Analysis III

Peter Eichelsbacher

Vorwort

Im vorliegendem Skriptum zur Analysis III holen wir zunächst den Satz über implizite Funktionen nach, der die Differentialrechnung mehrerer Variabler aus dem zweiten Semester abrundet.

In den Kapiteln 27–29 führen wir in die wesentlichen Elemente der *Maßtheorie* ein. Dies ist die Theorie des Messens von Inhalten von Strecken, Flächen, Körpern und Mengen in höherdimensionalen Räumen.

In den Kapiteln 30–36 behandeln wir die *Integrationstheorie*. Wir studieren Integrale über allgemeinen Maßräumen, später die speziellen Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals im $\mathbb{R}^n$.

Abschließend führen wir in die Analysis auf *Untermannigfaltigkeiten* ein. Als mathematische Modelle treten oft Mengen auf, die nicht global durch reelle Koordinaten zu beschreiben sind, aber lokal (gekrümmte Flächen, Oberflächen, ...). Wir erklären die Differential- und Integralrechnung auf solchen lokalen Euklidischen Räumen.

Inhaltsverzeichnis

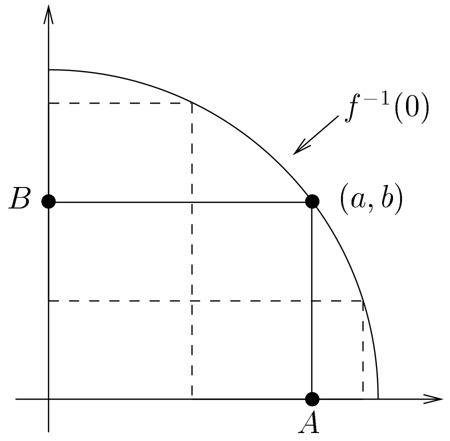
KAPITEL 26

Implizite Funktionen und Anwendungen

Im letzten Kapitel konnten wir als Anwendung des Satzes über die Umkehrabbildung im Falle endlicher Dimension lokal die Lösbarkeit *nichtlinearer* Gleichungssysteme untersuchen. Da der Beweis des Satzes über die Umkehrabbildung konstruktiv ist (wir haben den Banachschen Fixpunktsatz verwendet), kann man Lösungen näherungsweise bestimmen. Allerdings waren wir auf die Situation beschränkt, dass die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Variablen übereinstimmen muß.

Wir untersuchen in diesem Kapitel nichtlineare Gleichungssysteme, bei denen mehr Variablen als Gleichungen vorhanden sind. Das zentrale Resultat ist der *Satz über implizite Funktionen*, den wir wie den Satz über die Umkehrabbildung gleich in einer Banachraumversion formulieren und beweisen. Neben den Gleichungssystemen betrachten wir als Anwendung die Bestimmung von Extrema mit Nebenbedingungen. Wir leiten die Lagrangesche Multiplikatorenregel her und betrachten als Beispiel unter anderen die Hauptachsentransformation.

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Es sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq \pm 1$, $b > 0$ und $f(a, b) = 0$. Dann gibt es offene Intervalle A und B mit $a \in A, b \in B$, so dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $f(x, y) = 0$. Die Zuordnung $x \mapsto y$ definiert eine Abbildung $g : A \to B$ mit $f(x, g(x)) = 0$ für $x \in A$. Es ist $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Man sagt, g wird in der Nähe von (a, b) durch f *implizit* definiert. Mit anderen Worten: g löst die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y (als Funktion von x) in der Nähe von (a, b). Dies geht in der Umgebung von $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ nicht. Beobachte dazu: es ist $\partial_2 f(a, b) = 0$ für $a = \pm 1$, während $\partial_2 f(a, b) = 2b \neq 0$ für $a \neq \pm 1$.



Das Auflösen von Gleichungen $f(x,y) = 0$ tritt in vielen Anwendungen auf. Wir nennen hier stellvertretend das Problem der funktionalen Beschreibung von Isobaren: Man betrachte ein Teilstück S der Erdoberfläche, aufgefasst als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gebe den herrschenden Luftdruck im Punkt $(x,y) \in S$ an. Für Wettervorhersagen ist es von Bedeutung, Punkte desselben Luftdrucks c zu kennen, also Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die gilt: $f(x,y) = c$. Wie bei Höhenlinien auf Wanderkarten werden sich diese Punkte in der Regel zu Kurven zusammenschließen, die Isobaren heißen. Nun fragt man, ob man die Isobaren lokal als Schaubilder reeller Funktionen auffassen kann. Man sucht also eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass lokal gilt: $f(x, g(x)) = c$.

Wir betrachten eine sehr allgemeine Formulierung des Satzes über implizite Funktionen.

Es seien E_1, E_2 und F Banachräume, $q \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $X_j \subset E_j$ seien offen für $j = 1,2$ und $f : X_1 \times X_2 \to F$ sei in (a,b) differenzierbar. Dann ist auch $f(\cdot, b) : X_1 \to F$ bzw. $f(a, \cdot) : X_2 \to F$ in a bzw. b differenzierbar. Wir schreiben $D_1 f(a,b)$ bzw. $D_2 f(a,b)$ für die Ableitung von $f(\cdot, b)$ in a, bzw. von $f(a, \cdot)$ in b. Diese Notation soll Verwechselungen mit den partiellen Ableitungen vermeiden.

Es gilt $D_j f : X_1 \times X_2 \to \mathcal{L}(E_j, F)$ für $j = 1,2$. Ist $f \in C^q(X_1 \times X_2, F)$, so ist $D_j f \in C^{q-1}(X_1 \times X_2, \mathcal{L}(E_j, F))$ für $j = 1,2$ (ist klar), und es gilt

$$\partial f(a,b)(h,k) = D_1 f(a,b)h + D_2 f(a,b)k \qquad (*)$$

für $(a,b) \in X_1 \times X_2$ und $(h,k) \in E_1 \times E_2$. Diese Identität folgt wie in Satz 22.12. Es gilt sogar die Umkehrung: ist $D_j f \in C^{q-1}(X_1 \times X_2, \mathcal{L}(E_j, F))$ für $j = 1,2$, so folgt $f \in C^q(X_1 \times X_2, F)$. Dies beweisen wir hier nicht.

Nach diesen Vorbereitungen formulieren wir nun die Banachraumversion des Satzes über implizite Funktionen:

Satz 26.1 *(über implizite Funktionen) Es seien $W \subset E_1 \times E_2$ offen, $f \in C^q(W, F)$, $(x_0, y_0) \in W$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $D_2 f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}\mathrm{is}(E_2, F)$ (topologischer Isomorphismus). Dann gibt es offene Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x_0, y_0)$ und $V \in \mathcal{U}(x_0)$ sowie ein eindeutig bestimmtes $g \in C^q(V, E_2)$ mit:*

$$(x,y) \in U \ \text{ und } \ f(x,y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in V \ \text{ und } \ y = g(x)\ .$$

Es gilt $\partial g(x) = -\Big[D_2 f(x, g(x))\Big]^{-1} D_1 f(x, g(x))$ für $x \in V$.

Zur Erinnerung: $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ bezeichnet die Menge aller Umgebungen des Punktes (x_0, y_0) in $E_1 \times E_2$ (hier brauchen wir nur die Umgebungen im Definitionsbereich W), analog bezeichnet $\mathcal{U}(x_0)$ die Menge aller Umgebungen um x_0 in E_1.

Der Beweis ist quasi eine Anwendungen des Satzes über die Umkehrabbildung:

Beweis: 1. Schritt: Wie im Beweis des Satzes über die Umkehrabbildung beginnen wir mit einem Reduktionsschritt. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Fall $F = E_2$ und $D_2 f(x_0, y_0) = I_{E_2}$ betrachten: Dazu betrachte $A := D_2 f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}\mathrm{is}(E_2, F)$ und $\tilde{f} := A^{-1} f \in C^q(W, E_2)$. Dann ist $\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$

und $D_2\tilde{f}(x_0,y_0) = I_{E_2}$ nach der Kettenregel. Wir zeigen daher den Satz für $\tilde{f}$ und können dann durch Anwendung der Abbildung A auf den allgemeinen Fall schliessen. Weiter sei $W = W_1 \times W_2$ mit $W_1 \in \mathcal{U}(x_0)$ und $W_2 \in \mathcal{U}(y_0)$. Dies können wir ebenfalls ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, da in jedem offenen W eine offene Menge dieser Form enthalten ist.

2. Schritt: Sei $\varphi : W_1 \times W_2 \to E_1 \times E_2$ gegeben durch $(x,y) \mapsto (x, f(x,y))$.

Es gilt $\varphi \in C^q(W_1 \times W_2, E_1 \times E_2)$ mit

$$\partial\varphi(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} I_{E_1} & 0 \\ D_1 f(x_0,y_0) & I_{E_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2)\ .$$

Dabei verwenden wir auch im Banachraum diese Matrixschreibweise. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} I_{E_1} & 0 \\ -D_1 f(x_0,y_0) & I_{E_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2)$$

ist die Inverse von $\partial\varphi(x_0,y_0)$. Also ist $\partial\varphi(x_0,y_0) \in \mathcal{L}\mathrm{aut}(E_1 \times E_2)$ mit $\varphi(x_0,y_0) = (x_0,0)$. Also liefert Satz 25.7 (Satz über die Umkehrabbildung): es gibt ein $U \in \mathcal{U}(x_0,y_0)$ und $X \in \mathcal{U}(x_0,0)$ mit $\varphi|_U \in \mathrm{Diff}^q(U,X)$.

3. Schritt: Wir setzen $\psi := (\varphi|_U)^{-1} \in \mathrm{Diff}^q(X,U)$ und schreiben ψ in der Form

$$\psi(\xi,\eta) = (\psi_1(\xi,\eta), \psi_2(\xi,\eta)), \quad (\xi,\eta) \in X.$$

Es gilt $\psi_j \in C^q(X, E_j)$, $j = 1,2$, und

$$(\xi,\eta) = \varphi(\psi(\xi,\eta)) = (\psi_1(\xi,\eta), f(\psi_1(\xi,\eta), \psi_2(\xi,\eta)))$$

für $(\xi,\eta) \in X$. Also $\xi = \psi_1(\xi,\eta)$ und $\eta = f(\xi, \psi_2(\xi,\eta))$ für $(\xi,\eta) \in X$. $V := \{x \in E_1,\ (x,0) \in X\}$ ist eine offene Umgebung von x_0 in E_1. Setze $g(x) := \psi_2(x,0)$ mit $x \in V$, dann ist $g \in C^q(V, E_2)$ und

$$\begin{aligned} (x, f(x,g(x))) &= (\psi_1(x,0), f(\psi_1(x,0), \psi_2(x,0))) \\ &= \varphi(\psi_1(x,0), \psi_2(x,0)) = \varphi \circ \psi(x,0) = (x,0) \end{aligned}$$

für $x \in V$. Nun ist g eindeutig bestimmt und die erste Behauptung ist gezeigt.

4. Schritt: Wir setzen $h(x) := f(x,g(x))$, $x \in V$. Dann ist $h = 0$ und die Kettenregel und $(*)$ (auf Seite 2) ergeben $\partial h(x) = D_1 f(x,g(x)) I_{E_1} + D_2 f(x,g(x))\partial g(x) = 0$, $x \in V$. Mit $q \geq 1$ ist $D_2 f \in C^{q-1}(U, \mathcal{L}(E_2,E_2)) \subset C(U, \mathcal{L}(E_2,E_2))$. Nach 25.6 ist $\mathcal{L}\mathrm{aut}(E_2)$ offen in $\mathcal{L}(E_2,E_2)$. Somit ist $((D_2 f)^{-1}(\mathcal{L}\mathrm{aut}(E_2))) \cap U = \{(x,y) \in U : D_2 f(x,y) \in \mathcal{L}\mathrm{aut}(E_2)\}$ eine offene Umgebung von (x_0,y_0) in U. Durch Verkleinern von U können wir somit $D_2 f(x,y) \in \mathcal{L}\mathrm{aut}(E_2)$ für $(x,y) \in U$ annehmen. Daraus folgt abschließend die Rechenregel. □

Bemerkung 26.2 Der Satz besagt, dass in der Nähe von (x_0,y_0) die Faser $f^{-1}(0)$ der Graph einer C^q–Funktion ist.

Wir betrachten nun den Spezialfall $E_1 = \mathbb{R}^m$ und $E_2 = F = \mathbb{R}^n$. Dies führt zu der angekündigten lokalen Auflösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme in Abhängigkeit von Parametern.

Korollar 26.3 *Seien $W \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ offen, $f \in C^q(W, \mathbb{R}^n)$ und $(a,b) \in W$ mit $f(a,b) = 0$, also*

$$\begin{aligned} f^1(a^1, \dots, a^m, b^1, \dots, b^n) &= 0 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ f^n(a^1, \dots, a^m, b^1, \dots, b^n) &= 0 \end{aligned} .$$

Gilt dann $\det[\partial_{m+k} f^j(a,b)]_{1 \le j,k \le n} \neq 0$, so gibt es offene Umgebungen U von (a,b) in W und V von a in $\mathbb{R}^m$ und ein $g \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ mit

$$(x,y) \in U : \ f(x,y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in V \ \text{ und } \ y = g(x) .$$

Anders gesagt: das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) &= 0 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ f^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) &= 0 \end{aligned}$$

hat für jedes $(x^1, \dots, x^m) \in V$ genau eine Lösung $y^1 = g^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^n = g^n(x^1, \dots, x^m)$ in der Nähe von $b = (b^1, \dots, b^n)$.

Beweis: $D_2 f(x,y) \in \mathcal{L}\mathrm{aut}(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \det[\partial_{m+k} f^j(x,y)]_{1 \le j,k \le n} \neq 0$

Also mit 26.1 klar. □

Definition 26.4 Seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : X \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Ein $x \in X$ heißt *regulärer Punkt* von f, falls $\partial f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ surjektiv ist. Die Abbildung f heißt *regulär* oder *Submersion*, falls jeder Punkt in X regulär ist. Weiter heißt $y \in \mathbb{R}^n$ *regulärer Wert* von f, falls die Faser $f^{-1}(y)$ nur aus regulären Punkten besteht.

Bemerkungen 26.5 (a) Gilt $m < n$, so hat f keine regulären Punkte, da

$$\mathrm{Rang}(\partial f(x)) \le m ,$$

während Surjektivität aber $\mathrm{Rang}(\partial f(x)) = n$ bedeutet.

(b) Im Fall $n \le m$ ist $x \in X$ genau dann ein regulärer Punkt von f, wenn $\partial f(x)$ Rang n hat.

(c) Im Fall $n = 1$ ist x genau dann ein regulärer Punkt von f, wenn $\nabla f(x) \neq 0$ gilt.

(d) Es sei $x_0 \in X$ ein regulärer Punkt von f mit $f(x_0) = 0$. Dann gibt es n Variablen, so dass das Gleichungssystem $f^1(x^1, \dots, x^m) = 0, \dots, f^n(x^1, \dots, x^m) = 0$ in einer Umgebung von x_0 eindeutig nach diesen Variablen als Funktionen der übrigen $m-n$ Variablen aufgelöst werden kann. Mit $f \in C^q$ sind auch diese Lösungen in C^q.

Beweis zu (d): Nach (a) ist $m \ge n$. Eine geeignete Permutation der Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ (d.h. Anwendung einer orthogonalen Transformation im $\mathbb{R}^n$) liefert

$$\det[\partial_{m-n+k} f^j(x_0)]_{1 \le j,k \le n} \neq 0 .$$

Die Behauptung folgt aus Korollar 26.3. □

Wir wollen nun Extrema mit Nebenbedingungen bestimmen.

Satz 26.6 *(Lagrangesche Multiplikatorenregel)*
Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f, g^1, \ldots, g^n \in C^1(X, \mathbb{R})$ mit $n < m$. Sei x^* ein regulärer Punkt der Abbildung $g = (g^1, \ldots, g^n)$ mit $g(x^*) = 0$ und x^* sei ein lokales Extremum von $f|_M$ mit $M := g^{-1}(0)$ (Nebenbedingungen $g^1(x^*) = 0, \ldots, g^n(x^*) = 0$). Dann gibt es reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (Lagrangesche Multiplikatoren) derart, dass x^* ein kritischer Punkt der Lagrange–Funktion

$$f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, g^i \in C^1(X, \mathbb{R})$$

ist.

