ij} = 0$
- $\mathbb{V}J_{ij} = 1$

[Die Wahl von

- $\mathbb{P}(J_{ij} \geq 0)$

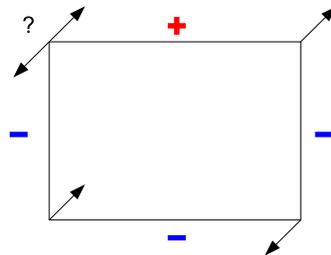
führt zu „Ausgedünnten Ferromagneten“ mit einem **komplett anderen Verhalten**]

Man kann wieder **zugehörige Gibbs-Maße** definieren und beispielsweise nach **Phasenübergängen** fragen (z.B.  $\mathbb{P}$ -f.s. in den  $J_{ij}$ ). Diese Fragen sind:

- extrem schwierig
- größtenteils **offen**
- meist one „gute Vermutung“

Grund: **Frustration**

**Beispiel 1** Dieses Phänomen macht es **unmöglich, die Grundzustände** des Systems zu erraten oder bestimmen (Welche? Wieviele?).



## 2.2 Das Sherrington-Kirkpatrick-Modell (SK-Modell)

~ 1975, SHERRINGTON, KIRKPATRICK

- „Mean-Field Spin-Glass“

- Energiefunktion:

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j < i}} \sigma_i \sigma_j J_{ij}, \quad \sigma \in \{\pm 1\}^N$$

- Zugehöriges Gibbs-Maß

$$\mu_{N,\beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{Z_{N,\beta}}$$

$$Z_{N,\beta} = \sum_{\sigma'} e^{-\beta H_N(\sigma')}$$

- Wieder gilt

- $J_{ij} = J_{ji}$
- $\mathbb{E}J_{ij} = 0$
- $\mathbb{V}J_{ij} = 1$

(Meist  $J_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ).

- Auch dieses System zeigt **Frustration**
- Dennoch gibt es auf Seiten der **Physik** Vermutungen, die zum Teil bewiesen werden können
- Diese betreffen zunächst die **freie Energie**

$$f_{n,\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} \frac{1}{\beta} \log Z_{N,\beta}$$

- Dies ist eine **Zufallsvariable**
- Wenn „alles gut geht“, sollte ein **LLN** gelten, also

$$f_{N,\beta} = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{N} \log Z_{N,\beta} \longrightarrow \bar{f}_\beta = \mathbb{E}_J \lim -\frac{1}{\beta N} \log Z_{N,\beta}$$

gelten

- Die rechte Seite ist aber schwer auszurechnen, leichter wäre

$$\begin{aligned}
 & \lim -\frac{1}{\beta N} \log \mathbb{E} Z_{N,\beta} \\
 &= \lim -\frac{1}{\beta N} \log 2^N \mathbb{E} e^{\beta/\sqrt{N} \sum_{i<j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j} \\
 &= \lim -\frac{1}{\beta N} \log \left( 2^N e^{\frac{\beta^2}{2N} \frac{N(N-1)}{2}} \right) \\
 &= -\frac{\log 2}{\beta} + \frac{\beta}{4}.
 \end{aligned}$$

- Tatsächlich gibe es einen Bereich, in dem

$$\bar{f}_\beta = -\frac{\log 2}{\beta} + \frac{\beta}{4}$$

gilt... (wird fortgesetzt...)

## 2.3 Das Hopfield-Modell

~ 1976: PASTUR-FIGOTIN: A Soluble Model of a Spin-Glass

~ 1983: HOPFIELD: Ein neuronales Netz

Als Spin Glass:

- Wähle wieder  $\sigma \in \{\pm 1\}^N$  und

$$H_N(\sigma) = -\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j J_{ij}$$

diesmal mit

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^M \xi_i^\mu \xi_j^\mu.$$

Hierbei sind die  $\xi_i^\mu, i = 1, 2, \dots, \mu = 1, 2, \dots$  iid Bernoulli Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(\xi_i^\mu = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

- Gibbs-Maße und freie Energie werden wie immer definiert

Vorteil gegenüber dem SK-Modell:

- Setzt man

$$m_N^\mu(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \xi_i^\mu$$

$$m_n = (m_N^\mu)_{\mu=1}^M$$

so ist

$$H_N(\sigma) = -\frac{N}{2} \|m_N(\sigma)\|_2^2$$

wir haben einen **Ordnungsparameter** wie im **Curie-Weiss-Modell**.

- Ist  $M(N) = N$ , so ist

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^N \xi_i^\mu \xi_j^\mu \approx \frac{1}{\sqrt{N}} g_{ij}$$

mit  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilten  $g_{ij}$  wie im **SK-Modell**

$M = M(N)$  ist also ein **Parameter**, der die **Komplexität** des Modells bestimmt.  $M = !$  entspricht dem **Curie-Weiss-Modell**.

### Als neuronales Netz:

Modelliere ein **Gehirn** als **Graphen**  $G = (V, E) \Rightarrow$  im einfachsten Fall  $G = K_N$

$$V \hat{=} \text{Neuronen}$$

$$E \hat{=} \text{Synapsen}$$

Jedes Neuron  $i$  **feuert** ( $\sigma_i = +1$ ) oder **ruht** ( $\sigma_i = -1$ ). Somit ist die Menge aller möglichen Zustände  $\{\pm 1\}^N$ .

Wollen nun **Informationen speichern**. Jede Information ist ein **Vektor**  $(\xi_i^\mu)_{i=1}^N$  mit  $\xi_i^\mu \in \{\pm 1\}$ . Wir wollen  $M$  solcher Informationen speichern. Zu Testzwecken sind die **iid** mit **iid** Komponenten.

- Wäre  $M = 1$ , so wäre

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{N} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j \xi_i^1 \xi_j^1$$

minimal für  $\sigma \equiv \pm \xi^1$ .

- Ebenso ist für **orthogonale**  $\xi^\mu$ , d.h.

$$\frac{1}{N} \sum \xi_i^\mu \xi_j^\mu = 0,$$

die Funktion

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \sum_{\mu=1}^M \sigma_i \sigma_j \xi_i^\mu \xi_j^\mu$$

minimal für  $\sigma \equiv \xi^\mu$  für ein  $\mu$ .

- Nun ist

$$\frac{1}{N} \sum \xi_i^\mu \xi_j^\mu = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

Wir hoffen, dass die „Muster“  $(\xi^\mu)_{\mu=1}^M$  in den **Minima** der Funktion

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \sum_{\mu=1}^M \sigma_i \sigma_j \xi_i^\mu \xi_j^\mu$$

„gespeichert“ sind.

- Das zugehörige **Gibbs-Maß**

$$\mu_{N,\beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{Z_{N,\beta}}$$

trüge dann einen **Großteil der Masse** in  $\pm \xi^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, M$ .

- Fortsetzung folgt.