Bemerkung 26.7 Die Aufgabe, Extrema von f unter den Nebenbedingungen

$$g^1(x^*) = \cdots = g^n(x^*) = 0$$

zu bestimmen, wird auf das Problem, kritische Punkte von $f + \sum_{i=1}^n \lambda_i \, g^i$ zu suchen, zurückgeführt. Die kritischen Punkte und die Lagrangeschen Multiplikatoren werden durch Auflösen der $n+m$ Gleichungen $g^j(p) = 0$, $1 \le j \le n$, $\partial_k(f + \sum_{i=1}^n \lambda_i g^i)(p) = 0$, $1 \le k \le m$, nach den $m+n$ Unbekannten $p_1, \ldots, p_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bestimmt (mit $p = (p_1, \ldots, p_m)$). Anschließend untersucht man, welche der kritischen Punkte tatsächlich Extrema realisieren.

Beweis: Wir wenden zunächst 26.5 (d) an: $\partial g(x^*)$ besitzt genau n linear unabhängige Spaltenvektoren und dies seien ohne Einschränkung der Allgemeinheit die letzten n Spalten. Setze $l = m - n$ und $y^* = (x_1^*, \ldots, x_l^*) \in \mathbb{R}^l$. Dann gibt es (26.1 und 26.5 (d)) Umgebungen U von x^* in $\mathbb{R}^m$ und V von y^* in $\mathbb{R}^l$ und eine Funktion $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ mit $M \cap U = \{(y, \varphi(y));\, y \in V\}$. Definiere nun $\tilde{f} : V \subseteq \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(y) = f(y, \varphi(y)) = f(y_1, \ldots, y_l, \varphi^1(y), \ldots, \varphi^n(y)) \; .$$

Also ist $\tilde{f} \in C^1(V, \mathbb{R})$, $\tilde{f} = f|_{M \cap U}$ und y^* ist ein lokales Extremum von $\tilde{f}$. Also ist y^* kritischer Punkt von $\tilde{f}$, das heißt für $1 \le i \le l$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{f}(y^*) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(y^*, \varphi(y^*)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{l+j}} f(y^*, \varphi(y^*)) \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi^j(y^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x^*) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{l+j}} f(x^*) \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi^j(y^*) \; . \end{aligned}$$

Dabei haben wir beim zweiten Gleichheitszeichen die Kettenregel verwendet (23.3, 23.4). Setze $[\frac{\partial}{\partial x_{l+j}} g^i(x^*)]_{1 \le i,j \le n} =: A$. Mit Satz 26.1 folgt

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi^j(y^*) = [-A^{-1} D_1 g(x^*)]_{j,i} = -\sum_{k=1}^{n} [A^{-1}]_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_i} g^k(x^*)$$

mit $1 \leq i \leq l$ und $1 \leq j \leq n$. Insgesamt folgt somit für $1 \leq i \leq l$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x^*) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [A^{-1}]_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_{l+j}} f(x^*) \frac{\partial}{\partial x_i} g^k(x^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \big(f(x^*) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, g^k(x^*) \big) \end{aligned}$$

mit $\lambda_k := -\sum_{j=1}^n [A^{-1}]_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_{l+j}} f(x^*)$ für $1 \leq k \leq n$. Weiterhin gilt für $1 \leq p \leq n$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_{l+p}} \big(f(x^*) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, g^k(x^*) \big) \\ &\quad = \frac{\partial}{\partial x_{l+p}} f(x^*) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \frac{\partial}{\partial x_{l+p}} g^k(x^*) \\ &\quad = \frac{\partial}{\partial x_{l+p}} f(x^*) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A^{-1}]_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_{l+j}} f(x^*) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_{l+p}} g^k(x^*)}_{[A]_{k,p}} \\ &\quad = \frac{\partial}{\partial x_{l+p}} f(x^*) - \sum_{j=1}^{n} \delta_{jp} \frac{\partial}{\partial x_{l+j}} f(x^*) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Beispiele 26.8 (a) (Hauptachsentransformation)

Es sei $A \in \mathcal{L}_{\text{sym}}(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es reelle Zahlen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ und

$$x_1, \ldots, x_n \in S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

mit $Ax_k = \lambda_k x_k$ für $1 \leq k \leq n$. (Die $x_1, \ldots, x_n$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ und $[A] = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.) Es gilt

$$\lambda_k = \max\{\langle Ax, x\rangle, \ x \in S^{n-1} \cap E_k\} \ , \ k = 1, \ldots, n,$$

mit $E_1 = \mathbb{R}^n$ und $E_k = (\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\})^\perp$, $k = 2, \ldots, n$.

Beweis : (i) Sei $g(x) = |x|^2 - 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ und $f(x) := \langle Ax, x\rangle$ für $x \in \mathbb{R}^n$. 0 ist ein regulärer Wert von $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ($g^{-1}(0) = S^{n-1}$: Punkte auf S^{n-1} sind reguläre Punkte mit Wert 0), f nimmt auf S^{n-1} das Maximum an (S^{n-1} kompakt, f stetig). Sei $x_1 \in S^{n-1}$ eine Maximalstelle von $f|_{S^{n-1}}$. Mit Satz 26.6 existiert ein $\hat{\lambda}_1 \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x_1) = 2Ax_1 = -2\hat{\lambda}_1 x_1$. Setze $\lambda_1 = -\hat{\lambda}_1$, dann ist $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, also x_1 Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1. Es gilt

$$\lambda_1 = \lambda_1 \langle x_1, x_1\rangle = \langle Ax_1, x_1\rangle = f(x_1) \ ,$$

da $x_1 \in S^{n-1}$.

(ii) Die rekursive Konstruktion von $x_2, \dots, x_n$ führen wir in der Vorlesung nicht durch. Sie sei an dieser Stelle aber ausgeführt. Die symmetrische Abbildung A führt das orthogonale Komplement von x_1, d.h. die Menge $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x_1 \rangle = 0\}$, in sich über, da ja $\langle x_1, Ay \rangle = \langle Ax_1, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle$ gilt. Zur Bestimmung eines weiteren Eigenvektors ist nun ein Eigenwertproblem im $n-1$–dimensionalen Orthogonalraum von x_1 zu lösen. Die Konstruktion im Detail: sind $x_2, \dots, x_{k-1}$, $k \geq 2$, bereits gefunden, so setze $g := (g^0, g^1, \dots, g^{k-1})$ mit $g^0 = g$ aus Teil (i) und $g^j(x) := 2\langle x_j, x \rangle$ für $1 \leq j \leq k-1$. Dann ist $g^{-1}(0) = S^{n-1} \cap E_k$, also ist $g^{-1}(0)$ kompakt und es gibt ein $x_k \in S^{n-1} \cap E_k$ mit $f|_{S^{n-1}}(x) \leq f|_{S^{n-1}}(x_k)$ für $x \in S^{n-1} \cap E_k$. Außerdem gilt

$$\operatorname{Rang} \partial g(x) = \operatorname{Rang}[x, x_1, \dots, x_{k-1}] = k, \quad x \in S^{n-1} \cap E_k,$$

(dabei verwendet man $\operatorname{Rang} B = \operatorname{Rang} B^t$ für $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$). Also ist 0 ein regulärer Wert von g und mit Satz 26.6 findet man reelle Werte $\mu_0, \dots, \mu_{k-1}$ mit

$$2Ax_k = \nabla f(x_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j \nabla g^j(x_k) = 2\,\mu_0\, x_k + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j\, x_j. \quad (*)$$

Da $\langle x_k, x_j \rangle =$ für $1 \leq j \leq k-1$, folgt

$$\langle Ax_k, x_j \rangle = \langle x_k, Ax_j \rangle = \lambda_j \langle x_k, x_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq k-1,$$

nach der Voraussetzung, da die $x_1, \dots, x_{k-1}$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ schon gefunden sind. Mit $(*)$ folgt $0 = \langle Ax_k, x_j \rangle = \mu_j$ für $j = 1, \dots, k-1$, und ebenfalls aus $(*)$ folgt, dass x_k ein Eigenvektor von A zum Eigenwert μ_0 ist. Weiter gilt

$$\mu_0 = \mu_0 \langle x_k, x_k \rangle = \langle Ax_k, x_k \rangle = f|_{S^{n-1}}(x_k).$$

Somit ist alles bewiesen. □

Für die gefundene Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ folgt mit $x = \sum_{k=1}^n \eta^k\, x_k$ offenbar $\langle Ax, x \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k\, (\eta^k)^2$.

(b) Es sei $f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$ und $g(x,y,z) = x+y-z = 0$ die Nebenbedingung. Bestimme denjenigen Punkt auf der Ebene $z = x+y$, der von $(1,0,0)$ den kleinsten euklidischen Abstand hat (hier: Absolutquadrat). Da $\nabla g(x,y,z) = (1,1,-1)$, ist jeder Punkt regulär. Betrachte

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x+y-z)\ .$$

Partiell nach x, y, z differenzieren und gleich 0 setzen liefert die Gleichungen $2(x-1) + \lambda = 0$, $2y + \lambda = 0$, $2z - \lambda = 0$ und die Nebenbedingung $x + y - z = 0$. Wenn man die zweite und dritte Gleichung addiert, erhält man $2y + 2z = 0$, also $z = -y$ und somit durch die vierte Gleichung $y = -x/2$. Die zweite Gleichung ergibt $\lambda = x$, also $x = 2/3$. Somit ist $(2/3, -1/3, 1/3)$ ein kritischer Punkt. Tatsächlich ist es auch die Lösung.

(c) Bestimme Minima und Maxima der Funktion $f(x,y,z) = 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Es ist also $g(x,y,z) = \binom{x+y+z}{x^2+y^2+z^2-1} = 0$ und $\partial g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$. Betrachte

$$5x + y - 3z + \lambda_1(x+y+z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1)\ .$$

Dies führt zu den Gleichungen $5+\lambda_1+2\lambda_2 x=0$, $1+\lambda_1+2\lambda_2 y=0$, $-3+\lambda_1+2\lambda_2 z=0$, $x+y+z=0$ und $x^2+y^2+z^2-1=0$. Das Ergebnis lautet (nach Nebenrechnungen, Übung): $f(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})=4\sqrt{2}$ und $f(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$ sind das Maximum und das Minimum von f unter den Nebenbedingungen.

KAPITEL 27

σ-Algebren und Maße

Wir starten in diesem Kapitel mit der sogenannten *Maßtheorie*, der allgemeinen Theorie des Messens von Inhalten von Strecken, Flächen, Körpern und Mengen in höherdimensionalen Räumen. Mit Hilfe des Cauchy–Riemannschen Integrals haben wir Gebieten zwischen dem Graphen einer speziellen Klasse von Funktionen und der entsprechenden Achse einen Flächeninhalt zuweisen können. Man möchte einer möglichst großen Klasse von Bereichen, insbesondere des $\mathbb{R}^d$, in einer sinnvollen Art und Weise einen Inhalt zuordnen. Gesucht ist eine Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, so dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ der Wert $\mu(A)$ als Inhalt interpretiert werden kann. Gewünscht ist dabei natürlich, dass den bekannten elementargeometrischen Figuren der vertraute Inhalt zugeordnet wird und dass zum Beispiel der Inhalt der Vereinigung zweier disjunkter Bereiche gleich der Summe der Inhalte der einzelnen Bereiche sei. Man wünscht sich im $\mathbb{R}^d$ auch die Unabhängigkeit des Inhalts einer Menge von der Lage im Raum. Es wird sich später herausstellen, dass man ein "d-dimensionales Volumen" nicht für alle Teilmengen, sondern nur für eine bestimme Auswahl von Teilmengen definieren kann.

Wir führen zunächst diejenigen Mengensysteme ein, auf denen wir dann Inhalte bzw. Maße erklären werden. Es wirkt plausibel, dass man sich von einem geeigneten Mengensystem wünscht, dass es abgeschlossen ist gegenüber allen abzählbaren Mengenoperationen. Dabei heißt formal ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, Ω ist eine nichtleere Menge, abgeschlossen unter allen abzählbaren Mengenoperationen, wenn mit $A \in \mathcal{A}$ immer $A^c \in \mathcal{A}$ folgt und wenn für jede Folge $(A_n)_n$ in $\mathcal{A}$ auch $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ zu $\mathcal{A}$ gehört. Der Begriff ist dadurch gerechtfertigt, dass aufgrund der Regeln von de Morgan somit auch $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ zu $\mathcal{A}$ gehört.

Wir führen die Begriffe Inhalt, Prämaß und Maß ein und leiten Rechenregeln her, die für den weiteren Aufbau der Maßtheorie und der im Anschluß zu entwickelnden Integrationstheorie die Grundlage darstellen. Als wichtiges Beispiel führen wir das Lebesguesche Prämaß ein.

Definition 27.1 Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt eine *σ-Algebra* (in Ω), wenn gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$
(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
(iii) für jede Folge $(A_n)_n$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ liegt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in $\mathcal{A}$.

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt *Meßraum*.

Beispiele 27.2 (i) $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra.

(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $\Omega' \subset \Omega$, so ist $\Omega' \cap \mathcal{A} = \{\Omega' \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra in Ω' und heißt *Spur* oder Spur-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ in Ω'.
(iii) Es seien Ω und Ω' Mengen, $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra in Ω' und $T : \Omega \to \Omega'$ sei eine Abbildung von Ω nach Ω'. Dann ist $T^{-1}(\mathcal{A}') := \{T^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ eine σ-Algebra in Ω (die durch T induzierte). Dies ist eine einfache Übung.
(iv) Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Dann ist $\emptyset \in \mathcal{A}$ und für jede Folge $(A_n)_n$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ ist $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ in $\mathcal{A}$, denn: $\emptyset = \Omega^c$ und $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n^c\right)^c$. Weiter ist mit $A, B \in \mathcal{A}$ auch $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$, denn endliche Vereinigungen und Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{A}$ sind in $\mathcal{A}$.
(v) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein nichtleeres Mengensystem. Dann ist

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{A}\ \sigma-\text{Algebra}}} \mathcal{A}$$

eine σ-Algebra, die man die von $\mathcal{E}$ *erzeugte* σ-Algebra nennt. Dies ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. $\mathcal{E}$ heißt *Erzeuger* von $\sigma(\mathcal{E})$ (alles ist wohldefiniert, denn $\mathcal{P}(\Omega)$ ist immer eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ umfasst). Der Beweis ist einfach.
(vi) $\{A \subset \Omega, A$ oder A^c ist abzählbar$\}$ ist eine σ-Algebra.

Definition 27.3 Ein System $\mathcal{R}$ von Teilmengen von Ω heißt *Ring* (in Ω), wenn gilt

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$
(iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.
Gilt auch
(iv) $\Omega \in \mathcal{R}$,

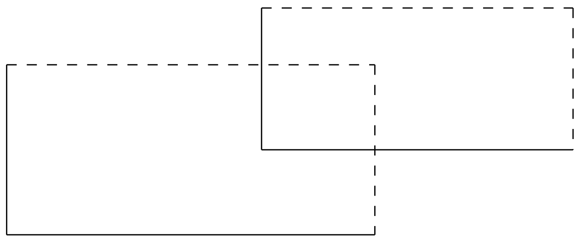
so heißt $\mathcal{R}$ eine *Algebra* (in Ω).

Bemerkungen 27.4 (i) Da $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, ist in einem Ring $\mathcal{R}$ mit $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \cap B \in \mathcal{R}$.
(ii) $\mathcal{R}$ ist genau dann eine Algebra, wenn (i) und (ii) aus 27.1 und (iii) aus 27.3 gelten. Denn ist $\mathcal{R}$ eine Algebra, so sind (i) 27.1 und (iii) 27.3 klar. Aus (ii) 27.3 folgt 27.1. Umgekehrt gilt $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$ sowie $\emptyset = \Omega^c$.
(iii) Es sei $\mathcal{R}$ eine Algebra und für jede disjunkte Folge $(A_n)_n$ in $\mathcal{R}$ gelte $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$. Dann ist $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra. Hierbei bedeutet disjunkte Folge, dass $A_j \cap A_k = \emptyset$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$ mit $j \neq k$ gilt. Der *Beweis* dazu: Es sei $(B_n)_n \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$. Setze $A_1 := B_1$ und $A_{j+1} := B_{j+1} \setminus \bigcup_{k=1}^j B_k, j \in \mathbb{N}$. Dann ist $(A_n)_n$ disjunkt und $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Nach Voraussetzung ist $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$. □

Beispiele 27.5 (i) σ-Algebren sind Algebren.
(ii) Der kleinste in Ω existierende Ring besteht nur aus der leeren Menge.
(iii) $\{A \subset \Omega, A$ oder A^c endlich $\}$ ist eine Algebra, und eine σ-Algebra genau dann, wenn Ω endlich ist.

Sei nun $\Omega = \mathbb{R}^d$, $a = (a_1, \dots a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d)$. Wir definieren $a \leq b$ bzw. $a < b$, wenn $a_i \leq b_i$ bzw. $a_i < b_i$ für alle $i = 1, \dots, d$ gilt. Betrachte das nach rechts halboffene Intervall $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R}^d \colon a \leq x < b\}$. Dies nennt man auch einen achsenparallelen, nach rechts hin offenen Quader oder auch ein *Parallelotop*. $\mathcal{R}^d$ bezeichne die Menge aller nach rechts halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{F}^d$ das System aller Vereinigungsmengen von je endlich vielen Mengen aus $\mathcal{R}^d$. Dieses System wird als das System der d-dimensionalen *Figuren* bezeichnet. Sicher gilt $\mathcal{R}^d \subset \mathcal{F}^d$. Es gilt weiter:

Lemma 27.6 *Mit $I, J \in \mathcal{R}^d$ gilt $I \cap J \in \mathcal{R}^d$ und $J \setminus I \in \mathcal{F}^d$. Jede Figur ist endliche Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle aus $\mathcal{R}^d$.*



Beweis: Es seien $I = [a, b[$ und $J = [a', b'[$. Wir setzen $e_i := \max(a_i, a'_i)$ und $f_i := \min(b_i, b'_i)$ für $i = 1, \dots, d$ sowie $e = (e_1, \dots, e_d)$ und $f = (f_1, \dots, f_d)$. Dann ist $I \cap J = [e, f[$ für $e \leq f$ und $I \cap J = \emptyset$ sonst, also $I \cap J \in \mathcal{R}^d$. Weiter gilt $J \setminus I = J \setminus (I \cap J)$. Daher zeigen wir den zweiten Teil die Behauptung für $I \subset J$ und $I \neq \emptyset$. Also ist ohne Einschränkung $a' \leq a < b \leq b'$. J_i sei eines der drei disjunkten Intervalle $[a'_i, a_i[, [a_i, b_i[$ oder $[b_i, b'_i[$, $i = 1, \dots, d$. J ist die Vereinigung der 3^d disjunkten Intervalle $J_1 \times \cdots \times J_d$, die sich bei Auswahl aller 3 Möglichkeiten für $J_1, \dots, J_d$ ergeben. Für $J_k = [a_k, b_k[$, $k = 1, \dots, d$, ergibt sich I, also ist $J \setminus I$ die disjunkte Vereinigung der übrigen $3^d - 1$ Intervalle der Form $J_1 \times \cdots \times J_d$. Es sei nun $F \in \mathcal{F}^d$. Dann existieren $I_1, \dots, I_k \in \mathcal{R}^d$ mit $F = I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Es ist $F = I_1 \cup (I_2 \setminus I_1) \cup (I_3 \setminus I_1 \cup I_2) \cup \cdots \cup I_k \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_{k-1})$, wobei dies nun eine disjunkte Vereinigung ist. Es ist zu zeigen: Mengen der Form $I \setminus (J_1 \cup \cdots \cup J_m)$ sind disjunkte Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{R}^d$. Es gilt $I \setminus (J_1 \cup \cdots \cup J_m) = \bigcap_{i=1}^m (I \setminus J_i)$. Nun kann $I \setminus J_i$ als disjunkte Vereinigungen endlich vieler Intervalle aus $\mathcal{R}^d$ dargestellt werden, s.o.. Wir verwenden abschließend die Distributivität und die Tatsache, dass der Durchschnitt von Intervallen aus $\mathcal{R}^d$ wieder in $\mathcal{R}^d$ liegt. Somit ist alles bewiesen. $\square$

Wir lernen nun einen für das Folgende sehr wichtigen Ring kennen.

Satz 27.7 *$\mathcal{F}^d$ ist ein Ring.*

Beweis: Zu zeigen ist: sind $F, G \in \mathcal{F}^d$, so ist $F \setminus G \in \mathcal{F}^d$. Dazu sei

$$F = \bigcup_{i=1}^m I'_i, \quad G = \bigcup_{j=1}^n I''_j.$$

Dann ist

$$F \setminus G = \bigcup_{i=1}^{m}\Big(\bigcap_{j=1}^{n}(I_i' \setminus I_j'')\Big).$$

Es ist zu zeigen: $\bigcap_{j=1}^{n} I_i' \setminus I_j''$ ist eine Figur. Nach 27.6 ist $I_i' \setminus I_j''$ eine Figur. Wir zeigen nun noch, dass der Durchschnitt zweier Figuren wieder eine Figur ist. Aber mit obiger Darstellung ist

$$F \cap G = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}(I_i' \cap I_j''),$$

und $I_i' \cap I_j'' \in \mathcal{R}^d$, also ist $F \cap G$ eine Figur. □

Bemerkung 27.8 Ist $\mathcal{R}$ ein Ring in $\mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{R}^d \subset \mathcal{R}$, so folgt $\mathcal{F}^d \subset \mathcal{R}$: $\mathcal{F}^d$ ist der von $\mathcal{R}^d$ erzeugte Ring. Dabei ist der *erzeugte Ring* wie in Beispiel 27.2 (v) definiert. Für jedes System $\mathcal{E}$ von Teilmengen einer Menge Ω existiert ein kleinster Ring $\varrho(\mathcal{E})$ in Ω welcher $\mathcal{E}$ enthält. Er heißt der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring.

Im folgenden seien Ω eine nichtleere Menge und $[0,\infty] := \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. Wir führen nun Maße ein.

Definition 27.9 (i) Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und μ eine Abbildung von $\mathcal{R}$ in $[0,\infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$. Gilt für jede disjunkte Folge $(A_n)_n$ in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$

$$\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n), \qquad \sigma-\textit{Additivität}, \qquad (*)$$

so heißt μ ein *Prämaß* (auf $\mathcal{R}$). Gilt $(*)$ für jedes endliche System $A_1,\ldots,A_n$ von paarweise disjunkten Teilmengen von $\mathcal{R}$, so heißt μ ein *Inhalt*.

(ii) Jedes auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω definierte Prämaß heißt *Maß* (auf $\mathcal{A}$). $\mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}$ wird (μ-)Maß der Menge A genannt. Gilt $\mu(\Omega) < \infty$, heißt das Maß μ endlich. $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ nennt man *Maßraum*. Gilt $\mu(\Omega) = 1$, so heißt μ *Wahrscheinlichkeitsmaß* und $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ *Wahrscheinlichkeitsraum* . Jedes $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt μ-*Nullmenge*. Die Menge aller μ-Nullmengen bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_\mu$.

Beispiele 27.10 (i) Sei $\omega \in \Omega$ und

$$\delta_\omega(A) := \begin{cases} 1\,, & \omega \in A \\ 0\,, & \omega \notin A \end{cases}$$

für $A \subset \Omega$. Dann ist $\delta_\omega : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das *Dirac-Maß* auf Ω.

(ii) Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ sei $|A|$ die Anzahl ihrer Elemente, falls A eine endliche Menge ist, $+\infty$ sonst. Wir setzen $\mu(A) := |A|$. Dies definiert ein Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$, das sogenannte *Zählmaß*. Es ist genau dann endlich, wenn Ω endlich ist.

(iii) Für $A \subset \Omega$ sei $\mu(A) = 0$ für $A = \emptyset$ und $\mu(A) = \infty$ sonst. Dann ist $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mu)$ ein Maßraum.

(iv) Betrachte $(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}^d)$ (siehe Lemma 27.6 und Satz 27.7). Es existiert genau ein Inhalt λ auf $\mathcal{F}^d$, so dass für jedes $I \in \mathcal{R}^d$ der Wert $\lambda(I)$ gleich dem d-dimensionalen Elementarinhalt von I ist. Dabei ist für $I = [a, b[$

$$\lambda(I) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d)$$

der zugehörige d-dimensionale *Elementarinhalt.*

Beweis zu (iv): Nach 27.6 ist jede Figur $F \in \mathcal{F}^d$ disjunkte endliche Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{R}^d : F = I_1 \cup \cdots \cup I_m$. Also folgt für jeden Inhalt λ auf $\mathcal{F}^d$ $\lambda(F) = \lambda(I_1) + \cdots + (I_m)$. Dies bedeutet, dass λ eindeutig durch seine Werte auf $\mathcal{R}^d$ festgelegt ist. Zu zeigen ist somit die *Existenz* von λ. Für $I \in \mathcal{R}^d$ setzen wir $\lambda(I) = d$-dimensionaler Elementarinhalt. λ ist auf $\mathcal{R}^d$ additiv, das heißt für $I_1, \ldots, I_m \in \mathcal{R}^d$, paarweise disjunkt, mit $I_1 \cup \cdots \cup I_m \in \mathcal{R}^d$ ist $\lambda(I_1 \cup \cdots \cup I_m) = \lambda(I_1) + \cdots + \lambda(I_m)$ (einfaches Argument). λ wird nun auf $\mathcal{F}^d$ dadurch ausgedehnt, dass jedes $F \in \mathcal{F}^d$ als disjunkte Vereinigung von $I_1, \ldots, I_m \in \mathcal{R}^d$ dargestellt werden kann (nicht eindeutig!) und man dann $\lambda(F) := \sum_{j=1}^m \lambda(I_j)$ setzt. Also bleibt zu zeigen: $\lambda(F)$ ist von der Wahl der Darstellung unabhängig. Dazu sei $F = J_1 \cup \cdots \cup J_m = I_1 \cup \cdots \cup I_\ell$ mit $J_1, \ldots, J_m, I_1, \ldots, I_\ell \in \mathcal{R}^d$. Dann ist

$$J_k = J_k \cap F = \bigcup_{i=1}^{\ell} (J_k \cap I_i),$$

wobei $J_k \cap I_i$ Intervalle sind. Somit ist $\lambda(J_k) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda(J_k \cap I_i)$ und analog $\lambda(I_i) = \sum_{k=1}^m \lambda(I_i \cap J_k)$, also

$$\sum_{k=1}^m \lambda(J_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\ell} \lambda(J_k \cap I_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=1}^m \lambda(I_i \cap J_k) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda(I_i)\,.$$

Also ist λ auf $\mathcal{F}^d$ endlich additiv und da $\emptyset \in \mathcal{R}^d$ und $\lambda(\emptyset) = 0$, ist λ ein Inhalt. $\square$

Tatsächlich handelt es sich bei λ im Beispiel 27.10 (iv) schon um ein Prämaß. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 27.11 *λ auf $\mathcal{F}^d$ ist ein Prämaß.*

Definition 27.12 Das auf dem Ring $\mathcal{F}^d$ der d-dimensionalen Figuren im $\mathbb{R}^d$ definierte Prämaß λ heißt *Lebesguesches Prämaß* im $\mathbb{R}^d$. Es wird mit λ^d bezeichnet. (H. Lebesgue 1875-1941).

Wir beweisen Satz 27.11 erst, nachdem wir Eigenschaften von Inhalten und Prämaßen kennengelernt haben:

Satz 27.13 *Sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$ und $A, B, (A_n)_n$ seien Mengen aus $\mathcal{R}$. Dann gilt:*

(i) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
(ii) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
(iii) $A \subset B,\ \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(iv) $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ *(sub-additiv)*
(v) *Für eine Folge* $(A_n)_n$ *paarweise fremder Mengen aus* $\mathcal{R}$ *mit* $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$ *gilt*
$\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$.

Beweis: Es gelten die Identitäten $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ und $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, also

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

und

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Die Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert (i), wenn $\mu(B \setminus A)$ endlich ist. Ist hingegen $\mu(B \setminus A) = +\infty$, folgt $\mu(A \cup B) = \mu(B) = +\infty$, also auch (i). Ist $A \subset B$, so folgt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ womit (ii) und (iii) gezeigt sind, da $\mu \geq 0$. Sei $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$, so sind $B_1, \ldots, B_n$ disjunkt Mengen aus $\mathcal{R}$, also

$$\mu(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i).$$

Da $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$ und $B_i \subset A_i$, folgt (iv). Ist $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$, so gilt $\mu(A_1) + \cdots + \mu(A_m) = \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \leq \mu(A)$, $m \in \mathbb{N}$ (da disjunkte Mengen), also folgt (v) mit $m \to \infty$. □

Korollar 27.14 *Ist* μ *ein Prämaß auf* $\mathcal{R}$, *so gilt für* $A_0, A_1, \ldots \in \mathcal{R}$ *Ist* $A_0 \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n$ *so folgt* $\mu(A_0) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

Beweis: Da $A_0 = \bigcup_{n\geq 1}(A_0 \cap A_n)$ und 27.13 (ii) gilt, ist ohne Einschräkung $A_0 = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Setze $B_1 = A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ und schließe wie in (iv), 27.13. □

Es gilt also $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$, falls $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{R}$. Dies nennt man die *$\sigma$-Subadditivität.*

Bezeichnung: Für Mengen $E, E_1, E_2, \ldots$ bezeichne $E_n \uparrow E$ bzw. $E_n \downarrow E$ den Sachverhalt, dass $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ bzw. $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$, $E = \bigcap_{n\geq 1} E_n$ gilt. Man spricht auch von *isotonen* und *antitonen* Folgen.

Satz 27.15 *Für einen Inhalt* μ *auf einem Ring* $\mathcal{R}$ *betrachte*

(i) μ *ist ein Prämaß.*
(ii) *Für jede Folge* $(A_n)_n$ *von Mengen aus* $\mathcal{R}$ *mit* $A_n \uparrow A$ *und* $A \in \mathcal{R}$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
(iii) *Für jede Folge* $(A_n)_n$ *von Mengen aus* $\mathcal{R}$ *mit* $A_n \downarrow A$, $A \in \mathcal{R}$, *und* $\mu(A_n) < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
(iv) *Für jede Folge* $(A_n)_n$ *von Mengen aus* $\mathcal{R}$ *mit* $A_n \downarrow \emptyset$ *und* $\mu(A_n) < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Dann gilt:

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)\,.$$

Ist μ auf $\mathcal{R}$ endlich, gilt also $\mu(A) < +\infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$, so sind (i) - (iv) äquivalent. (Bezeichnungen: (iii) nennt man Stetigkeit von oben, (ii) entsprechend Stetigkeit von unten).

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Es sei $A_0 := \emptyset$ und $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(B_n)_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{R}$ und $A = \bigcup_{n\geq 1} B_n$ und $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Damit ist $\mu(A) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$, da μ σ-additiv ist.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $(A_n)_n$ eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{R}$ mit $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{R}$. Mit $B_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ist $B_n \uparrow A$, also $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ und $\mu(B_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$, also $\mu(A) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$, also ist μ ein Prämaß.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Aus $A_n \downarrow A$ folgt $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$ (alle Mengen liegen in $\mathcal{R}$). Also ist $\mu(A_1 \setminus A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ nach 27.13 (iii): da $A \subset A_n$, folgt $\mu(A) < \infty$ und daher $\mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$. Also folgt (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$ ist klar

$(iv) \Rightarrow (iii)$: Aus $A_n \downarrow A$ folgt $A_n \setminus A \downarrow \emptyset$. Da $A_n \setminus A \subset A_n$, ist $\mu(A_n \setminus A)$ endlich und somit $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus A) = 0$. Da $\mu(A) \leq \mu(A_n) < +\infty$, folgt mit $\mu(A_n \setminus A) = \mu(A_n) - \mu(A)$ die Behauptung.