## 2.4 Das P-Spin SK-Modell

Eine weitere Verallgemeinerung des SK-Modells:

- Die  $H_N(\sigma)$  sind **Gaussische ZVen** mit

$$\text{Cov}(H_N(\sigma), H_N(\sigma')) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma'_i \right)^2$$

- Wir wollen diese Abhängigkeit **verringern zu**

$$\text{Cov}(H_N(\sigma), H_N(\sigma')) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma'_i \right)^p, \quad p \geq 3$$

- Das geeignete Modell hierfür hat die **Energiefunktion**

$$H_N(\sigma) = -\frac{p!}{N^{\frac{p-1}{2}}} \sum_{i_1 < \dots < i_p} J_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p}$$

- Gibbs-Maß und freie Energie werden analog definiert

## 2.5 Das Random Energy Modell (REM)

~ 1984: DERRIDA

- Lässt man im **P-Spin SK-Modell**  $p \rightarrow \infty$  so erhält man, dass  $\frac{H_N(\sigma)}{\sqrt{N}}$  aus **unabhängigen  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilten ZVen** besteht.
- Dies ist das **REM**.
- Man wählt also  $2^N$  **iid  $\mathcal{N}(0, 1)$ -ZVen**  $X_Z$  und setzt

$$H_N(\sigma) = \sqrt{N} X_Z$$

- Entsprechend ist

$$Z_{N,\beta} = \sum_{\sigma} e^{\beta \sqrt{N} X_Z}$$

und die freie Energie

$$f_{N,\beta} = -\frac{1}{N\beta} \log Z_{N,\beta}$$
$$f_\beta = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{N,\beta}$$

(Fortsetzung folgt)

# Kapitel 3

## Was Physiker denken - eine Skizze

- Physiker haben das [SK-Modell](#) und das [Hopfield-Modell](#) schon um 1985 „gelöst“.
- Sie benutzen die [Replica-Methode](#)

Am Beispiel des [SK-Modells](#)

- Wollen die [freie Energie](#) berechnen:

$$f_\beta = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{N,\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta N} \mathbb{E}_J \log Z_{N,\beta}$$

- Dies ist schwierig, da [logarithmische  \$\mathbb{E}\$ -Werte](#) schwierig sind.
- Nach der [L'Hopitalschen Regel](#) ist

$$\log x = \left. \frac{x^n - 1}{n} \right|_{n=0}$$

- Wollen also berechnen:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{N} \frac{\mathbb{E}_J [Z_{N,\beta}^n] - 1}{n}$$

- Wichtig ist zu berechnen:  $\mathbb{E}_J Z_{N,\beta}^n$
- Für  $n \in \mathbb{N}$  lässt sich dies mittels **Gaussischer Integration** bewerkstelligen:

–  $Z_{N,\beta}^n$  ist die Zustandssumme  $n$  **unabhängiger Systeme** der Größe  $N$  bei invertierter Temperatur  $\beta$

– Also:

$$2^{-N} \mathbb{E} Z_{N,\beta}^n = \int \mathbb{E}_\sigma \exp \left[ \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{i < j} J_{ij} \sum_{\alpha=1}^n \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha + \beta h \sum_i \sum_\alpha \sigma_i^\alpha \right] d\mathbb{P}_J$$

– Benutze, dass für  $\mathbb{N}(0, \sigma^2)$ -verteilte Variablen  $Y$  gilt

$$\mathbb{E} e^{tY} = \mathbb{E} e^{\frac{t^2}{2} \mathbb{E} Y^2}$$

– Damit:

$$\begin{aligned} & 2^{-N} \mathbb{E} Z_{N,\beta}^n \\ &= C \cdot \mathbb{E}_\sigma \exp \left[ \frac{1}{N} \sum_{i < j} \left( \frac{\beta^2}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \sigma_i^{\alpha_1} \sigma_j^{\alpha_1} \sigma_i^{\alpha_2} \sigma_j^{\alpha_2} \right) + \beta h \sum_i \sum_\alpha \sigma_i^\alpha \right] \\ &= \text{const } e^{Nn\beta^2/4} \mathbb{E}_\sigma \exp \left[ \frac{\beta^2}{\alpha N} \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} \left( \sum_i \sigma_i^{\alpha_1} \sigma_i^{\alpha_2} \right)^2 + \beta h \sum_i \sum_\alpha \sigma_i^\alpha \right] \end{aligned}$$

- Der Erwartungswert  $\mathbb{E}[\quad]$  ließe sich ggf. berechnen, wenn der Exponent **linear** in den  $\sigma_i$  wäre
- **Linearisiere** wieder mittels **Gaussischer Integration**:

$$\begin{aligned} & 2^{-N} \mathbb{E}_J Z_{N,\beta}^n \\ &= \exp \left( \frac{Nn\beta^2}{4} \right) \int \prod_{\alpha_1 < \alpha_2} dq_{\alpha_1 \alpha_2} \times \exp \left( -\frac{N\beta^2}{2} \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} q_{\alpha_1, \alpha_2}^2 \right) \\ & \quad \times \mathbb{E}_\sigma \exp \left( \beta^2 \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} q_{\alpha_1, \alpha_2} \sum_i \sigma_i^{\alpha_1} \sigma_i^{\alpha_2} + \beta h \sum_i \sum_\alpha \sigma_i^\alpha \right) \end{aligned}$$

- Der letzte Term lässt sich nun in der Tat „berechnen“:

$$\left[ \mathbb{E}_\beta \exp \left( \beta^2 \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} q_{\alpha_1, \alpha_2} \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} + \beta h \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) \right]^N = \exp (N \log \mathbb{E}_\sigma e^L)$$

mit

$$L = \beta^2 \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} q_{\alpha_1, \alpha_2} \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} + \beta h \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}$$

- Also:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_J [Z_{N, \beta}^n] &= \\ \text{const } e^{\frac{Nn}{4}\beta^2} &\int \exp \left( -\frac{N\beta^2}{2} \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} q_{\alpha_1, \alpha_2} + N \log \mathbb{E}_Z e^L \right) d \prod q_{\alpha_1 \alpha_2} \end{aligned}$$

- Das Integral berechnet man nun, indem man die Limiten  $\lim_{n \rightarrow 0}$  und  $\lim_{N \rightarrow \infty}$  vertauscht,
  - eine [Sattelpunktmethode](#) verwendet (der wesentliche [Anteil](#) kommt vom [Maximum](#) der exp-Funktion)
  - die exp-Funktion bis zu 1. Ordnung entwickelt.
- Dies führt zu

$$\begin{aligned} 2^{-N} \mathbb{E}_J Z_{N, \beta}^n &\approx \exp \left( \frac{Nn\beta^2}{4} - \frac{N}{2} \beta^2 \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} q_{\alpha_1, \alpha_2}^2 + N \log \mathbb{E}_\sigma e^4 \right) \\ &\approx 1 + Nn \left( \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4n} \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} q_{\alpha_1, \alpha_2}^2 + \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_\sigma e^4 \right) \end{aligned}$$

- Also zu

$$f_\beta = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_J Z_{N, \beta}^n - 1}{nN}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{\beta^2}{4n} \sum_{\alpha_1 \neq \alpha_2} q_{\alpha_1, \alpha_2}^2 + \frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_\sigma e^L \right)$$

- Dabei maximieren die  $q_{\alpha_1, \alpha_2}$  den **Exponenten**
- Bis hierher ist „physikalisch“ alles in Ordnung.
- Mathematische Probleme
  - Vertauschen der Limiten
  - Vertauschen von **Integral** und **Limes**
  - Die Rechnung ergibt nur für **ganzzahlige**  $n$  einen Sinn
  - Der **Limes**  $n \rightarrow 0$  entspricht der **Vermutung**, dass sich eine Funktion, deren Werte man für  $n \in \mathbb{N}$  kennt, sich nur **auf eine Art** in 0 fortsetzen lässt.