Sei nun μ endlich. In diesem Fall zeigen wir $(iv) \Rightarrow (ii)$: Es sei $(A_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{R}$ mit $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$, dann ist $A \setminus A_n \downarrow \emptyset$, also $0 = \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\mu(A) - \mu(A_n)\big)$, da μ endlich. □

Beweis von Satz 27.11: Da λ auf $\mathcal{F}^d$ endlich ist, zeigen wir (iv) in Satz 27.15. Es sei $(F_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{F}^d$ mit $F_n \downarrow \emptyset$. Dann ist zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = 0$. Angenommen $\lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda(F_n) =: \delta > 0$. Jedes F_n ist endliche Vereinigung disjunkter Intervalle. Dann existiert ein $G_n \in \mathcal{F}^d$ mit $\bar{G}_n \subset F_n$ und

$$\lambda(F_n) - \lambda(G_n) \leq \frac{\delta}{2^n}\,.$$

Es sei $H_n := G_1 \cap \cdots \cap G_n$. Dann ist $(H_n)_n$ eine Folge aus $\mathcal{F}^d$ mit $H_n \supset H_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, und $\bar{H}_n \subset \bar{G}_n \subset F_n$. Da F_n beschränkt ist, ist $\bar{H}_n$ kompakt (siehe Satz 8.32) und $F_n \supset \bar{H}_n \supset \bar{H}_{n+1}$, also $\bigcap_{n=1}^\infty \bar{H}_n \neq \emptyset$, falls $H_n \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (dies ist eine Aussage über kompakte Mengen, die wir als Übung lassen). Dann wäre aber $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$, im Widerspruch zur Annahme. Es bleibt also noch zu zeigen: für $n \in \mathbb{N}$ ist $H_n \neq \emptyset$. Dazu zeigen wir

$$\lambda(H_n) \geq \lambda(F_n) - \delta(1 - 2^{-n}) \qquad (*).$$

Dies genügt, denn mit $(*)$ ist $\lambda(H_n) \geq \delta - \delta(1 - 2^{-n}) = \delta/2^n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen $(*)$ via Induktion: Der Fall $n = 1$ folgt so: $H_1 = G_1$ und $\lambda(F_1) - \lambda(G_1) \leq 2^{-1}\delta$ nach Konstruktion. Nun folgt der Induktionsschritt $n \to n+1$: $H_{n+1} = G_{n+1} \cap H_n$, also $\lambda(H_{n+1}) = \lambda(G_{n+1}) + \lambda(H_n) - \lambda(G_{n+1} \cup H_n)$ (wir verwenden 27.13 (i)). Nach der Induktionsannahme für $\lambda(H_n)$ und der Wahl von G_{n+1} folgt $\lambda(H_{n+1}) \geq \lambda(F_{n+1}) - 2^{-n-1}\delta + \lambda(F_n) - \delta(1 - 2^{-n}) - \lambda(F_n) = \lambda(F_{n+1}) - \delta(1 - 2^{-n-1})$, da $G_{n+1} \cup H_n \subset F_{n+1} \cup F_n = F_n$. Somit ist alles gezeigt. □

KAPITEL 28

Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen

In diesem Kapitel wollen wir das Lebesguesche Prämaß λ^d fortsetzen zu einem Maß, welches auf der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F}^d)$ definiert ist. Wir konstruieren dazu zuerst sogenannte äußere Maße, die auf allen Teilmengen einer gegebenen Menge definiert sind, und einige, aber nicht alle Eigenschaften eines Maßes besitzen. Anschließend schränken wir das äußere Maß auf geeignete Teilmengen der Potenzmenge ein. Eine auf Carathéodory zurückgehende geschickte Auswahl dieser Teilmengen liefert dann einen geeigneten Maßraum. Genauer werden wir ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ betrachten und es zu einem äußeren Maß μ^* ausdehnen. Dann liefert μ^* eingeschränkt auf die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra ein Maß, welches auf $\mathcal{R}$ mit dem Prämaß μ übereinstimmt. Wir klären weiter die Frage nach der Eindeutigkeit einer solchen Fortsetzung und betrachten abschließend die σ-Algebra der Borelschen Mengen $\sigma(\mathcal{F}^d)$.

Ω sei stets eine nichtleere Menge.

Definition 28.1 Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ mit $\mu^*(\emptyset) = 0$ heißt *äußeres Maß* auf Ω, wenn sie wachsend und σ-subadditiv ist, also mit $A_1 \subset A_2$ stets $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ folgt und

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n)$$

für $(A_n)_n$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ gilt.

Bemerkungen 28.2 (i) Ein äußeres Maß ist stets auf ganz $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert.

(ii) Jedes Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist ein äußeres Maß (siehe 27.14).

(iii) Es sei $A \subset \Omega$ und

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0\,, & A = \emptyset \\ 1\,, & A \neq \emptyset \end{cases}\,,$$

dann ist μ^* ein äußeres Maß auf Ω (und es ist genau dann ein Maß, wenn Ω einpunktig ist).

Einem Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ können wir durch die folgende Konstruktion ein äußeres Maß zuordnen:

Satz 28.3 *Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ in Ω. Sei $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ definiert durch*

$$\mu^*(Q) := \inf\Big\{\sum_{n\geq 1} \mu(A_n), (A_n)_n \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}, Q \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n\Big\},$$

mit $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ *(setze* $\inf \emptyset := \infty$*). Dann ist* μ^* *ein äußeres Maß auf* Ω *(das von* $(\mathcal{R}, \mu)$ *induzierte äußere Maß) mit* $\mu^*(A) = \mu(A)$ *für alle* $A \in \mathcal{R}$*.*

Beispiel 28.4 $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{R} = \mathcal{F}^d$, $\mu = \lambda^d$. Dann heißt $(\lambda^d)^*$ das d-dimensionale *Lebesguesche äußere Maß.*

Beweis: Die Eigenschaften $\mu^*(\emptyset) = 0$ und μ^* ist wachsend sind nach Definition klar. Wir zeigen die σ-Subadditivität: ohne Einschränkung sei $\mu^*(Q_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Zu $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $(A_{nm})_m \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ mit $Q_n \subset \bigcup_{m \geq 1} A_{nm}$ und

$$\sum_{m \geq 1} \mu(A_{nm}) \leq \mu^*(Q_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \ .$$

Dann ist $\bigcup_{n \geq 1} Q_n \subset \bigcup_{n,m \geq 1} A_{nm}$, $A_{nm} \in \mathcal{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, also

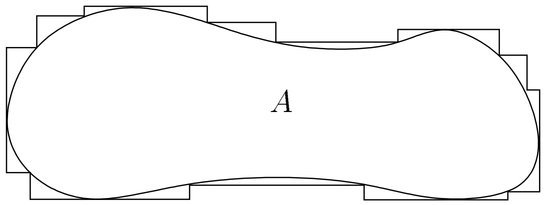
$$\begin{aligned} \mu^*\big(\bigcup_{n \geq 1} Q_n\big) &\leq \sum_{n,m \geq 1} \mu(A_{nm}) \leq \sum_{n \geq 1} \big(\mu^*(Q_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\big) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mu^*(Q_n) + \epsilon \ . \end{aligned}$$

Weiter ist $\mu^* \geq 0$ (klar).

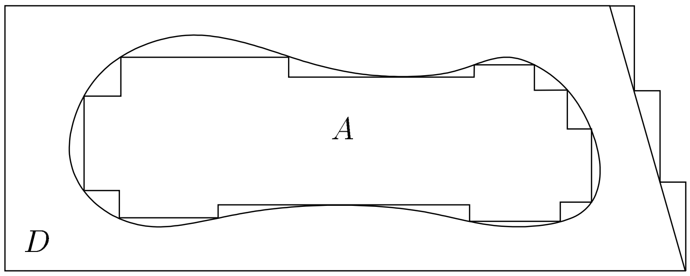
Aus Korollar 27.14 folgt $\mu(A) \leq \mu^*(A)$, $A \in \mathcal{R}$. Mit $A_1 := A$, $A_n := \emptyset$, $n \geq 2$, ist $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$ und somit $\mu^*(A) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) = \mu(A)$. Also $\mu(A) = \mu^*(A)$ für $A \in \mathcal{R}$. □

Bemerkung 28.5 Ein Mengensystem $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ enthalte die leere Menge und eine Folge $(K_n)_n$ mit $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} K_n$. Die Abbildung $\mu : \mathcal{K} \to [0, \infty]$ erfülle $\mu(\emptyset) = 0$. Dann ist μ^*, definiert wie in Satz 28.3 für jedes $Q \subset \Omega$ ein äußeres Maß auf Ω (das von (K, μ) induzierte). Der Beweis geht völlig analog. Diese systematische Konstruktion dient zur Herleitung *Lebesgue-Stieltjesscher* äußerer Maße und *Hausdorffscher* äußerer Maße. Wir werden diese äußeren Maße hier nicht betrachten.

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist das äußere Maß $(\lambda^d)^*(A)$ eine Approximation des Inhalts von A *von außen* durch Figuren. A wird von außen durch Figuren approximiert.



Anstelle von A betrachten wir nun $D \setminus A$, wobei D eine beschränkte Obermenge D von A in $\mathbb{R}^d$ ist. $D \setminus A$ werde nun analog von außen durch $(\lambda^d)^*(D \setminus A)$ approximiert.



Dann bedeutet dies eine Approximation von A *von innen* durch Figuren. Man könnte daher das *innere Maß* von A relativ zu D durch

$$(\lambda^d)^*(D) - (\lambda^d)^*(D \setminus A)$$

definieren. Es ist dann zu erwarten, dass diejenigen Teilmengen A von $\mathbb{R}^d$ eine ausgezeichnete Rolle spielen, deren äußeres Maß mit dem inneren Maß bezüglich jeder beschränkten Obermenge übereinstimmt:

$$(\lambda^d)^*(D) = (\lambda^d)^*(A) + (\lambda^d)^*(D \setminus A), \quad D \subset \mathbb{R}^d, D \supset A.$$

Dies führt für ein beliebiges äußeres Maß zu der folgenden Definition.

Definition 28.6 Es sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω. $A \subset \Omega$ heißt μ^*-*meßbar*, wenn für jedes $D \subset \Omega$

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D)$$

gilt ($\leq$ gilt sowieso). Die Menge aller μ^*-meßbaren Teilmengen von Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(\mu^*)$.

Satz 28.7 *(Carathéodory) Es sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω. Dann ist $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine σ-Algebra auf Ω und $\mu := \mu^*|\mathcal{A}(\mu^*)$ ein Maß auf $\mathcal{A}(\mu^*)$. Hierbei bezeichnet $\mu^*|\mathcal{A}(\mu^*)$ die Restriktion von μ^* auf $\mathcal{A}(\mu^*)$.*

Beweis: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}(\mu^*)$ und aus $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$ folgt $A^c \in \mathcal{A}(\mu^*)$ nach Definition der μ^*-meßbaren Mengen. Seien $A, B \in \mathcal{A}(\mu^*)$ und $D \subset \Omega$. Dann ist $\mu^*(D) \geq \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D)$ und $\mu^*(A^c \cap D) \geq \mu^*(B \cap A^c \cap D) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap D)$. Da μ^* subadditiv ist, folgt daraus

$$\mu^*(D) \geq \mu^*((A \cap D) \cup (B \cap A^c \cap D)) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap D).$$

Nun gilt $(A \cup (B \cap A^c)) \cap D = (A \cup B) \cap D$, also folgt

$$\mu^*(D) \geq \mu^*((A \cup B) \cap D) + \mu^*((A \cup B)^c \cap D),$$

also ist $A \cup B$ μ^*-meßbar. Wir haben also bereits gezeigt, dass $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine Algebra ist. Sei nun $(A_j)_j$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{A}(\mu^*)$. Somit ist wegen der μ^*-Meßbarkeit von A_1

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) = \mu^*\big(((A_1 \cup A_2) \cap D) \cap A_1\big) + \mu^*\big(((A_1 \cup A_2) \cap D) \cap A_1^c\big),$$

also

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) = \mu^*(A_1 \cap D) + \mu^*(A_2 \cap D) \ ,$$

da die Mengen A_1 und A_2 disjunkt sind. Mittels vollständige Induktion folgt somit

$$\mu^*\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^m A_j\Big)\cap D\Big) = \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j\cap D),\ m\in\mathbb{N}\ . \qquad (*)$$

Mit $A := \bigcup_{j\geq 1} A_j$ folgt mit der Monotonie von μ^*

$$\mu^*(A\cap D) \geq \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j\cap D),\ m\in\mathbb{N}\ .$$

Für $m\to\infty$ folgt also

$$\mu^*(A\cap D) \geq \sum_{j\geq 1} \mu^*(A_j\cap D)\ .$$

Die σ-Subadditivität liefert also insgesamt

$$\mu^*(A\cap D) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j\cap D)\ . \qquad (**)$$

Da wir schon gesehen hatten, dass $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine Algebra ist, gilt

$$\mu^*(D) = \mu^*\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^m A_j\Big)^c\cap D\Big) + \mu^*\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^m A_j\Big)\cap D\Big).$$

Mittels der Monotonie und $(*)$ folgt

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(A^c\cap D) + \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j\cap D).$$

Jetzt folgt mit $m\to\infty$ und $(**)$ die Ungleichung $\mu^*(D)\geq\mu^*(A^c\cap D)+\mu^*(A\cap D)$, also ist A μ^*-meßbar. Somit ist nach 27.4 (iii) $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine σ-Algebra. Setze abschließend in $(**)$ $D=\Omega$, so folgt, dass $\mu^*|\mathcal{A}(\mu^*)$ ein Maß auf $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist. □

Satz 28.8 *(Fortsetzungssatz) Es sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ in Ω und μ^* das zugehörige äußere Maß auf Ω (siehe Satz 28.3). Dann gilt: $\sigma(\mathcal{R})\subset\mathcal{A}(\mu^*)$ und $\bar{\mu} := \mu^*|\sigma(\mathcal{R})$ ist ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$, welches μ erweitert.*

Beweis: Für $A\in\mathcal{R}$ wollen wir zeigen, dass $\mu^*(D)\geq\mu^*(D\cap A)+\mu^*(D\cap A^c)$ für jedes $D\subset\Omega$. Es sei $(A_n)_n\in\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ mit $D\subset\bigcup_{n\geq 1}A_n$, so ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\mu(A_n) &= \sum_{n\geq 1}\mu(A_n\cap A)+\sum_{n\geq 1}\mu(A_n\cap A^c)\\
&\overset{(28.3)}{=} \sum_{n\geq 1}\mu^*(A_n\cap A)+\sum_{n\geq 1}\mu^*(A_n\cap A^c)\\
&\overset{\sigma-subadd.}{\geq} \mu^*\Big(\bigcup_{n\geq 1}A_n\cap A\Big)+\mu^*\Big(\bigcup_{n\geq 1}A_n\cap A^c\Big)\\
&\overset{monoton}{\geq} \mu^*(D\cap A)+\mu^*(D\cap A^c)\ .
\end{aligned}$$

Man betrachte nun das Infimum über alle solche Überdeckungen von D. Wegen

$$\mu^*(D) = \inf\left\{\sum_{n\geq 1} \mu(A_n), (A_n)_n \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}, D \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n\right\}$$

folgt dann $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}(\mu^*)$. $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist eine σ-Algebra nach Satz 28.7, also folgt $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}(\mu^*)$. Da $\mu^*|\mathcal{A}(\mu^*)$ nach Satz 28.7 ein Maß ist, ist auch $\mu^*|\sigma(\mathcal{R})$ ein Maß und nach Satz 28.3 gilt $\mu^*|\mathcal{R} = \mu$. Dies war zu zeigen. $\square$

Es ergibt sich zusammenfassend das folgende Schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{R} & \subset & \sigma(\mathcal{R}) & \subset & \mathcal{A}(\mu^*) & \subset & \mathcal{P}(\Omega) \\
 & & & & & & \\
\mu & \leftarrow & \mu^*|\sigma(\mathcal{R}) & \leftarrow & \mu^*|\mathcal{A}(\mu^*) & \leftarrow & \mu^* \\
 & & & & & & \\
\overbrace{\text{input}} & & \overbrace{\text{output}} & & & &
\end{array}$$

Definition 28.9 Ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ auf Ω heißt *σ-endlich*, falls es $(A_n)_n \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty,\ n \in \mathbb{N}$, gibt.

Beispiel 28.10 Das Lebesguesche Prämaß λ^d (Definition 27.12) ist σ-endlich, denn $[-n, n[\subset \mathbb{R}^d$ hat die Eigenschaft $[-n, n[\uparrow \mathbb{R}^d$ und $\lambda^d([-n, n[) < \infty$.

Satz 28.11 *(Eindeutigkeitssatz) Es sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ in Ω und μ^* das zugehörige äußere Maß auf Ω. Ist μ σ-endlich, so ist $\mu^*|\sigma(\mathcal{R})$ das einzige Maß, welches μ erweitert.*

Beweis: Es sei ν ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\nu|\mathcal{R} = \mu$. Setze $\bar{\mu} := \mu^*|\sigma(\mathcal{R})$. Sei $Q \in \sigma(\mathcal{R})$, $(A_n)_n \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ mit $Q \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Dann ist

$$\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n) \overset{(27.14)}{\geq} \nu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \geq \nu(Q)\ ,$$

also $\mu^*(Q) \geq \nu(Q)$ und somit $\bar{\mu}(Q) \geq \nu(Q)$.