- Um nun die **Maximalitätsbedingung** an  $q_{\alpha_1, \alpha_2}$

$$q_{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{\mathbb{E}_\sigma S_1^{\alpha_1} S_1^{\alpha_2} e^L}{\mathbb{E} e^L}$$

zu lösen, muss man etwas darüber aussagen, **wie**  $q_{\alpha_1, \alpha_2}$  **von**  $\alpha_1$  **und**  $\alpha_2$  **abhängt**.

- Erster Ansatz: **Gar nicht (Replica-symmetrische Lösung)**

$$\Rightarrow q_{\alpha_1, \alpha_2} \equiv q$$

- **Nachteil:** Die so gewonnene Lösung **stimmt nicht mit der physikalischen Intuition überein** (**negative Entropie** bei niedrigen Temperaturen...)
- Neuer Ansatz von PARISI (**Replica-Symmetrie Breaking**)
- Idee:

– Replica-Symmetrie Solution

$$q_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ & \ddots & \\ q & & 0 \end{pmatrix}$$

– 1<sup>st</sup> Level of RSB

$$q_{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & q_1 & & \\ & \ddots & & q_0 \\ \hline q_1 & 0 & & \\ & & 0 & q_1 \\ & q_0 & & \ddots \\ & & q_1 & 0 \end{array} \right)$$

– 2<sup>nd</sup> Level of RSB

$$q_{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & q_2 & & & & \\ & \ddots & & q_1 & & \\ \hline q_2 & 0 & & & & q_0 \\ & & 0 & q_2 & & \\ & q_1 & & \ddots & & \\ & & q_2 & 0 & & \\ \hline & & & & 0 & q_2 & & \\ & & & & \ddots & & q_1 & \\ & & & & q_2 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & q_2 \\ & & & q_1 & & & \ddots & \\ & & & & & q_2 & 0 & \end{array} \right)$$

– Wählt man  $q_x$  „geeignete“ (i.W. linear in  $(\alpha - \beta)$ ), so ergibt dies die „Voll RSB Lösung“.

- Dies führt zu einer [DGL](#) für die [freie Energie](#), deren Gültigkeit 2004 von TALA GRAND nachgewiesen wurde (zusammen mit GUFRA).

# Kapitel 4

## Das einfachste Spinglas: Das REM

**Erinnerung:** REM

**Energie:**  $H_N(\sigma) = -\sqrt{N}X_\sigma$ , wobei  $(X_\sigma)_{\sigma \in \{\pm 1\}^N}$  iid  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte ZVen sind.

**Gibbs-Maß:**  $\mu_{N,\beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)} \alpha^{-N}}{Z_{N,\beta}}$

**Zustandssumme:**  $Z_{N,\beta} = 2^{-N} \sum_{\sigma} e^{-\beta \sqrt{N} X_\sigma}$

**freie Energie:**  $\approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_{N,\beta}$

### 4.1 Grundzustandsenergie

Welche Energie hat der Zustand **minimaler Energie**?

**Proposition 1** *Es gilt*

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \max_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} \frac{X_\sigma}{N} = \sqrt{\alpha \log 2}$$

$\mathbb{P}$ -f.s. und in  $L^1$ ).

*Beweis:* Aufgrund der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{P} \left[ \max_{\sigma} X_\sigma \leq u \right] = \mathbb{P} [X_\sigma \leq u]^{2^N} = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_u^\infty e^{-x^2/2} dx \right)^{2^N}$$

Eine bekannte Abschätzung des Integrals ist:

$$\frac{1}{u}e^{-u^2/2} \left(1 - \frac{2}{u^2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{u}e^{-u^2/2}$$

Hieraus folgt, dass für

$$u_N(x) = \sqrt{2N \log 2} + \frac{x}{\sqrt{\alpha N \log 2}} - \frac{\log(N \log 2) + \log 4\pi}{2\sqrt{2N \log N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

gilt:

$$\mathbb{P} \left[ \max_{\sigma} X_{\sigma} \leq u_N(x) \right] \approx \left(1 - \frac{e^{-x}}{2^N}\right)^{2^N} \longrightarrow e^{-e^{-x}}$$

D.h. wir erhalten auf dieser Skala asymptotisch eine [Gumbel-Verteilung](#). Hieraus folgt alles.  $\square$

Was sagt das über die [Zustandssumme](#) und die [freie Energie](#)? Da

$$Z_{N,\beta} = \frac{1}{2^N} \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{\beta \sqrt{N} X_{\sigma}}$$

sollte man vermuten, dass für [große](#)  $N$

$$Z_{\beta,N} \approx \mathbb{E} Z_{\beta,N}$$

gilt nach dem [Gesetz der großen Zahlen](#) und daher

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_{N,\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E} Z_{N,\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log 2^{-N} \sum \mathbb{E} e^{\sqrt{N}\beta X_{\sigma}} = \frac{\beta^2}{2}$$

gilt.

Dies stimmt aber nur für [hohe Temperaturen](#):

**Satz 1** *Es gilt im [REM](#):*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} f_{N,\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_{N,\beta} = \begin{cases} \beta^2/2 & \beta \leq \beta_c \\ \beta_c^2/2 + (\beta - \beta_c)\beta_c & \beta \geq \beta_c \end{cases}$$

Wobei  $\beta_c = \sqrt{2 \log 2}$ .

Satz 1 besagt, dass das REM einen **Phasenübergang 3. Ordnung** bei  $\beta_c$  hat.