Sei nun $\bar{\mu}(Q) < \infty$. Dann existiert eine disjunkte Folge $(A_n)_n \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ mit $Q \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n =: A \in \sigma(\mathcal{R})$ und $\bar{\mu}(A) = \sum_{n\geq 1} \bar{\mu}(A_n) \leq \mu^*(Q) + 1$. Somit ist $\bar{\mu}(A) < \infty$ und

$$\nu(A) = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \bar{\mu}(A_n) = \bar{\mu}(A).$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\nu(Q) &= \nu(A) - \nu(A \setminus Q) \\
&= \bar{\mu}(A) - \nu(A \setminus Q) \\
&\geq \bar{\mu}(A) - \bar{\mu}(A \setminus Q) = \bar{\mu}(Q).
\end{aligned}$$

Dabei verwenden wir $\nu(A \setminus Q) \leq \nu(A) = \bar{\mu}(A) < \infty$. Sei nun $Q \in \sigma(\mathcal{R})$ beliebig. Dann existiert eine Folge $(E_n)_n \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Da

$\bar{\mu}(Q \cap E_n) \leq \bar{\mu}(E_n) = \mu(E_n) < \infty$, folgt $\bar{\mu}(Q \cap E_n) \leq \nu(Q \cap E_n)$ nach dem gerade Bewiesenen. Mit Satz 27.15 folgt

$$\bar{\mu}(Q) = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(Q \cap E_n) \leq \lim_{n\to\infty} \nu(Q \cap E_n) = \nu(Q) \ .$$

Also folgt insgesamt $\nu = \bar{\mu}$. □

Definition 28.12 Zu $(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}^d)$ heißt die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F}^d) = \sigma(\mathcal{R}^d)$ die σ-Algebra der *Borelschen Mengen* von $\mathbb{R}^d$, in Zeichen $\mathcal{B}^d := \sigma(\mathcal{F}^d)$. Das von $(\lambda^d)^*$ auf $\mathbb{R}^d$ induzierte Maß $(\lambda^d)^*|\mathcal{B}^d$ heißt *Lebesgue-Borelsches Maß* oder auch d-dimensionales Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$ und wird mit λ^d bezeichnet (vgl. Definition 27.12). Nach Satz 28.11 ist es das einzige Maß auf $\mathcal{B}^d$, welches jedem nach rechts halboffenen Intervall in $\mathbb{R}^d$ seinen d-dimensionalen Elementarinhalt zuordnet.

Naheliegende Fragen zu $\mathcal{B}^d$ sind: Welche Mengen sind in $\mathcal{B}^d$ enthalten? Gibt es in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ überhaupt nicht-Borelsche Mengen?

Wir betrachten zunächst:

Lemma 28.13 *Jede offene Teilmenge O in $\mathbb{R}^d$ kann als Vereinigung einer Folge $(I_n)_n$ von Intervallen der Form $[a,b[,\ a,b \in \mathbb{Q}^d$, dargestellt werden ($(I_n)_n \in (\mathcal{R}^d)^{\mathbb{N}}$).*

Beweis: O kann als Vereinigung abzählbar vieler offener, beschränkter Intervalle dargestellt werden (Intervalle mit lauter rationalen Koordinaten der Eckpunkte). Jedes beschränkte Intervall der Form $]a,b[:= \{x \in \mathbb{R}^d : a < x < b\}$ ist Vereinigung einer Folge von Intervallen aus $\mathcal{R}^d$: $[\bar{a}_n, b[\uparrow]a,b[$ mit $\bar{a}_n := (\min(a_1 + \frac{1}{n}, b_1), \ldots, \min(a_d + \frac{1}{n}, b_d))$. Also ist die Behauptung mit Hilfe von Satz 10.5 bewiesen. □

Man kann sogar zeigen, dass in Lemma 28.13 eine disjunkte Folge $(I_n)_n$ gefunden werden kann.

Satz 28.14 *Es bezeichne $\mathcal{O}^d$ bzw. $\mathcal{C}^d$ bzw. $\mathcal{K}^d$ das System aller offenen bzw. abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$. Dann ist*

$$\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}^d) = \sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{K}^d).$$

Beweis: Nach Satz 8.28 wissen wir $\mathcal{K}^d \subset \mathcal{C}^d \subset \sigma(\mathcal{C}^d)$, also folgt $\sigma(\mathcal{K}^d) \subset \sigma(\mathcal{C}^d)$. Sei $K_n := \bar{B}(0,n)$ die kompakte Vollkugel vom Radius n. Dann ist $C \in \mathcal{C}^d$ darstellbar als $C = \bigcup_{n\geq 1}(C \cap K_n)$ und $C \cap K_n$ ist kompakt, also $\mathcal{C}^d \subset \sigma(\mathcal{K}^d)$, also $\sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(K^d)$. Offene Mengen sind Komplemente der abgeschlossenen Mengen, also folgt $\sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{O}^d)$. Damit bleibt zu zeigen: $\sigma(\mathcal{O}^d) = \mathcal{B}^d$: jedes $[a,b[\in \mathcal{R}^d$ ist Durchschnitt einer Folge offener und beschränkter Intervalle: $]\bar{a}_n, b[\downarrow [a,b[$ mit $\bar{a}_n := (a_1 - \frac{1}{n}, \ldots, a_d - \frac{1}{n})$, also gilt $\mathcal{R}^d \subset \sigma(\mathcal{O}^d)$ und somit $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{R}^d) \subset \sigma(\mathcal{O}^d)$. Mit Hilfe von Lemma 28.13 folgt $\mathcal{O}^d \subset \sigma(\mathcal{R}^d) = \mathcal{B}^d$, also $\sigma(\mathcal{O}^d) \subset \mathcal{B}^d$ und somit $\sigma(\mathcal{O}^d) = \mathcal{B}^d$. □

Beispiele 28.15 (i) Jede Borelsche Menge in $\mathbb{R}^d$, die Teilmenge einer *Koordinatenhyperebene* ist, ist eine Lebesgue-Borelsche Nullmenge. Ohne Einschränkung seien $H := \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, $\epsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Setze $\epsilon_k := \epsilon \cdot (2k)^{-d+1}$.

$2^{-(k+2)}$ und $J_k(\epsilon) := [-k, k[^{d-1} \times [-\epsilon_k, \epsilon_k[$, dann ist $H \subset \bigcup_{k\geq 1} J_k(\epsilon)$ und $\lambda^d(J_k(\epsilon)) = \epsilon \cdot 2^{-(k+1)}$ und somit $\sum_{k\geq 1} \lambda^d(J_k(\epsilon)) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Wir werden später sehen: Jede Borelsche Teilmenge von $\mathbb{R}^d$, die in einem affinen echten Unterraum enthalten ist, ist eine Lebesgue-Borelsche Nullmenge.

(ii) Jede abzählbare Borelsche Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist eine Lebesgue-Borelsche Nullmenge. Wir wissen, dass $\{x\} \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen ist und daher Borelsch. Weiter findet man ein H wie in (i) mit $\{x\} \subset H$. Dann liefert die σ-Additivität die Behauptung.

(iii) $F \subset \mathbb{R}$ sei Cantors Diskontinuum (vgl. Analysis I, Aufgabe 50). Es ist $\lambda^1(F) = 0$.

(iv) Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ gilt $\lambda^d([a,b[) = \lambda^d(]a,b[) = \lambda^d([a,b]) = \lambda^d(]a,b])$. Dies folgt einfach mittels der aufsteigenden bzw. absteigenden Intervall-Folgen, wie sie im Beweis von Lemma 28.13 und Satz 28.14 vorkommen.

KAPITEL 29

Meßbare Abbildungen und weitere Eigenschaften des Lebesgue-Borel-Maßes

In Analogie zu stetigen Abbildungen zwischen metrischen Räumen, bei denen die Urbilder der offenen Mengen offen sind, betrachten wir in diesem Kapitel Abbildungen, die die Urbilder von Elementen einer σ-Algebra in eine σ-Algebra führen. Diese Abbildungen heißen meßbare Abbildungen. Mit Hilfe meßbarer Abbildungen können auch Maße abgebildet werden. Weiter betrachten wir Abbildungseigenschaften des Lebesgue-Borelschen Maßes λ^d. Der Flächeninhalt einer meßbaren ebenen Punktmenge (also einer Menge in $\mathcal{B}^2$) ändert sich nicht, wenn man die Menge einer beliebigen Drehung oder Verschiebung unterwirft. Dies nennt man die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Borelschen Maßes. Wir untersuchen hier sogar das Verhalten von λ^d bei beliebigen invertierbaren affinen Abbildungen. Weiter zeigen wir die Existenz nicht Borelscher Mengen in $\mathbb{R}^d$.

Definition 29.1 Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ Meßräume (siehe Definition 27.1) und $T\colon \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. T heißt $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$-*meßbar*, wenn gilt: $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{A}'$ $(T^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A})$. Die $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$-Meßbarkeit drücken wir symbolisch auch durch

$$T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$$

aus. Ist $\Omega' = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}' = \mathcal{B}^d$, so heißt eine $\mathcal{A}/\mathcal{B}^d$-meßbare Abbildung *Borel-meßbar*. Wenn es im Zusammenhang klar ist, welche σ-Algebren gegeben sind und keine Verwechslung möglich ist, sagen wir fortan auch kurz *meßbar*.

Beispiele 29.2 (i) Jede konstante Abbildung $T\colon \Omega \to \Omega'$ ist $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$-meßbar.

(ii) Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Meßraum und zu $A \subset \Omega$ sei

$$1_A(\omega) := \begin{cases} 1\,, & \omega \in A \\ 0\,, & \omega \in A^c \end{cases} .$$

Diese Abbildung heißt *Indikatorfunktion* oder *charakteristische Funktion* von A. 1_A ist genau dann $\mathcal{A}/\mathcal{B}^1$-meßbar, wenn $A \in \mathcal{A}$ gilt (denn $1_A^{-1}(B)$, $B \subset \mathbb{R}$, liegt in $\{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$).

Satz 29.3 *Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ Meßräume und $\mathcal{E}'$ sei ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$ (siehe 27.2 (v)). Dann ist $T\colon \Omega \to \Omega'$ genau dann $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$-meßbar, wenn $T^{-1}(E') \in \mathcal{A}$ für alle $E' \in \mathcal{E}'$ gilt.*

Beweis: Die Menge aller $\mathcal{Q}' := \{Q' \subset \Omega' \colon T^{-1}(Q') \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra in Ω' (einfache Übung). $\mathcal{A}' \subset \mathcal{Q}'$ ist gleichbedeutend mit der Meßbarkeit von T. $\mathcal{A}' \subset \mathcal{Q}'$

ist gleichbedeutend mit $\mathcal{E}' \subset \mathcal{Q}'$ und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{Q}'$ ist gleichbedeutend mit $T^{-1}(E') \in \mathcal{A}$ für alle $E' \in \mathcal{E}'$. $\square$

Beispiel 29.4 Jede stetige Abbildung $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\ell$ ist $\mathcal{B}^d/\mathcal{B}^\ell$-meßbar (Borel-meßbar). Dies folgt, da $\mathcal{O}^\ell$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}^\ell$ ist (siehe Satz 28.14) und $T^{-1}(O) \in \mathcal{O}^d \subset \mathcal{B}^d$ für alle $O \in \mathcal{O}^\ell$ wegen der Stetigkeit. Also folgt die Behauptung aus Satz 29.3.

Satz 29.5 *Gegeben seien drei Meßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ und $(\Omega_3, \mathcal{A}_3)$. Sind $T_1\colon (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ und $T_2\colon (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ meßbare Abbildungen, so ist $T_2 \circ T_1$ $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_3$-meßbar.*

Beweis: $(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(A))$. $\square$

Mit Hilfe meßbarer Abbildungen können Maße abgebildet werden:

Satz 29.6 *Es sei $T\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine meßbare Abbildung. Dann wird für jedes Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ durch $A' \mapsto \mu(T^{-1}(A'))$ ein Maß μ' auf $\mathcal{A}'$ definiert.*

Beweis: Mit $(A'_n)_n$, disjunkte Folge in $\mathcal{A}'$, ist $(T^{-1}(A'_n))_n$ disjunkte Folge in $\mathcal{A}$ und es gilt

$$T^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\Big) = \bigcup_{n\geq 1} T^{-1}(A'_n).$$

$\square$

Definition 29.7 Das Maß μ' in Satz 29.6 heißt *Bildmaß von μ unter T* und wird mit $T(\mu)$ bezeichnet:

$$T(\mu)(A') := \mu(T^{-1}(A')), \quad A' \in \mathcal{A}'.$$

Bemerkung 29.8 Es sei die Situation von Satz 29.5 gegeben. Weiter sei μ ein Maß auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$. Dann ist

$$(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2(T_1(\mu))$$

(*Transitivität*). Denn für $A \in \mathcal{A}_3$ ist

$$\begin{aligned} \mu\big((T_2 \circ T_1)^{-1}(A)\big) &= \mu\big(T_1^{-1}(T_2^{-1}(A))\big) \\ &= T_1(\mu)\left(T_2^{-1}(A)\right) = T_2(T_1(\mu))(A). \end{aligned}$$

Beispiele 29.9 Es seien $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und $\mu = \lambda^d$.

(i) Zu $a \in \mathbb{R}^d$ sei $T_a\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $T_a(x) := x + a$. T_a ist stetig, also meßbar nach Beispiel 29.4. Wie sieht $T_a(\lambda^d)$ aus? Es ist $T_a^{-1} = T_{-a}$. Für $[b, c[\in \mathcal{R}^d$ ist

$$T_a(\lambda^d)([b, c[) = \lambda^d(T_a^{-1}([b, c[)) = \lambda^d(T_{-a}([b, c[)) = \lambda^d([b - a, c - a[) = \lambda^d([b, c[),$$

also stimmen λ^d und $T_a(\lambda^d)$ auf $\mathcal{R}^d$ überein. Somit folgt mit Satz 28.11 (siehe auch Definition 28.12) $\lambda^d = T_a(\lambda^d)$. Man spricht von der *Translationsinvarianz*

(ii) Zu $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $p \in \{1,\dots,d\}$ sei $M_{p,r}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die lineare Abbildung

$$M_{p,r}(x_1,\dots,x_d) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & r & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ p\text{-te Stelle} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

(p-te Koordinate wird durch rx_p ersetzt). Für $[a,b[\, \in \mathcal{R}^d$ ist das Urbild unter $M_{p,r}$ gleich $[a',b'[$ für $r > 0$ bzw. $]b',a']$ für $r < 0$, wobei $a' = (a_1,\dots,a_{p-1},\frac{a_p}{r},a_{p+1},\dots,a_d)$ und b' analog. Also ist

$$\lambda^d\big(M_{p,r}^{-1}([a,b[)\big) = |r|^{-1}\lambda^d([a,b[)\ .$$

Somit stimmen $M_{p,r}(\lambda^d)$ und $\frac{1}{|r|}\lambda^d$ auf $\mathcal{R}^d$ überein und mit Satz 28.11 folgt

$$M_{p,r}(\lambda^d) = \frac{1}{|r|}\lambda^d = \frac{1}{|\det M_{p,r}|}\lambda^d.$$

(iii) Betrachte zu $a \in \mathbb{R}^d$, $a_i \neq 0$, $i = 1,\dots,d$, die Abbildung $M_a := M_{1,a_1} \circ M_{2,a_2} \circ \dots \circ M_{d,a_d}$, also $M_a(x_1,\dots,x_d) = (a_1x_1,\dots,a_dx_d)$. Dann ist

$$M_a(\lambda^d) = \frac{1}{|a_1 \dots a_d|}\lambda^d = \frac{1}{|\det M_a|}\lambda^d$$

nach Bemerkung 29.8 und Beispiel (ii).
Im Spezialfall $a = (r,\dots,r) \in \mathbb{R}^d$ nennt man die Abbildung M_a eine *Homothetie*. Der Spezialfall einer Homothetie mit $r = -1$ ist die Spiegelung am Nullpunkt.