*Beweis:* Die **Jensen-Ungleichung** ergibt

$$\mathbb{E} \log Z \leq \log \mathbb{E} Z$$

Also:

$$\mathbb{E} f_{\beta, N} \leq \frac{\beta^2}{2}$$

Allerdings kann dabei nicht überall **Gleichheit** gelten. Denn:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_X \frac{d}{d\beta} f_{\beta, N} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbb{E}_X \frac{\mathbb{E}_\sigma X_\sigma e^{\beta \sqrt{N} X_\sigma}}{Z_{\beta, N}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbb{E} \max_\sigma X_\sigma \\ &\leq \sqrt{2 \log 2} \left(1 - \frac{e}{N}\right) \end{aligned}$$

Somit ist  $\beta^2/2$  für große  $\beta$  zu groß. Da die von uns gefundene Schranke erst ab  $\beta_c$  **effektiv** wird, erhalten wir

$$\mathbb{E}_X f_{\beta, N} \leq \inf_{\beta_0 > 0} \begin{cases} \frac{\beta^2}{2} & \beta \leq \beta_0 \\ \frac{\beta_0^2}{2} + (\beta - \beta_0) \sqrt{2 \log 2} & \beta > \beta_0 \end{cases}$$

Das **Infimum** wird für  $\beta_0 = \beta_c$  angenommen. Weiter ist

$$\frac{d^2}{d\beta^2} f_{\beta, N} \geq 0,$$

Also fällt die **Ableitung nicht**, somit ist der Satz gezeigt, wenn wir

$$f_{\beta, N} \xrightarrow{\text{Wkeit}} \frac{\beta^2}{2}$$

für alle  $\beta < \beta_c = \sqrt{2 \log 2}$  zeigen können.

- Da dies einem **LLN** für  $Z_{\beta, N}$  entspricht, liegt es nahe, dies mit einer

Chebyshev-Ungleichung zu versuchen

- Dazu berechne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_{N,\beta}^2 &= \mathbb{E}_\sigma \mathbb{E}_{\sigma'} \mathbb{E}_X e^{\sqrt{N}(X_\sigma + X_{\sigma'})} \\ &= 2^{-2N} \left( \sum_{\sigma \neq \sigma'} e^{N\beta^2} + \sum_{\sigma} e^{2N\beta^2} \right) \\ &= e^{N\beta^2} \left( (1 - 2^{-N}) + 2^{-N} e^{N\beta^2} \right)\end{aligned}$$

- Offenbar konvergiert der 2. Summand nur gegen 0, wenn  $\beta < \sqrt{\log 2}$  gilt.
- Dann ist aber

$$\begin{aligned}& \mathbb{P} \left[ \left| \log \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E}_J H Z_{N,\beta}} \right| > \varepsilon N \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E}_J Z_{N,\beta}} < e^{-\varepsilon N} \quad \text{oder} \quad \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E}_J Z_{N,\beta}} < e^{+\varepsilon N} \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[ \left( \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E}_J Z_{N,\beta}} - 1 \right)^2 > (1 - e^{-\varepsilon N})^2 \right] \\ &\stackrel{\text{Markov-Ungleichung}}{\leq} \mathbb{E} \left( \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E}_J Z_{N,\beta}} - 1 \right)^2 / (1 - e^{-\varepsilon N})^2 \\ &\leq \frac{2^{-N} + 2^{-N} e^{N\beta^2}}{(1 - e^{-\varepsilon N})^2}\end{aligned}$$

Nach dem Vorhergehenden

- Ist  $\beta < \sqrt{\log 2}$ , geht dies exponentiell schnell gegen 0.
- Allerdings ist  $\sqrt{\log 2}$  nicht die kritische Temperatur
- Woran liegt das?
- Bei der Berechnung von  $\mathbb{E}_J Z_{N,\beta}^2$  müssen wir insbesondere

$$\mathbb{E}_J e^{2\sqrt{N}\beta X_\sigma} = e^{2N\beta^2}$$

berechnen

- Der Hauptbeitrag kommt von

$$X_\sigma \sim 2\beta\sqrt{N}$$

- Wir vergleichen dies mit

$$(\mathbb{E}Z_{N,\beta})^2 = \left(e^{\beta^2 N/2}\right)^2$$

- Hier kommt der Hauptbeitrag von

$$X_\beta \sim \beta\sqrt{N}$$

- Man könnte auf die Idee kommen, dass ein Abschneiden auf Höhe von  $c\sqrt{N}$  für geeignetes  $\beta < c < 2\beta$  die Explosion der Varianz verhindert.
- Das ist tatsächlich wahr, aber eine längere Rechnung

□

### Lassen sich auch die **Fluktuationen** kontrollieren?

- Ja, wir benötigen aber etwas Vorbereitung:
- Ein Punktprozess ist grob gesprochen eine zufällige Verteilung von Punkten auf einem (lokal kompakten, Hausdorffschen) Raum  $E$  mit Borelscher  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{E}$ .
- für  $x \in E$  sei  $\delta_x$  das Dirac-Maß in  $x$ :

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

- Ein Punkt-Maß ist eine Konfiguration von Punkten, die „lokal nicht zu sehr klumpt“. Genauer: sind  $(x_i)_{i=1}^\infty$  Punkte in  $E$ , so heißt

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}$$

**Punkt-Maß**, falls

$$m(K) < \infty \quad \forall K \in \mathcal{E} \text{ kompakt}$$

- Ein **Punktprozess** ist ein zufälliges **Punkt-Maß**.
- Genauer: Sei

$$M_P(E) = \{m : m \text{ ist Punktmaß auf } E\}$$

- Diese Menge versehen wir mit der **kleinsten  $\sigma$ -Algebra**,  $\mathcal{M}_P(E)$ , für die alle Abbildungen

$$m : F \mapsto m(F) \quad , F \in \mathcal{E}$$

messbar sind.

- **Definition 1** Ein **Punktprozess** ist eine **messbare** Abbildung

$$N : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (M_P(E), \mathcal{E}_P(E)).$$

$\mathbb{P}^N := \mathbb{P} \circ N^{-1}$  ist seine **Verteilung**.

- **Definition 2** Ein Punktprozess  $N$  heißt **Poissonscher Punktprozess**, falls es ein **lokal endliches Maß**  $\mu$  auf  $(E, \mathcal{E})$  gibt, so dass für  $F \in \mathcal{E}$  gilt

$$\mathbb{P}[N(F) = k] = \begin{cases} \frac{e^{-\mu(F)} \mu(F)^k}{k!} & \mu(F) < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und zudem für disjunkte  $F_1, \dots, F_L$ ,  $N(F_i)$  **unabhängig** sind.