Das Lebesgue-Borelsche-Maß λ^d auf $\mathcal{B}^d$ ist durch die Translationsinvarianz und eine Normierung bereits eindeutig bestimmt:

Satz 29.10 *Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit $\mu([0,1[) = 1$, so ist $\mu = \lambda^d$.*

Beweis: Für $n_1,\dots,n_d \in \mathbb{N}$ betrachte man das Gitter der Punkte $(\frac{k_1}{n_1},\dots,\frac{k_d}{n_d})$, $k_1,\dots,k_d \in \mathbb{N}$, $0 < k_j \le n_j$, $j = 1,\dots,d$. Verschiebt man das Intervall $[0,\frac{1}{n_1}[\times\dots\times[0,\frac{1}{n_d}[$ um jeden dieser Gitterpunkte, so folgt die disjunkte Zerlegung

$$[0,1[= \bigcup_{\substack{0<k_j\le n_j\\ j=1,\dots,d}} \left(\prod_{i=1}^{d} [0,\frac{1}{n_i}[+\left(\frac{k_1}{n_1},\dots,\frac{k_d}{n_d}\right)\right).$$

Alle $n_1\cdots n_d$ Mengen rechts haben gleiches Maß μ (da μ translationsinvariant ist) und mit $\mu([0,1[) = 1$ folgt $\mu\left(\prod_{j=1}^d[0,\frac{1}{n_j}[\right) = \frac{1}{n_1\cdots n_d}$. Wendet man nochmals die Translationsinvarianz von μ an, so folgt

$$\mu([a,b[) = \lambda^d([a,b[), \quad a,b \in \mathbb{Q}^d.$$

Aber Intervalle $[a, b[$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^d$ bilden einen Ring $\mathcal{R}^d_{\mathbb{Q}}$ (klar nach Satz 27.7). Mit Satz 28.11 ist $\mu = \lambda^d$ auf $\sigma(\mathcal{R}^d_{\mathbb{Q}})$. Nun ist $\sigma(\mathcal{R}^d_{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{B}^d$ und nach Lemma 28.13 ist $\mathcal{O}^d \subset \sigma(\mathcal{R}^d_{\mathbb{Q}})$, also $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}^d) \subset \sigma(\mathcal{R}^d_{\mathbb{Q}})$ und somit $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{R}^d_{\mathbb{Q}})$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Korollar 29.11 (i) *Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit $\mu([0,1]) = 1$, so ist $\mu = \lambda^d$.*
(ii) *Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit $\alpha = \mu([0,1])$, so ist $\mu = \alpha\lambda^d$.*

Beweis: zu (i): Es gilt $1 = \mu([0,1]) \leq \mu([0,2[) = 2^d\alpha$ mit $\alpha := \mu([0,1[)$, also ist $\alpha > 0$. Nun erfüllt $\nu := \frac{1}{\alpha}\mu$ die Voraussetzungen von 29.10, also $\nu = \lambda^d$. Damit ist

$$\frac{1}{\alpha} = \nu([0,1]) = \lambda^d([0,1]) = 1,$$

also folgt $\mu = \lambda^d$.

zu (ii): Für $\alpha > 0$ erfüllt $\alpha^{-1}\mu$ die Voraussetzungen von (i). Für $\alpha = 0$ ist $\mu([0,1]) = 0$ und

$$\mu(\mathbb{R}^d) = \mu\Big(\bigcup_{g\in\mathbb{Z}^d}([0,1[+g)\Big) = \sum_{g\in\mathbb{Z}^d}\mu([0,1[) = 0,$$

und somit ist $\mu = 0$. □

Die Beispiele 29.9 zeigen das Verhalten von λ^d unter speziellen linearen Abbildungen. Dies kann verallgemeinert werden:

Satz 29.12 *Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine bijektive affine Abbildung. Dann ist f Borel-meßbar und*

$$f(\lambda^d) = |\det f|^{-1}\lambda^d.$$

Dabei bedeutet $\det f$ *die Determinante der f darstellenden Matrix.*

Korollar 29.13 *Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine bijektive affine Abbildung. Dann ist für jedes $A \in \mathcal{B}^d$ auch $f(A) \in \mathcal{B}^d$ und*

$$\lambda^d(f(A)) = |\det f|\,\lambda^d(A).$$

Beweis: Mit f ist f^{-1} bijektiv und affin. Man wende 29.12 auf f^{-1} statt f an. □

Es sei eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ der Form $f(x) = g(x) + a$ gegeben, wobei $a \in \mathbb{R}^d$ und $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine orthogonale Abbildung ist. Ein solches f heißt *Bewegung*. f genau dann eine Bewegung, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ gilt (siehe Lineare Algebra). Für jede Bewegung f ist $|\det f| = 1$. Somit folgt das

Korollar 29.14 *(Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes) Jede Bewegung ist Borel-meßbar und es gilt $f(\lambda^d) = \lambda^d$, $\lambda^d(f(A)) = \lambda^d(A)$, $A \in \mathcal{B}^d$.*

Satz 29.12 gilt sogar für C^1-Diffeomorphismen. Dies werden wir später im Zusammenhang mit der sogenannten Transformationsformel kennenlernen. Wir könnten den Beweis also auf das Kapitel zur Transformationsformel verschieben. Doch wir sind mit Hilfe eines Arguments aus der Linearen Algebra schon so dicht am direkten Beweis, das wir ihn hier ausführen.

Beweis von Satz 29.12: Da f stetig ist, ist f auch Borel-meßbar nach Beispiel 29.4. Da λ^d translationsinvariant ist, genügt es mit Bemerkung 29.8, den Satz für Abbildungen $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ zu betrachten, die linear und bijektiv sind, für die also $\det g \neq 0$ gilt. Es sei also $g \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$, wobei $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ die allgemeine lineare Gruppe bezeichnet. Es sei weiter $A \in \mathcal{B}^d$ und $a \in \mathbb{R}^d$, so gilt

$$T_a\big(g(\lambda^d)\big)(A) = g(\lambda^d)(A-a) = \lambda^d\big(g^{-1}(A) - g^{-1}(a)\big) = \lambda^d\big(g^{-1}(A)\big) = g(\lambda^d)(A).$$

Also ist $g(\lambda^d)$ translationsinvariant. Die Menge $g^{-1}\big([0,1]\big)$ ist kompakt, es folgt also $g(\lambda^d)([0,1]) < \infty$. Mit Korollar 29.11 (ii) und $c(g) := g(\lambda^d)([0,1])$ schließen wir

$$g(\lambda^d) = c(g)\,\lambda^d.$$

Damit bleibt zu zeigen:

$$c(g) = |\det g|^{-1}. \qquad (*)$$

Dies behandeln wir für unterschiedliche g.

(i) Ist g orthogonal, so ist
$$c(g)\,\lambda^d\big(B(0,1)\big) = g(\lambda^d)\big(B(0,1)\big) = \lambda^d\big(g^{-1}(B(0,1)\big) = \lambda^d\big(B(0,1)\big).$$
Also ist $c(g) = 1 = |\det g|^{-1}$, und somit ist $(*)$ für orthogonale g bewiesen.

(ii) $g \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ sei bezüglich der kanonischen Basis durch eine Diagonalmatrix beschrieben. Dann lieferte 29.9 (iii) $c(g) = |\det g|^{-1}$.

(iii) Jetzt kommt ein Fakt aus der Linearen Algebra: $g \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ hat eine Darstellung $g = v\,d\,w$ (im Sinne der Komposition von Abbildungen) mit orthogonalen Abbildungen v und w und d ist eine durch eine Diagonalmatrix beschriebene Abbildung wie unter (ii). Dies sieht man mit Hilfe des Äquivalenz-Satzes für positiv definite Matrizen (Koecher, Lineare Algebra und analytische Geometrie, S.195) wie folgt: bezeichnet g^* den adjungierten Endomorphismus von g, so ist $g\,g^*$ positiv definit. Zu dieser Abbildung gibt es nach dem Äquivalenz-Satz eine orthogonale Abbildung v und eine diagonale Abbildung d, so dass $g\,g^* = v\,d^2\,v^*$ gilt. Die Abbildung $w := d^{-1}\,v^*\,g$ ist orthogonal und es gilt $g = v\,d\,w$. Dann gilt $|\det g| = |\det d|$ und Bemerkung 29.8 und die Fälle (i) und (ii) liefern die Behauptung.

□

Abschließend betrachten wir die Existenz nicht-Borelscher Mengen.

Satz 29.15 *Es gilt $\mathcal{B}^d \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ für jedes $d \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Wir erklären auf $\mathbb{R}^d$ eine Äquivalenzrelation: zu $x, y \in \mathbb{R}^d$ sei $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^d$. Die Äquivalenzklassen haben dann die Form $x + \mathbb{Q}^d, x \in \mathbb{R}^d$. Zu jeder reellen Zahl η existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq \eta < n+1$, also $\eta - n \in [0,1[$. Somit gibt es in jeder Äquivalenzklasse ein $x \in [0,1[$. Es gibt nach dem Auswahlaxiom eine Menge $K \subset [0,1[$, so dass K mit jeder Äquivalenzklasse genau ein Element gemeinsam hat. Also ist

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k \in K} (k + \mathbb{Q}^d) = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^d} (y + K).$$

Weiter gilt für $y_1 \neq y_2 \Rightarrow (y_1 + K) \cap (y_2 + K) = \emptyset$, denn ist der Durchschnitt nicht-leer, so existieren $k_1, k_2 \in K$ mit $y_1 + k_1 = y_2 + k_2$, also $k_1 \sim k_2$. Dann ist $k_1 = k_2$, also $y_1 = y_2$ im Widerspruch zu $y_1 \neq y_2$. Falls nun $K \in \mathcal{B}^d$, so folgt aus der σ-Additivität

$$\sum_{y \in \mathbb{Q}^d} \lambda^d(y + K) = \lambda^d(\mathbb{R}^d) = +\infty.$$

Nach 29.9 (i) (Translationsinvarianz) ist $\lambda^d(y + K) = \lambda^d(K)$ für $y \in \mathbb{Q}^d$. Also muß $\lambda^d(K) > 0$ sein. Mit $K \subset [0,1[$ ist

$$\bigcup_{y \in [0,1[\cap \mathbb{Q}^d} (y + K) \subset [0,2[$$

und daher

$$\sum_{y \in [0,1[\cap \mathbb{Q}^d} \lambda^d(y + K) \leq \lambda^d([0,2[) = 2^d < \infty.$$

Das geht aber nur, wenn $\lambda^d(y + K) = \lambda^d(K) = 0$, im Widerspruch zu $\lambda^d(K) > 0$. Also kann K nicht in $\mathcal{B}^d$ liegen. $\square$

KAPITEL 30

Meßbare numerische Funktionen

Der Begriff *meßbare* Abbildungen erschien im Hinblick auf die Definition von Bildmaßen als genau der richtige Begriff. Wir werden nun sehen, dass die Konstruktion des Integrals den Begriff der Meßbarkeit in ein neues Licht bringt. Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{A}$. Das Integral von 1_A über Ω bezüglich des Maßes μ sollte durch $\mu(A)$ festgelegt sein. Also muß A zu $\mathcal{A}$ gehören. Diese Verträglichkeit von 1_A mit der σ-Algebra $\mathcal{A}$ wird für kompliziertere Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch ein geeignetes Approximationsargument verallgemeinert und führt zurück zum Begriff der Meßbarkeit, gegeben in der Definition 29.1.

Definition 30.1 Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *numerisch.* f heißt $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktion, falls $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(\infty)$ und $f^{-1}(O)$ für jede offene Teilmenge O in $\mathbb{R}$ zu $\mathcal{A}$ gehören. Die Menge aller $\mathcal{A}$-meßbaren numerischen Funktionen auf Ω bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}) =: \mathcal{L}_0.$$

Die Abhängigkeit des Raums $\mathcal{L}_0$ von μ ist tatsächlich überflüssig. Der Begriff der Meßbarkeit benötigt nur $\mathcal{A}$. Somit sollten wir besser $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{R}})$ schreiben. Der Grund für die hier gewählte Notation erklärt sich erst später.

Bemerkung 30.2 Es bezeichne $\overline{\mathcal{B}}$ das System aller Untermengen B von $\overline{\mathbb{R}}$ mit $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}^1$. Man nennt $\overline{\mathcal{B}}$ die Borelsche σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$. Es ist f eine $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktion genau dann, wenn f $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-meßbar ist (siehe Definition 29.1 und Satz 29.3).

Von nun an verwenden wir die folgenden Bezeichnungen: Sind $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, so setze

$$[f > \alpha] := [\alpha < f] := \{x \in \Omega\colon f(x) > \alpha\} = f^{-1}\big(]\alpha, \infty]\big).$$

Analog $[f < \alpha]$, $[f \leq \alpha]$, $[f \geq \alpha]$, $[f = \alpha]$, $[f \neq \alpha]$, $[\alpha < f \leq \beta]$, $[f < g]$, $[f \leq g]$, $[f \neq g]$, $[f = g]$, $[\alpha < f, g > \beta]$ usw.

Weiter setzen wir $\mathcal{B} := \mathcal{B}^1$.

Satz 30.3 *Für eine numerische Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sind äquivalent.*

(i) $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$
(ii) $[f < \alpha] \in \mathcal{A}$ *für jedes* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *[bzw.* $\mathbb{R}$*]*
(iii) $[f \leq \alpha] \in \mathcal{A}$ *für jedes* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *[bzw.* $\mathbb{R}$*]*
(iv) $[f > \alpha] \in \mathcal{A}$ *für jedes* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *[bzw.* $\mathbb{R}$*]*

(v) $[f \geq \alpha] \in \mathcal{A}$ *für jedes* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *[bzw.* $\mathbb{R}$*].*

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Voraussetzung liegen $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big)$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$) in $\mathcal{A}$. Es gilt

$$[f < \alpha] = f^{-1}\big([-\infty,\alpha)\big) = f^{-1}(-\infty) \cup f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big),$$

also folgt $[f < \alpha] \in \mathcal{A}$.

Weiter gelten die folgenden Identitäten:

$$[f \leq \alpha] = \bigcap_{j=1}^{\infty}[f < \alpha + (1/j)],\ [f > \alpha] = [f \leq \alpha]^c,\ [f \geq \alpha] = \bigcap_{j=1}^{\infty}[f > \alpha - (1/j)].$$

Damit ist bereits (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) bewiesen.

(v) $\Rightarrow$ (i): Es sei O offen in $\mathbb{R}$. Nach Lemma 28.13 existieren $(\alpha_j)_j$ und $(\beta_j)_j$ in $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ mit $O = \bigcup_{j\geq 1}[\alpha_j, \beta_j)$, also

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{j\geq 1} f^{-1}\big([\alpha_j,\beta_j)\big) = \bigcup_{j\geq 1}\big([f \geq \alpha_j] \cap [f < \beta_j]\big).$$

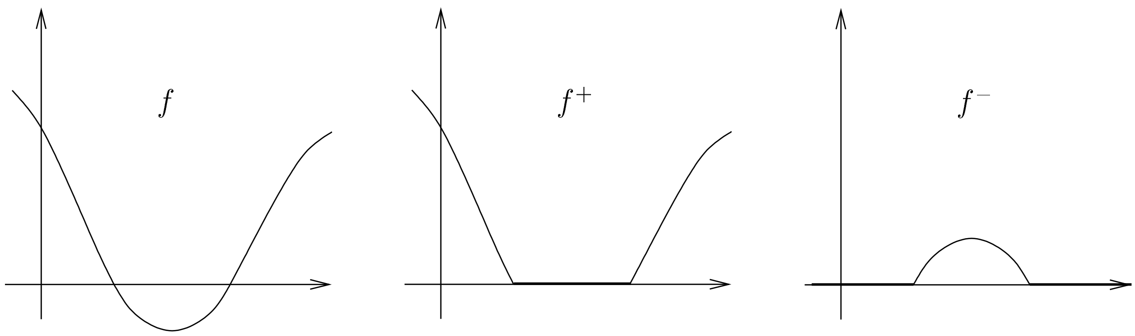
Mit $[f < \beta_j] = [f \geq \beta_j]^c$ folgt somit aus (v) $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$. Weiter gilt

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{j\geq 1}[f < -j], \quad f^{-1}(\infty) = \bigcap_{j\geq 1}[f \geq j],$$

und somit liegt auch $f^{-1}(\pm\infty)$ in $\mathcal{A}$. $\square$

Definition 30.4 Es sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann heißen $f^+ := f \vee 0$ bzw. $f^- := 0 \vee (-f)$ *Positiv* - bzw. *Negativteil* von f. (Erinnerung: $\vee$ steht für das Supremum).

In der folgenden Abbildung sind der Positiv- und der Negativteil eines $f \in \mathbb{R}^{\Omega}$ dargestellt.



Es gelten

$$f^+ \geq 0,\ f^- \geq 0,\ f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-.$$

Diese Identitäten sind anschaulich klar. Für ihren formalen Beweis (Übung) verwendet man die Rechenregel

$$(f \vee g) + h = (f+h) \vee (g+h), \quad (-f) \vee (-g) = -(f \wedge g)$$

für $f, g, h \in \overline{\mathbb{R}}^{\Omega}$, wobei $\wedge$ für das Infimum steht.

Satz 30.5 *Es seien $f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}})$ und $(f_j)_j$ eine Folge in $\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}})$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gehören die numerischen Funktionen f^+, f^-, $|f|$, $\max_{1\le j\le k} f_j$, $\min_{1\le j\le k} f_j$, $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$, $\limsup_j f_j$ und $\liminf_j f_j$ zu $\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}})$. Insbesondere ist $\lim_{j\to\infty} f_j \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\bar{\mathbb{R}})$, falls der Limes in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert.*

Beweis: Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist nach Satz 30.3 $[f_j > \alpha] \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, also

$$[\sup_j f_j > \alpha] = \bigcup_{j\ge 1} [f_j > \alpha] \in \mathcal{A},$$

also ist $\sup_j f_j$ meßbar nach Satz 30.3. Ist $f_j \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}})$, so auch $-f_j$, also ist $\inf_j f_j = -\sup_j(-f_j)$ meßbar.

Setze weiter $g_j = f_j$ für $1 \le j \le k$ und $g_j = f_k$ für $j > k$, so ist $\sup_j g_j = \max_{1\le j\le k} f_j$ meßbar, wie gerade gesehen, und analog ist auch $\min_{1\le j\le k} f_j$ meßbar. Nach Definition und mit $|f| = f^+ + f^-$ ist dann auch f^+, f^- und $|f|$ meßbar. Weiter gilt

$$\limsup_j f_j = \inf_j \sup_{k\ge j} f_k, \quad \liminf_j f_j = \sup_j \inf_{k\ge j} f_k.$$

Also sind diese Abbildungen nach dem bereits Bewiesenen meßbar. □

Satz 30.6 *Eine Funktion $f := (f_1,\dots,f_d)\colon (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)$ ist genau dann $\mathcal{A}/\mathcal{B}^d$-meßbar, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_1,\dots,f_d\colon (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-meßbar sind.*

Beweis: Es sei $\mathrm{pr}_j\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch $pr_j(x) := x_j$ für $x = (x_1,\dots,x_d)$ und $j \in \{1,\dots,d\}$ (Projektionsabbildungen). Jedes pr_j ist stetig, also Borel-meßbar. Ist f meßbar, so auch $f_j := pr_j \circ f$, $j = 1,\dots,d$ (nach Satz 29.5). Sind $f_1,\dots,f_d$ meßbar und ist $[a,b[\in \mathcal{R}^d$, so ist

$$f^{-1}\big([a,b[\big) = \bigcap_{j=1}^{d} f_j^{-1}\big([a_j,b_j[\big) \in \mathcal{A}.$$

Da $\mathcal{R}^d$ die σ-Algebra $\mathcal{B}^d$ erzeugt, ist f mit Satz 29.3 meßbar. □

Satz 30.7 *Sind f und g $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktionen und $\alpha,\beta \in \overline{\mathbb{R}}$, so sind auch $\alpha f + \beta g$ und $f \cdot g$ $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktionen.*

Beweis: Es seien $f,g\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist $h\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $h(x) := (f(x),g(x))$, nach Satz 30.6 $\mathcal{A}/\mathcal{B}^2$-meßbar. Seien weiter $s,p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $s(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ und $p(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$. Diese Abbildungen sind stetig, also $\mathcal{B}^2/\mathcal{B}$-meßbar. Damit sind $f + g = s \circ h$ und $f \cdot g = p \circ h$ nach Satz 29.5 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-meßbar.

Seien nun $f,g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktionen, so sind die Abbildungen $f_n, g_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f_n := \max\big(-n, \min(f,n)\big)$ und $g_n := \max\big(-n,\min(g,n)\big)$ nach Satz 30.5 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-meßbar, also sind auch $f_n + g_n$ und $f_n \cdot g_n$, $n \in \mathbb{N}$, nach dem ersten Teil des Beweises $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-meßbar. Damit sind auch $f + g = \lim_{n\to\infty}(f_n + g_n)$ und $f \cdot g = \lim_{n\to\infty}(f_n \cdot g_n)$ $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktionen (Satz 30.5). Konstante Funktionen α bzw. β sind meßbar, also auch $\alpha f, \beta g$ und folglich $\alpha f + \beta g$. □

Korollar 30.8 *Sind $f, g\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-meßbar, so sind $[f < g], [f \le g], [f = g]$ und $[f \neq g]$ in $\mathcal{A}$.*

Beweis: Es gelten $[f < g] = [g - f > 0]$, $[f \le g] = [g - f \ge 0]$, $[f = g] = [f - g \le 0] \cap [f - g \ge 0]$ und $[f \neq g] = [f - g < 0] \cup [f - g > 0]$. Also folgt alles aus der Meßbarkeit von $f - g$ und $g - f$ und aus Satz 30.3. □

Korollar 30.9 *Eine numerische Funktion $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ ist genau dann meßbar, wenn ihr Positivteil f^+ und ihr Negativteil f^- meßbar sind.*

Beweis: $\Rightarrow$ folgt aus Satz 30.5; $\Leftarrow$ folgt aus $f = f^+ - f^-$ und Satz 30.7. □

Definition 30.10 Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ eine Meßraum. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt $(\mathcal{A})$-*Elementarfunktion* oder $(\mathcal{A})$-*einfach*, wenn $f(\Omega)$ endlich ist und wenn sie $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-meßbar ist. Die Menge aller $(\mathcal{A})$-einfachen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R})$.

Bemerkungen 30.11 (i) Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $(\alpha_j, A_j) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ für $j = 1, \dots, m$. Dann ist

$$f := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j} \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}).$$

Gilt $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ und $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$, so heißt $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$ *Normalform* der einfachen Funktion f.

(ii) Es gilt: Jede einfache Funktion besitzt eine eindeutig bestimmte Normalform und

$$\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}, m \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, A_j \in \mathcal{A}; A_j \cap A_k = \emptyset \text{ für } j \neq k \right\}.$$

(iii) Mit $f, g \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R})$ ist auch $|f|$, $g \cdot f$, $g \vee f$ und $g \wedge f$ in $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R})$.

Beweis zu (ii): Es sei $f \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R})$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $e_1, \dots, e_m$ in $\mathbb{R}$ mit $f(\Omega) \setminus \{0\} = \{e_1, \dots, e_m\}$. Sei $A_j := f^{-1}(e_j)$, dann ist $A_j \in \mathcal{A}$ und $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$. Also ist $\sum_{j=1}^{m} e_j 1_{A_j}$ die eindeutig bestimmte Normalform. Der zweite Teil der Aussage folgt mit der ersten Aussage in Bemerkung (i). □

Es bezeichne $\overline{\mathbb{R}}^+ := [0, \infty]$. Wir können nun den Raum $\mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ charakterisieren:

Satz 30.12 *Für $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ sind äquivalent.*

(i) $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$
(ii) *Es gibt eine wachsende Folge $(f_j)_j$ in $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ mit $f_j \to f$ für $j \to \infty$.*

Beweis: $(ii) \Rightarrow (i)$: folgt sofort aus Satz 30.5.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Es sei $j \in \mathbb{N}$ und

$$A_{j,k} := \begin{cases} [k2^{-j} \leq f < (k+1)2^{-j}] & , \ k = 0, \dots, j2^j - 1 \\ [f \geq j] & , \ k = j2^j. \end{cases}$$

Die Mengen $A_{j,k}$ sind für $k = 0, \dots, j2^j$ disjunkt und liegen in $\mathcal{A}$ gemäß Satz 30.3. Dann gehört

$$f_j := \sum_{k=0}^{j2^j} k2^{-j} \ 1_{A_{j,k}}, \ j \in \mathbb{N},$$

zu $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$. f_{j+1} kann auf $A_{j,k}$ nur die Werte $2^{-j-1}(2k)$ und $2^{-j-1}(2k+1)$ für $k = 0, \dots, j2^j - 1$ annehmen, denn:

$$A_{j,k} = \left[\frac{2k}{2^{j+1}} \leq f < \frac{2k+1}{2^{j+1}}\right] \cup \left[\frac{2k+1}{2^{j+1}} \leq f < \frac{2(k+1)}{2^{j+1}}\right] = A_{j+1,2k} \cup A_{j+1,2k+1}.$$

Dann ist

$$f_{j+1}|_{A_{j+1,2k}} = (2k)\, 2^{-j-1} = f_j|_{A_{j,k}}$$

und

$$f_{j+1}|_{A_{j+1,2k+1}} = (2k+1)\, 2^{-j-1} > f_j|_{A_{j,k}} \ .$$

Auf $A_{j,j\,2^j}$ kann f_{j+1} nur Werte $\geq j$ annehmen:

$$[f \geq j] = [f \geq j+1] \cup [j \leq f < j+1].$$

Also folgt

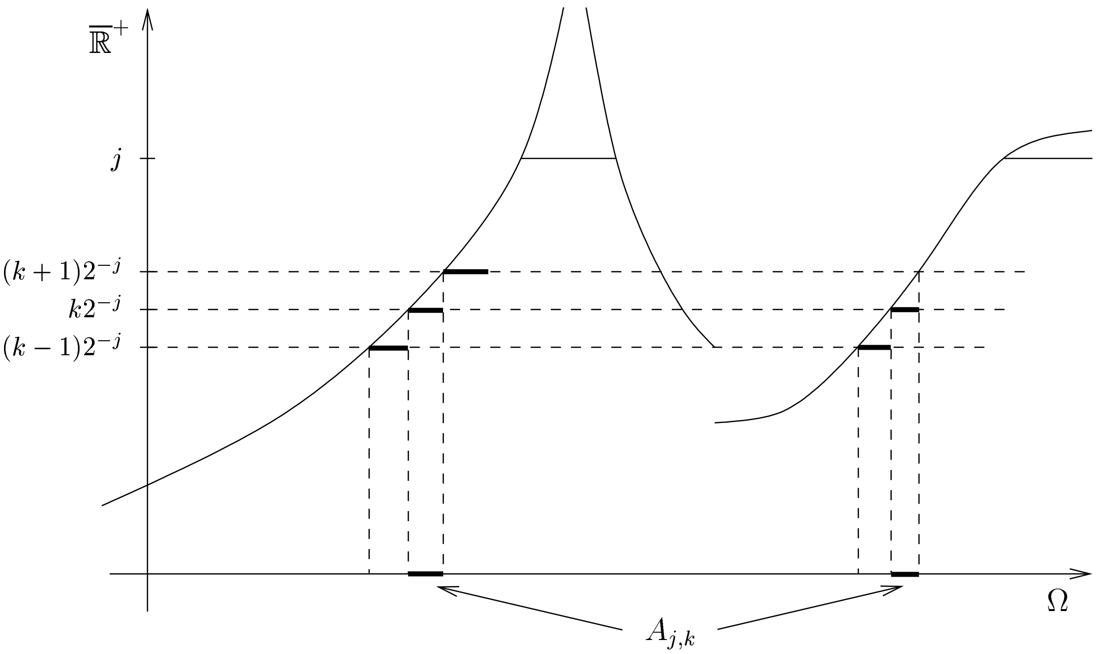
$$f_{j+1}|_{[f \geq j+1]} = j + 1 > f_j|_{[f \geq j+1]} = j$$

und

$$f_{j+1}|_{[j \leq f < j+1]} \geq j = f_j|_{[j \leq f < j+1]} \ .$$

Daher ist $0 \leq f_j \leq f_{j+1}$ für $j \in \mathbb{N}$.

Es sei nun $x \in \Omega$. Ist $f(x) = +\infty$, so gilt $f_j(x) = j$, $j \in \mathbb{N}$, und somit $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$. Ist $f(x) < \infty$, so gilt für $j > f(x)$, dass x in einer Menge $A_{j,k}$, $k = 0, \dots, j\,2^j - 1$ liegt. Es gilt $f_j(x) \leq f(x) < f_j(x) + 2^{-j}$, also auch hier $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$. Somit ist die punktweise Konvergenz gezeigt.



$\square$

Korollar 30.13

(i) *Zu jedem $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ gibt es eine Folge $(f_j)_j$ in $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f_j \to f$.*
(ii) *Es sei $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \mathbb{R}^+)$ eine beschränkte Abbildung. Dann gibt es eine wachsende Folge $(f_j)_j$ in $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Zu (i): Es gilt $f = f^+ - f^-$. Somit folgt die Behauptung aus Satz 30.12 und der Tatsache, das

$$\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$$

im Sinne von Untervektorräumen.

Zu (ii): Wenn $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \mathbb{R}^+)$ eine beschränkte Abbildung ist, so folgt für die im Beweis von Satz 30.12 konstruierte Folge $(f_j)_j$:

$$f_j(x) \leq f(x) < f_j(x) + 2^{-j}$$

für $j > \|f\|_\infty$, also konvergiert $(f_j)_j$ gegen f gleichmäßig. $\square$

KAPITEL 31

Integrierbare Funktionen

Entlang der Diskussion meßbarer numerischer Funktionen, definiert auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, ergibt sich die Konstruktion des Integrals von numerischen Funktionen bezüglich des Maßes μ in drei Schritten. Für $f = 1_A$, $A \in \mathcal{A}$, soll $\int f d\mu := \mu(A)$ sein. Für einfache Funktionen $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \, 1_{A_j}$ wird dann $\sum_{j=1}^m \alpha_j \, \mu(A_j)$ der Kandidat für das Integral sein. Für nicht–negative meßbare numerische Funktionen wollen wir dann die Approximierbarkeit durch eine wachsende Folge von einfachen Funktionen nutzen. Schliesslich wird für eine beliebige meßbare numerische Funktion ihre Zerlegung in den Positiv– und Negativteil verwendet.

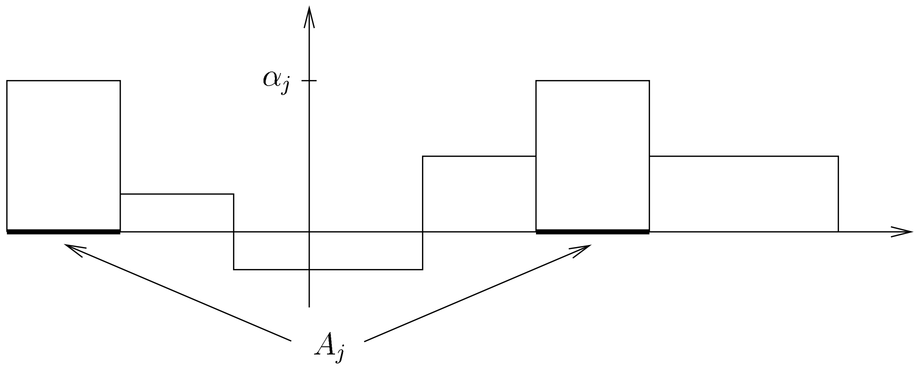
Wir vereinbaren im folgenden einfache Funktionen stets durch ihre Normalform darzustellen, wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird. Ferner setzen wir $\infty \cdot 0 := -\infty \cdot 0 := 0$. Diese Vereinbarung ist in der Integrationstheorie üblich und nützlich, um zum Beispiel einfache Funktionen über ihren ganzen Definitionsbereich integrieren zu können. Es ist eine Multiplikation der Elemente $+\infty$ und $-\infty$ mit dem Nullvektor 0 in $\mathbb{R}$ (oder allgemeiner dem Nullvektor 0 eines Vektorraums), und keine weitere Rechenregel in $\overline{\mathbb{R}}$. Wir erinnern daran, dass $\overline{\mathbb{R}}$ kein Körper ist und in $\overline{\mathbb{R}}$ Ausdrücke wie $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\infty}$, $\frac{\pm\infty}{-\infty}$, $\frac{0}{0}$ und $\frac{\pm\infty}{0}$ *nicht definiert* sind.

Ferner sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ stets ein Maßraum.

Definition 31.1 Für $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j} \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R})$ (Normalform) heißt

$$\int_\Omega f d\mu := \int f d\mu := \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j)$$

Integral von f (über Ω) bezüglich des Maßes μ. Weiter heißt $\int_A f d\mu := \int_\Omega 1_A f d\mu$ für $A \in \mathcal{A}$ *Integral* von f über A bezüglich des Maßes μ.



Bemerkung 31.2 (i) Nach der Bemerkung 30.11 (ii) ist $\int f\, d\mu$ wohldefiniert. Nach Bemerkung 30.11 (iii) ist auch $\int_A f\, d\mu$ für $A \in \mathcal{A}$ wohldefiniert.