**Satz 2** (Doppelter **Phasenübergang**)

Die Zustandssumme  $Z_{N,\beta}$  im REM hat die folgenden **Fluktuationen**:

- Für  $\beta < \sqrt{\frac{\log 2}{2}}$  gilt

$$e^{\frac{N}{2}(\log 2 - \beta^2)} \log \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E}Z_{N,\beta}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Für  $\beta = \sqrt{\frac{\log 2}{2}}$  gilt

$$e^{\frac{N}{2}(\log 2 - \beta^2)} \log \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E}Z_{N,\beta}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1/2)$$

- Für  $\sqrt{\frac{\log 2}{2}} < \beta < \sqrt{2 \log 2}$  und  $\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{2 \log 2}}$  gilt

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{N}{2} (2 \log 2 - \beta^2) + \frac{\alpha}{2} (\log (N \log 2) + \log 4\pi) \right] \log \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E}Z_{N,\beta}} \\ \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{\alpha z} (\mathcal{P}(dz) - e^{-z} dz) \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\mathcal{P}$  der *Poissonsche Punktprozess mit Intensitätsmaß*

$$\mu(dx) = e^{-x} dx$$

- Falls  $\beta = \sqrt{2 \log 2}$  gilt

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}(\log N \log 2 + \log 4\pi)} \left[ \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E}Z_{N,\beta}} - \frac{1}{2} + \frac{\log(N \log 2) + \log 4\pi}{4\sqrt{\pi N \log 2}} \right] \\ \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_{-\infty}^0 e^z (\mathcal{P}(dz) - e^{-z} dz) + \int_0^{\infty} e^z \mathcal{P}(dz) \end{aligned}$$

- Falls  $\beta > \sqrt{2 \log 2}$  gilt

$$\begin{aligned} \exp \left[ -N \left( \beta \sqrt{2 \log 2} - \log 2 \right) + \frac{\alpha}{2} (\log(N \log 2) + \log 4\pi) \right] Z_{N,\beta} \\ \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha z} \mathcal{P}(dz). \end{aligned}$$

**Bemerkungen 1** • (1) ist der **Typ** von Resultat, den man **eigentlich erwartet**

- Bei der kritischen Temperatur  $\sqrt{2 \log 2}$  ändert sich die **Größenordnung der Fluktuationen** von **exponentiell klein** zu **exponentiell groß**.
- Es findet ein **zweiter Phasenübergang** bei  $\beta_c = \sqrt{\frac{\log 2}{2}}$  statt.

- Hier gehen die **Gaussischen Fluktuationen** in **nicht-Gaussische Fluktuationen** über.
- Der **Poissonsche Punktprozess** sollte nicht erstaunen:
  - Der **Zusammenbruch des CLT** ist eng verknüpft damit, dass die **Lindeberg-Bedingung nicht mehr gilt**
  - Dies wiederum stammt vom **Einfluss der Extrema** der  $X_\sigma$ .
  - Es ist aber eine bekannte Tatsache der **Extremwerttheorie**, dass der **Punktprozess**

$$\mathcal{P}_N := \sum_{\sigma} \delta_{u_N^{-1}}(X_\sigma)$$

gegen einen **PPP** mit Intensitätsmaß  $\mu(dx) = e^{-x} dx$  konvergiert.

# Kapitel 5

## Ein Ergebnis im SK-Modell

TALAGRANDS Beweis der **Parisi-Lösung** ist für diesen Kurs zu **aufwändig**. Wir studieren ein **Fluktuationsresultat** nach AIZENMAN, LEBOWITZ und RUELLE.

**Erinnerung:**

- $H_N(\sigma) = -\frac{1}{N} \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$
- $J_{ij}$  iid  $\mathcal{N}(0, 1)$
- $Z_{N,\beta} = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{\sigma} e^{\frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j}$
- $f_{N,\beta} = \frac{1}{N} \log Z_{N,\beta}$
- $f_{\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\beta}$

**Satz 1** [AIZENMAN, LEBOWITZ, RUELLE, '87; COMETS/NEVEU, '94]

Für  $\beta < 1$  gilt für die **freie Energie**

$$\log \frac{Z_{N,\beta}}{\mathbb{E} Z_{N,\beta}} \longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2(\beta))$$

mit

$$\sigma^2(\beta) = -\frac{1}{2} [\log(1 - \beta^2) + \beta^2]$$

Konsequenz:

**Korollar 1** Für alle  $\beta < 1$  stimmen *gequenchte* und *annealte freie Energie* überein. D.h.:

$$\lim \frac{1}{N} \mathbb{E}_J \log Z_{N,\beta} = \lim \frac{1}{N} \log \mathbb{E} Z_{N,\beta} = \frac{\beta^2}{4} \quad (*)$$

*Beweis:* Dies folgt, da man aus einem CLT einen LLN folgern kann.  $\square$

Bemerkenswert ist auch, dass dies ein Kennzeichen des Hochtemperaturbereiches ist.

**Satz 2** Für  $\beta > 1$  ist (\*) im SK-Modell falsch.

Wir skizzieren nur den Beweis von Satz 1: Diesen führen wir mithilfe der kombinatorischen Methode.

*Skizze des Beweises von Satz 1:*

- Wir beginnen mit einer einfachen Identität:

$$e^x = \cosh(x) (1 + \tanh(x))$$

- Angewandt auf die Exponentialfunktion in der Definition von  $Z_{N,\beta}$

$$\begin{aligned} Z_{N,\beta} &= \mathbb{E}_\sigma \prod_{i<j} \cosh\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}} J_{ij} \sigma_i \sigma_j\right) \left(1 + \tanh\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}} \sigma_i \sigma_j J_{ij}\right)\right) \\ &= \prod_{i<j} \cosh\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}} J_{ij}\right) \prod_{i<j} \left(1 + \sigma_i \sigma_j \tanh\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}} J_{ij}\right)\right) \end{aligned}$$

da  $\cosh$  gerade und  $\tanh$  ungerade ist.

- Also

$$\log Z_{N,\beta} = \sum_{i<j} \log \cosh\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}} J_{ij}\right) + \log \mathbb{E}_\sigma \prod_{i<j} \left(1 + \sigma_i \sigma_j \tanh\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}} J_{ij}\right)\right)$$

- Erster Term:

$$\begin{aligned} \log \cosh x &= \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \\ \Rightarrow \sum_{i < j} \log \cosh \left( \frac{\beta}{\sqrt{N}} J_{ij} \right) &= \frac{\beta^2}{2N} \sum_{i < j} J_{ij}^2 + \underbrace{\text{Rest}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

- 

$$\frac{\beta^2}{2N} \sum_{i < j} (J_{ij}^2 - 1) + \underbrace{\frac{\beta^2 N}{4}}_{\log \mathbb{E}Z_{N,\beta}}$$

- Nach dem [gewöhnlichen CLT](#)

$$\frac{1}{\binom{N}{2}} \sum_{i < j} (J_{ij}^2 - 1) \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

- Dies ist die Wurzel des [Terms](#) in der [Varianz](#)

## 2. Summand:

- Dieser ist

$$\log \mathbb{E}_\sigma \prod_{i < j} \left( 1 + \sigma_i \sigma_j \tanh \left( \frac{\beta}{\sqrt{N}} J_{ij} \right) \right)$$

- Nun ist

$$\mathbb{E}_\sigma \prod_{i < j} \left( 1 + \sigma_i \sigma_j \tanh \left( \frac{\beta}{\sqrt{N}} J_{ij} \right) \right) = \mathbb{E}_\sigma \sum_{\Gamma} w(\Gamma)$$

- Hierbei sind  $\Gamma$  Graphen auf der Knotenmenge  $\{1, \dots, N\}$  und

$$w(\Gamma) = \prod_{e \in \Gamma} \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_{2n-1}} \sigma_{i_{2n}} \tanh \left( \frac{\beta}{\sqrt{N}} J_e \right)$$

( $e$  die [Kanten](#) und  $i_1 \dots i_{2n}$  die [nicht-notwendig verschiedenen Knoten](#) von  $\Gamma$ )

- Da  $\mathbb{E}_{\sigma_i^l}$  für  $l$  ungerade

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\sigma} \sum_{\Gamma} w(\Gamma) = \mathbb{E}_{\sigma} \sum_{\Gamma: \partial\Gamma = \emptyset} w(\Gamma)$$

wobei  $\partial\Gamma = \emptyset \Leftrightarrow$  alle Knoten kommen **gerade** häufig vor. Und in diesem Fall

$$w(\Gamma) = \prod_{e \in \Gamma} \tanh\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}} J_e\right)$$

- Jedes  $\Gamma$  mit  $\partial\Gamma = \emptyset$  lässt sich als

$$\Gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_s$$

$\gamma_i$  **Kreise, darstellen**, so dass

$$\sum_{\Gamma: \partial\Gamma = \emptyset} w(\Gamma) \hat{=} \prod_{\gamma \text{ Kreis}} (1 + w(\gamma)) \approx \exp\left(\sum_{\gamma \text{ Kreis}} w(\gamma)\right)$$

- der log hebt die exp-Funktion weg, so dass wir

$$\sum_{\gamma} w(\gamma)$$

untersuchen müssen.

- Dieser Term konvergiert **in Verteilung** gegen eine **Normalverteilung**
- Dies zeigt man mittels **Abschneiden** mit einer **Momentenmethode**
- z.B.:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left(\sum_{\gamma} w(\gamma)\right) &\approx \mathbb{V}\left(\sum_{k=3}^M \sum_{|\gamma|=k} w(\gamma)\right) \\ &= \sum_{k=3}^M \sum_{|\gamma|=k} \mathbb{E}w^2(\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \sum_{k=3}^M \sum_{|\gamma|=k} \frac{\beta^{2k}}{N^k} \\ &= \sum_{k=3}^M \binom{N}{k} \frac{k!}{2k} \frac{\beta^{2k}}{n^k} \\ &\approx \sum_{k \geq 3} \frac{\beta^{2k}}{2k} \end{aligned}$$

- Dieser Term ist verantwortlich für den **log-Term** in der Varianz.
- Schließlich überlegt man sich, dass die cosh- und tanh-Terme **asymptotisch unabhängig** sind.

□



# Kapitel 6

## Das Hopfield-Modell

Als neuronales Netz

- Wie viel **Information** lässt sich im Hopfield-Modell **speichern**?
- Was bedeutet **speichern**?
- **Muster** sind „nahezu“ **Minima** der **Energiefunktion**
- Verwende eine **lokale** Dynamik, zum Auffinden der Minima:  
Drehe den  $i$ 'ten Spin  $\sigma_i$  so, dass **sich die Energiefunktion verringert**.
- Formal:

– Sei

$$h_i(\sigma) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^M \xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j$$

das **lokale Feld** in  $\sigma$  und  $i$ .

– Die **Glauber-Dynamik**

$$\mathbb{P}(\sigma_i = \pm 1) = \frac{e^{\pm\beta\sigma_i h_i}}{e^{\beta\sigma_i h_i} + e^{-\beta\sigma_i h_i}}$$

liefert das **Gibbs-Maß**

$$\mu_{N,\beta}(\sigma) = \frac{\exp\left(\frac{\beta}{N} \sum_{i,j} \sum_{\mu} \sigma_i \sigma_j \xi_i^\mu \xi_j^\mu\right)}{Z_{N,\beta}}$$

invariant.

- Lässt man  $\beta \rightarrow \infty$ , so konzentriert sich  $\mu_{N,\beta}$  in den **Minima** von  $H$ .
- entsprechend wird die **Glauber-Dynamik** zu einer **Gradienten Abstiegsdynamik**.
- Genauer, sei (ist)

$$T_i(\sigma) = \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^N \sum_{\mu=1}^M \xi_i^\mu x_j^\mu \sigma_j \right)$$

- $\xi^\mu$  ist „gespeichert“, wenn  $\tilde{\xi}^\mu$  mit  $d_H(\xi^\mu, \tilde{\xi}^\mu) \leq cN$ ,  $c < \frac{1}{2}$  unter  $T = (T_i)_i$  gegen  $\xi^\mu$  konvergiert.
- **Mindestanforderung:**  $\xi^\mu$  ist **stabil** unter  $T$ . D.h.

$$T_i(\xi^\mu) = \xi_i^\mu \quad \forall i = 1, \dots, N$$

**Satz 1** Es sei  $M = c \frac{N}{\log N}$

A) Ist  $c < \frac{1}{2}$ , so gilt für **jedes feste**  $\mu$

$$\mathbb{P}(T_i(\xi^\mu) = \xi_i^\mu \quad \forall i) \longrightarrow 1,$$

wenn  $N \rightarrow \infty$ .

B) Ist  $c \leq \frac{1}{4}$ , so gilt

$$\mathbb{P}(T_i(\xi^\mu) = \xi_i^\mu \quad \forall i \quad \forall \mu) \longrightarrow 1,$$

wenn  $N \rightarrow \infty$ .

C) Ist  $c < \frac{1}{6}$ , so gilt

$$\mathbb{P}(\liminf T_i(\xi^\mu) = \xi_i^\mu \quad \forall \mu) = 1.$$

*Beweis:* Der Beweis beruht auf der **exponentiellen Chebyshev-Ungleichung**.

- OBdA betrachten wir zunächst die Stabilität von  $\xi^1$
- OBdA ist  $\xi_i^1 = 1 \forall i = 1, \dots, N$  (sonst „drehen“ wir alles entsprechend)
- Nun ist

$$\begin{aligned} T_i(\xi') &= \xi'_i \\ \Leftrightarrow \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^N \sum_{\mu=1}^M \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^1 \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N \sum_{\mu=1}^M \xi_i^\mu \xi_j^\mu &\stackrel{(\text{=})}{\geq} 0 \end{aligned}$$

- Dies ist „tendenziell wahr“, denn für  $\mu = 1$  ist

$$\sum_{j=1}^N \xi_i^1 \xi_j^1 = N$$

- Also

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [T_i(\xi^1) \neq \xi_i^1] &= \mathbb{P} \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{\mu=2}^M \xi_i^\mu \xi_j^\mu \leq -N \right] \\ &\stackrel{t \geq 0}{\leq} e^{-tN} \mathbb{E} e^{t \sum_j \sum_{\mu \geq 2} \xi_i^\mu \xi_j^\mu} \\ &= e^{-tN} \mathbb{E} \left( e^{t \xi_i^\mu \xi_j^\mu} \right)^{NM} \end{aligned}$$

da die  $(\xi_i^\mu \xi_j^\mu)_{j,\mu}$  **unabhängig** sind (überlegen).

- Da

$$\begin{aligned} - \mathbb{E} e^{t \xi_i^\mu \xi_j^\mu} &= \cosh(t) \\ - \cosh(t) &\leq e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

folgt:

$$\mathbb{P} [T_i(\xi^1) \neq \xi_i^1] \leq e^{-tN} \cosh t^{NM} \leq e^{-tN} e^{\frac{t^2}{2} NM}$$

- **Optimieren** in  $t \Rightarrow t = \frac{1}{M}$

•

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{P} [\exists i : T_i(\xi^1) \neq \xi_i^1] &\leq N \mathbb{P} [T_i(\xi^1) \neq \xi_i^1] \\ &\leq N e^{-tN + \frac{t^2}{2} NM} \underset{t=\frac{1}{M}}{=} N e^{-\frac{1}{2} \frac{N}{M}} \end{aligned}$$

•  $M = c \frac{N}{\log N}$ :

$$\Rightarrow \mathbb{P} [\exists i : T_i(\xi^1) \neq \xi_i^1] \leq N^{1-\frac{1}{2c}} \xrightarrow{c < \frac{1}{2}} 0. \quad \Rightarrow \text{A)}$$

• Ebenso:

$$\mathbb{P} [\exists \mu \exists i : T_i(\xi^\mu) \neq \xi_i^\mu] \leq N M e^{-\frac{1}{2} \frac{N}{M}}$$

• Dies konvergiert für  $M = c \frac{N}{\log N}$  und  $c \leq \frac{1}{4}$  gegen 0.  $\Rightarrow \text{B)}$ • Schließlich ist für  $M = c \frac{N}{\log N}$ 

$$N M e^{-\frac{1}{2} \frac{N}{M}} \leq c N^{2-\frac{1}{2c}}$$

• Für  $c < \frac{1}{6}$  ist dies  $\leq N^{-k}$  für ein  $k > 1$ .• Die Behauptung folgt mittels **Borel-Cantelli**.  $\Rightarrow \text{C)}$ 

□

Nun ist das **reine Wiedererkennen gelernter Informationen** keine **assoziative Leistung**.

Was geschieht bei **gestörter Eingabe**?

**Satz 2** Für jedes  $\mu$  sei  $\tilde{\xi}^\mu \in S_{\nu N}(\xi^\mu)$ , wobei

$$S_{\nu N}(x) = \{y \in \{\pm 1\}^N : d(x, y) = \nu N\}$$

und  $d(\cdot, \cdot)$  der **Hanning-Abstand** ist und  $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ . Dann gilt: Ist

$$M = c(1 - 2\nu^2) \frac{N}{\log N}$$

und

A)  $c < \frac{1}{2}$ , so gilt für jedes  $\mu$

$$\mathbb{P} \left[ T_i(\tilde{\xi}^\mu) = \xi_i^\mu \quad \forall i = 1, \dots, N \right] \longrightarrow 1$$

mit  $N \rightarrow \infty$ .

B)  $c \leq \frac{1}{4}$ , so gilt

$$\mathbb{P} \left[ T_i(\tilde{\xi}^\mu) = \xi_i^\mu \quad \forall i \forall \mu \right] \longrightarrow 1$$

wenn  $N \rightarrow \infty$ .

C)  $c < \frac{1}{6}$ , so gilt

$$\mathbb{P} \left[ \underline{\lim} \left\{ T_i(\tilde{\xi}^\mu) = \xi_i^\mu \right\} \quad \forall i \forall \mu \right] = 1$$

**Bemerkung 1** Da mit  $\xi^\mu$  auch  $-\xi^\mu$  „gelernt“ wird, ist  $\nu N$  mit  $\nu < \frac{1}{2}$  die bestmögliche „Zerstörungsrate“, die man hoffen kann zu rekonstruieren.

*Beweis Skizze:* Sei  $\mu$  fest, OBdA

$$\xi_i^\mu = 1 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

und

$$d(\xi^\mu \tilde{\xi}^\mu) = \nu N.$$

Dann ist für jedes  $\lambda$

$$\begin{aligned} T_i(\tilde{\xi}^\mu) &= \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^N \sum_{\nu=1}^M \xi_i^\nu \xi_j^\nu \tilde{\xi}_j^\mu \right) \\ &= N(1 - 2\nu) + \sum_{j=1}^N \sum_{\nu \neq \mu} \xi_i^\nu \xi_j^\nu \end{aligned}$$

und der Rest folgt wie bekannt.  $\square$

**Bemerkung 2** Lässt man statt einem mehrere Schritte der Dynamik  $T$  zu, so erreicht man wieder die Schranken  $\frac{N}{2 \log N}$ ,  $\frac{N}{4 \log N}$  und  $\frac{N}{6 \log N}$  aus Satz 1. (ohne Beweis)

Ebenfalls ohne Beweis (da **etwas technisch**), gegen wir die **Optimalität der ersten Schranke** aus Satz 1.

**Satz 3** Gilt im **Hopfield-Modell** für  $M$

$$M = M(N) \geq c \frac{N}{\log N}$$

mit  $c > \frac{1}{2}$ , dann gilt für **jedes feste**  $\mu$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} [\forall i = 1, \dots, N, T_i(\xi^\mu) = \xi_i^\mu] = 0.$$

**Bemerkungen 3** • Bei  $M = \frac{N}{2 \log N}$  findet also eine **drastische Änderung des Speicherverhaltens** statt.

- Der Beweis benutzt **negative Assoziiertheit**.
- Die entsprechenden Resultate für **Teil B und C** von Satz 1 sind **bislang unbewiesen**.

**Computersimulationen** zeigen, dass auch für **größere Werte von**  $M$  die **Minima von**  $H$  nahe an den  $\xi^\mu$  sind.

**Satz 4** Es gibt ein  $\alpha_c \geq 0$ , so dass für

$$M \leq \alpha_c N$$

ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  existieren, so dass

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{\mu=1}^M h_N(\xi^\mu, \delta) > H_N(\xi^\mu) + \varepsilon N \right] \longrightarrow 1.$$

Hierbei ist

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \sum_{\mu=1}^M \sigma_i \sigma_j \xi_i^\mu \xi_j^\mu$$

die Energiefunktion des Hopfield Modells und

$$h_N(\sigma, \delta) = \min_{\sigma' \in S_{\delta N}(\sigma)} H_N(\sigma').$$

**Bemerkungen 4** • Der Satz besagt also, dass es eine **Energiebarriere** der Höhe  $\varepsilon n$  um jedes **Muster** gibt. Eine **Gradientenabstiegsdynamik** landet also „in der Nähe“ der gespeicherten Muster.

- Die theoretischen Werte von  $\alpha_c$ :

• $\alpha_c \geq 0.056$	NEWMAN
• $\alpha_c \geq 0.072$	LOUKIANOVA
• $\alpha_c \geq 0.08$	TALAGRAND
• $\alpha_c \geq 0.11$	TIROZZI

- Experimentell:

- $\alpha_c \approx 0.138$

Jenseits von  $\alpha_c = 0.138$  bricht das **Speichern zusammen**. Dies ist aber mathematisch nur **sehr rudimentär** bewiesen.

**Satz 5** Für  $M = \alpha(N) \cdot N$  und  $\alpha(N) \rightarrow \infty$  gibt es **keine „tiefen“ Minima** von  $H$  im Abstand von  $\varepsilon N$ ,  $\varepsilon \leq 0.05$  um die Muster  $\xi^\mu$ .

**Bemerkung 5** Man sollte „mehr“ erwarten. Beispielsweise  $\alpha \equiv 1$  und  $\varepsilon = 0.5$ .

## 6.1 Thermodynamik des Hopfield-Modells

- Wieder kann man die „gequenchte“ **freie Energie**  $\lim \frac{1}{N} \log \mathbb{E}_J Z_{N,\beta}$  berechnen und sie mit der „annealten“ **freien Energie**  $\lim \frac{1}{N} \mathbb{E}_J \log Z_{N,\beta}$  **vergleichen**.
- Wir konzentrieren uns wieder auf das Studium des **Gibbs-Maßes**

- Erinnerung:

$$\begin{aligned} H_N(\sigma) &= -\frac{1}{\alpha N} \sum_{i,j=1}^N \sum_{\mu=1}^{M(N)} \sigma_i \sigma_j \xi_i^\mu \xi_j^\mu \\ &= -\frac{N}{2} \|m_N(\sigma)\|_2^2 \end{aligned}$$

mit

$$m_N(\sigma) = (m_N^\mu(\sigma))_{\mu=1}^M = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \xi_i^\mu \right)_\mu$$

overlap- oder Überlapp-Vektor

$$H_{N,h}(\sigma) = H_N(\sigma) - h \sum_{i=1}^N \sigma_i \xi_i^1$$

$h > 0$ : Stärke des Magnetfeldes in Richtung  $\xi^1$ .

- 

$$\mu_{N,\beta}(\sigma) = \frac{\exp(-\beta H_{N,\beta}(\sigma))}{Z_{n,\beta}}$$

Gibbs-Maß

- 

$$\mu_{N,\beta,h}(\sigma) = \frac{\exp(-\beta H_{N,\beta,h}(\sigma))}{Z_{n,\beta,h}}$$

Gibbs-Maß mit äußerem Magnetfeld

- Idee: Für  $M = 1$ :

Hopfield Modell  $\hat{=}$  Curie-Weiß Modell

$\Rightarrow$  Für  $M$  „klein“ sollten die Ergebnisse in beiden Modellen ähnlich sein.

- Wichtig: Verteilung des Overlap unter  $\mu_{N,\beta}$  bzw.  $\mu_{N,\beta,h}$ .

- 

$$\nu_{N,\beta} := \mu_{N,\beta} \circ m_n^{-1}$$

$$\nu_{N,\beta,h} := \mu_{N,\beta,h} \circ m_n^{-1}$$

**Satz 6** Sei  $M = M(N)$ , so dass

$$\frac{M(N)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

- Dann gilt für  $k > 0$  und  $\mathbb{P}$ -f.s. in  $\xi$

$$\lim_{h \downarrow 0} \nu_{N,\beta,h} \Rightarrow \delta_{m^*(\beta)e_1},$$

wobei  $e_1$  den 1. Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^M$  bezeichnet und  $m^*$  die *größte Lösung der Curie-Weiß Gleichung*

$$m = \tanh(\beta m)$$

- Des weiteren: Für  $\mathbb{P}$ -f.a.  $\xi$

$$\begin{aligned} - \nu_{N,\beta} &\Rightarrow \delta_0 \quad \beta \leq 1 \\ - d \left( \nu_{N,\beta}, \frac{1}{2M} \sum_{\mu} \delta_{\pm m^*(\beta)e_{\mu}} \right) &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

für eine Metrik  $d$ , die die *schwache Topologie metrisiert*.

- *Phasenübergang* bei  $\beta = 1$
- Sieht man dies auch an den *Fluktuationen des Overlap-Parameters?*

**Satz 7** Für  $M(N)$  mit

$$\frac{M(N)}{N} \longrightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

gilt für  $\mathbb{P}$ -f.a.  $\xi$  und jedes  $\overline{M}$  fest:

$$\mu_{N,\beta} \circ (\pi_{\overline{M}}(M_N(\sigma)))^{-1} \Rightarrow \mathcal{N}_{\overline{M}}(0, \Sigma).$$

Hierbei ist

$$\pi_{\overline{M}} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{\overline{M}}$$

die *Projektion* auf den  $\mathbb{R}^{\overline{M}}$  und

$$\Sigma = \frac{1}{1-\beta} E_{\overline{M}}.$$

**Auch hier:** Was geschieht in der *kritischen Temperatur*?

- Bei  $\beta = 1$  *drastische Verhaltensänderung*, sogar für festes  $M > 1$ .

**Satz 8** Sei  $M > 2$  *fest*, betrachte das *zufällige Gibbs-Maß*  $\nu_{N,\beta}$ . Dann gilt

$$\mathbb{P} \circ \nu_{N,\beta}^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P} \circ Q_\eta^{-1}$$

Hierbei ist  $Q_\eta$  ein *zufälliges Maß* auf  $\mathbb{R}^M$  mit *zufälliger Dichte*

$$\frac{\exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\mu \neq \nu} \eta_{\mu,\nu} + x_\mu x_\nu - \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} x_\mu^2 x_\nu^2 - \frac{1}{12} \sum_\mu x_\mu^4\right)}{\Gamma}$$

mit

$$\Gamma = \int_{\mathbb{R}^M} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\mu \neq \nu} \eta_{\mu,\nu} x_\mu x_\nu - \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} x_\mu^2 x_\nu^2 - \frac{1}{12} \sum_\mu x_\mu^4\right)$$

mit *symmetrischen*  $\eta_{\mu,\nu} = \eta_{\nu,\mu}$ , die ansonsten *iid*  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt sind.

**Bemerkungen 6** • *Phasenübergang* bei  $\beta = 1$  auch bei den *Fluktuationen* sichtbar

- *Zufälligkeit* des Maßes wird auch *im Limes* sichtbar bei  $\beta = 1$
- Ein analoges Resultat gilt auch für *wachsendes*  $M = M(N)$  mit

$$M(N) \ll N^{1/3}$$

- Interessant wäre eine *Thermodynamik der Spinglasphase*

$$M = \alpha N, \quad \alpha \text{ „groß“}$$

- Diese fehlen bisher [ganz](#).