(ii) Ist $f = \sum_{k=1}^n \beta_k 1_{B_k}$ mit $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ mit $B_j \cap B_k = \emptyset$ für $j \neq k$ (nicht notwendig die Normalform!) eine $\mathcal{A}$-einfache Funktion, so gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{k=1}^n \beta_k\, \mu(B_k).$$

Beweis zu (ii): Es sei $\sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j}$ die Normalform von f. Sei $A_{m+1} = \bigcap_{j=1}^m A_j^c$, $B_{n+1} = \bigcap_{k=1}^n B_k^c$ und $\alpha_{m+1} = 0$, $\beta_{n+1} = 0$. Dann gilt $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m+1} A_j = \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k$ und $A_j = \bigcup_{k=1}^{n+1}(A_j \cap B_k)$ und $B_k = \bigcup_{j=1}^{m+1}(B_k \cap A_j)$ für $j = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$. Die Mengen $A_j \cap B_k$ sind paarweise disjunkt. Daher folgt

$$\mu(A_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_j \cap B_k)\ , \quad \mu(B_k) = \sum_{j=1}^{m+1} \mu(B_k \cap A_j).$$

Ist $A_j \cap B_k \neq \emptyset$, so ist $\alpha_j = \beta_k$, also

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\, d\mu &= \sum_{j=1}^m \alpha_j\, \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k \sum_{j=1}^{m+1} \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^n \beta_k\, \mu(B_k)\ . \end{aligned}$$

□

Satz 31.3 *Das Integral $\int_\Omega \cdot\, d\mu \colon \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist linear. Für $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \cap B = \emptyset$ gilt*

$$\int_{A \cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu, \quad f \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}).$$

Weiter gilt

$$|\int_A f\, d\mu| \leq \int_A |f|\, d\mu \leq \|f\|_\infty\, \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}, \ f \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R})$$

und $\int_A f\, d\mu \leq \int_A g\, d\mu$ für $f, g \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f \leq g$ und $A \in \mathcal{A}$.

Beweis: Die Gleichheit $\int_\Omega \alpha f\, d\mu = \alpha \int_\Omega f\, d\mu$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist sofort klar. In der Notation wie im Beweis der Bemerkung 31.2 (ii) gilt

$$1_{A_j} = \sum_{k=1}^{n+1} 1_{A_j \cap B_k} \text{ und } 1_{B_k} = \sum_{j=1}^{m+1} 1_{A_j \cap B_k}.$$

Wenn nun $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j}$ und $g = \sum_{k=1}^n \beta_k 1_{B_k}$, so folgt

$$f + g = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{n+1} (\alpha_j + \beta_k) 1_{A_j \cap B_k}.$$

Dies ist im allgemeinen keine Normalform. Doch mit Bemerkung 31.2 (ii) folgt die behauptete Linearität. Da weiter $1_{A\cup B}\, f = 1_A\, f + 1_B\, f$ gilt, folgt somit die zweite Aussage. Die dritte Aussage folgt, da mit f auch $|f|$ einfach ist und die Dreiecksungleichung gilt. Weiter ist $\int_A h\, d\mu \geq 0$ für $h \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$, also folgt mit der Linearität auch die letzte Behauptung. □

Bisher brauchten wir nur die endliche Additivität von μ. Die Resultate 31.2 und 31.3 gelten auch für Inhalte auf Ringen und Algebren. Wir wollen nun das Integral für nichtnegative $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktionen bestimmen. Nach Satz 30.12 existiert zu $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ eine Folge $(f_j)_j$ in $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ mit $f_j \uparrow f$. Es bietet sich daher die Definition $\int_\Omega f\, d\mu := \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j\, d\mu$ an. Tatsächlich ist diese Definition sinnvoll, da sie unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge $(f_j)_j$ ist:

Satz 31.4 *Für jede wachsende Folge $(f_j)_j$ in $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ und jedes $f \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ mit $f \leq \sup_j f_j$ gilt: $\int_\Omega f\, d\mu \leq \sup_j \int_\Omega f_j\, d\mu$.*

Beweis: Es seien $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{A_i}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ und $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ disjunkt. Zu $\beta > 1$ und $j \in \mathbb{N}$ sei $B_j := [\beta\, f_j \geq f]$. Nach Korollar 30.8 liegen diese Mengen in der σ-Algebra $\mathcal{A}$. Ist $x \in \Omega$ mit $f(x) = 0$, so ist $x \in B_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Ist $f(x) > 0$, so ist $\lim_{k\to\infty} \beta\, f_k(x) > f(x)$. Also ist $x \in B_j$ für hinreichend große $j \in \mathbb{N}$. Somit folgt $B_j \uparrow \Omega$. Nach Definition von B_j ist $\beta\, f_j \geq f\, 1_{B_j}$. Es folgt mit Satz 27.15

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\, d\mu &= \sum_{i=1}^m \alpha_i\, \mu(A_i) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^m \alpha_i\, \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f\, 1_{B_j}\, d\mu \leq \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \beta\, f_j\, d\mu = \beta \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j\, d\mu.\end{aligned}$$

Für $\beta \downarrow 1$ folgt die Behauptung. □

Korollar 31.5 *Für zwei wachsende Folgen $(f_j)_j$, $(g_j)_j$ in $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ gilt: Ist $\sup_j f_j = \sup_j g_j$, so folgt*

$$\sup_j \int_\Omega f_j\, d\mu = \sup_j \int_\Omega g_j\, d\mu.$$

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ ist $g_k \leq \sup_j f_j$, also mit Satz 31.4

$$\int_\Omega g_k\, d\mu \leq \sup_j \int_\Omega f_j\, d\mu, \text{ also } \sup_k \int_\Omega g_k\, d\mu \leq \sup_j \int_\Omega f_j\, d\mu.$$

Die Symmetrie dieses Arguments liefert die Behauptung. □

Definition 31.6 Es seien $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ und $(f_j)_j$ eine Folge aus $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ mit $f_j \uparrow f$. Dann heißt der von der Auswahl der Folge $(f_j)_j$ unabhängige Grenzwert

$$\int_\Omega f\, d\mu := \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j\, d\mu = \sup_j \int_\Omega f_j\, d\mu$$

das *Integral* von f (über Ω) bezüglich des Maßes μ, kurz das μ-Integral von f. Wir verwenden im Weiteren auch die Symbole

$$\int f\,d\mu,\quad \int_\Omega f(x)\,d\mu(x),\quad \int_\Omega f(x)\,\mu(dx).$$

Wir haben in Satz 31.3 gesehen, dass das Integral auf dem Raum der einfachen Funktionen linear und monoton ist. Wir zeigen nun, dass diese Eigenschaften bei der Ausdehnung des Integrals auf den Raum $\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ erhalten bleiben:

Satz 31.7 (i) *Für $f,g\in\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ gilt*

$$\int_\Omega \big(\alpha\, f+\beta\, g\big)\,d\mu=\alpha\int_\Omega f\,d\mu+\beta\int_\Omega g\,d\mu.$$

(ii) *Für $f,g\in\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ mit $f\le g$ gilt*

$$\int_\Omega f\,d\mu\le\int_\Omega g\,d\mu.$$

Beweis: zu (i): Zu f und g existieren Folgen $(f_j)_j$ und $(g_j)_j$ in $\mathcal{EF}(\Omega,\mathbb{R}^+)$ mit $f_j\uparrow f$ und $g_j\uparrow g$, also $f_j+g_j\uparrow f+g$. Somit

$$\int (f+g)\,d\mu=\lim_{j\to\infty}\int (f_j+g_j)\,d\mu=\lim_{j\to\infty}\int f_j\,d\mu+\lim_{j\to\infty}\int g_j\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu$$

nach Satz 31.3. Für $\alpha\in\mathbb{R}^+$ folgt analog $\int\alpha\, f\,d\mu=\alpha\int f\,d\mu$.

zu (ii): Mit $g=f+(g-f)$ und $g-f\in\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ ergibt (i):

$$\int g\,d\mu=\int f\,d\mu+\int (g-f)\,d\mu\ge\int f\,d\mu.$$

□

Bemerkung 31.8 Es gilt

$$\mathcal{EF}(\Omega,\mathbb{R}^+)\subset\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+).$$

Denn für $f\in\mathcal{EF}(\Omega,\mathbb{R}^+)$ gilt $\lim_{j\to\infty}f_j=f$, wenn wir $f_j=f$, $j\in\mathbb{N}$, setzen. Somit ist die Definition 31.6 mit Definition 31.1 verträglich.

Korollar 31.9 *Für $f\in\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ gilt*

$$\int_\Omega f\,d\mu=\sup\left\{\int_\Omega g\,d\mu,\ g\in\mathcal{EF}(\Omega,\mathbb{R}^+),\ g\le f\right\}$$

(dies hätte die anfängliche Definition sein können).

Beweis: Für alle $g\in\mathcal{EF}(\Omega,\mathbb{R}^+)$ mit $g\le f$ ist $\int_\Omega f\,d\mu\ge\int_\Omega g\,d\mu$ (Monotonie, Satz 31.7), also

$$\int_\Omega f\,d\mu\ge\sup\left\{\int_\Omega g\,d\mu,\ g\in\mathcal{EF}(\Omega,\mathbb{R}^+),\ g\le f\right\}.$$

Die andere Richtung folgt sofort aus der Definition 31.6. □

Satz 31.4 gilt auch in $\mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ und geht auf B. Levi (1875 - 1961) zurück:

Satz 31.10 *(über die monotone Konvergenz, Levi)*

Es sei $(f_j)_j$ eine wachsende Folge in $\mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \big(\lim_{j\to\infty} f_j\big)\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j\, d\mu \quad in \quad \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Beweis: Es sei $f := \lim_{j\to\infty} f_j$, dann ist nach Satz 30.5 $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ und es ist $f_j \le f$, $j \in \mathbb{N}$. Also folgt aus Satz 31.7 (Monotonie) $\int f_j\, d\mu \le \int f\, d\mu$, $j \in \mathbb{N}$, also $\lim_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu \le \int f\, d\mu$.

Es sei nun $g \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ mit $g \le f$. Sei $\beta > 1$ und $B_j := [\beta\, f_j \ge g]$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $(B_j)_j$ eine wachsende Folge in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_j B_j = \Omega$ und $\beta\, f_j \ge g\, 1_{B_j}$ (siehe Beweis zu Satz 31.4). Es ist $g\, 1_{B_j} \uparrow g$, also folgt mit Satz 31.4

$$\int g\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int g\, 1_{B_j}\, d\mu \le \beta \lim_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu\ .$$

Da $\beta > 1$ beliebig war, folgt weiter

$$\int g\, d\mu \le \lim_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu$$

für jede einfache Funktion g mit $g \le f$. Mit Korollar 31.9 folgt

$$\int f\, d\mu \le \lim_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu.$$

□

Korollar 31.11 *Es sei $(f_j)_j$ eine Folge in $\mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^\infty \int f_j\, d\mu = \int \big(\sum_{j=1}^\infty f_j\big)\, d\mu \quad in \quad \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Beweis: Man wende Satz 31.10 für $(f_1 + \cdots + f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ an und verwende Satz 31.7 (Additivität des Integrals). □

Bemerkung 31.12 Die Aussage von Satz 31.10 über die monotone Konvergenz ist für nichtwachsende Folgen im allgemeinen falsch. Sei dazu $f_j = \frac{1}{j}\, 1_{[0,j]}$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $(f_j)_j$ eine Folge in $\mathcal{EF}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. In Bezug auf den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda^1)$ gilt: $\int f_j\, d\lambda^1 = 1$, $j \in \mathbb{N}$. Aber $(f_j)_j$ konvergiert gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen 0.

Beispiele 31.13 (i) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Meßraum und δ_ω das Dirac–Maß (siehe Beispiel 27.10 (i)). Dann ist $\int f\, d\delta_\omega = f(\omega)$ für jedes $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$, wobei μ beliebig gewählt ist. Nach Definition 31.6 genügt es, $f \in \mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ zu betrachten. Sei also $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i\, 1_{A_i}$ in Normaldarstellung gegeben.

Dann liegt ω in genau einer Menge A_j, also folgt

$$\int f\,d\delta_\omega = \sum_{i=1}^m \alpha_i\,\delta_\omega(A_i) = \alpha_j = f(\omega).$$

(ii) Es seien $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und ϱ das Zählmaß (siehe Beispiel 27.10 (ii)). Dann ist $\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ gleich der Menge aller numerischen Funktionen $f \geq 0$ auf Ω. Weiter ist

$$\int f\,d\varrho = \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

Setze dazu $f_n := f(n)\,1_{\{n\}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f_n \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$, sogar in $\mathcal{EF}(\Omega,\mathbb{R}^+)$, und mit $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ folgt aus Korollar 31.11 $f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ und

$$\int f\,d\varrho = \sum_{n=1}^\infty \int f_n\,d\varrho = \sum_{n=1}^\infty f(n)\,\varrho(\{n\}) = \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

Wählen wir $f_n\colon \mathbb{N} \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n(k) = a_{nk} \in \mathbb{R}$, $n,k \in \mathbb{N}$. Dann liefert Korollar 31.11 für alle $a_{nk} \in [0,\infty]$ $(n,k \in \mathbb{N})$

$$\sum_{k=1}^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty a_{nk}\Big) = \sum_{n=1}^\infty \Big(\sum_{k=1}^\infty a_{nk}\Big).$$

Dies ist für nichtnegative Doppelreihen sogar eine Erweiterung von Satz 6.20, da nicht $\sup_l \sum_{n,k=0}^l |a_{nk}| < \infty$ gefordert wird.

Wir beweisen nun eine Verallgemeinerung des Satzes über die monotone Konvergenz für beliebige nicht notwenigerweise wachsende Folgen in $\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$:

Satz 31.14 *(Lemma von Fatou) Für jede Folge $(f_j)_j$ in $\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ gilt*

$$\int \big(\liminf_j f_j\big)\,d\mu \leq \liminf_j \int f_j\,d\mu \quad \textit{in} \quad \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Beweis: Wir setzen $g_j = \inf_{k\geq j} f_k$. Nach Satz 30.5 ist $g_j \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Die Folge $(g_j)_j$ konvergiert wachsend gegen $\liminf_j f_j$. Also liefert Satz 31.10

$$\lim_{j\to\infty} \int g_j\,d\mu = \int \big(\liminf_j f_j\big)\,d\mu.$$

Weiter ist $g_j \leq f_k$, also $\int g_j\,d\mu \leq \int f_k\,d\mu$ für $k \geq j$. Also $\int g_j\,d\mu \leq \inf_{k\geq j} \int f_k\,d\mu$. Im Limes $j \to \infty$ folgt nun die Behauptung. $\square$

Nun dehnen wir den Integralbegriff auf geeignete meßbare Funktionen aus:

Definition 31.15 Man nennt $f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}})$ *μ-integrierbar*, wenn $\int_\Omega f^+\,d\mu < \infty$ und $\int_\Omega f^-\,d\mu < \infty$. Äquivalent dazu ist die Bedingung $\int_\Omega |f|\,d\mu < \infty$. In diesem

Fall heißt

$$\int_\Omega f\,d\mu := \int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu$$

das (μ-) *Integral* von f (über Ω). Ist f μ-integrierbar und $A \in \mathcal{A}$, so setzt man $\int_A f\,d\mu := \int 1_A f\,d\mu$ und nennt dies das μ-Integral von f über A. Wenn keine Verwechslungen möglich sind, lassen wir das Maß μ in der Bezeichnung weg und sprechen vom Integral von f und der Integrierbarkeit von f.

Bemerkungen 31.16

(i) Für $f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ ist $f^- = 0$, und somit ist Definition 31.15 mit Definition 31.6 verträglich.

(ii) Für $f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}}^+)$ gilt: f ist μ-integrierbar genau dann wenn $\int f\,d\mu < \infty$.

(iii) $f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}})$ heißt *quasi-integrierbar*, falls $\int f^+\,d\mu < \infty$ oder $\int f^-\,d\mu < \infty$. Wieder setzt man $\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$.

Satz 31.17 *Für die μ-Integrierbarkeit von $f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}})$ ist jede der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

(i) *f^+ und f^- sind μ-integrierbar.*
(ii) *Es gibt μ-integrierbare Funktionen $u \geq 0$, $v \geq 0$ mit $f = u - v$.*
(iii) *Es gibt eine μ-integrierbare Funktion g mit $|f| \leq g$.*
(iv) *$|f|$ ist μ-integrierbar.*

Beweis: Wir zeigen, dass $(i)--(iv)$ äquivalent sind, denn die μ-Integrierbarkeit von f ist äquivalent zu (i).

$(i) \Rightarrow (ii)$: Man setzt $u := f^+$, $v = f^-$ und verwendet $f = f^+ - f^-$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Mit u, v ist auch $u + v$ integrierbar (nach Satz 31.7). Es gilt

$$f = u - v \leq u \leq u + v$$

und

$$-f = v - u \leq v \leq u + v,$$

also setzt man $g := u + v$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Nach Satz 31.7 gilt $\int |f|\,d\mu \leq \int g\,d\mu < +\infty$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Es gilt $f^+ \leq |f|$ und $f^- \leq |f|$ und mit Satz 31.7 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 31.18 Aus (ii) in Satz 31.17 folgt $\int f\,d\mu = \int u\,d\mu - \int v\,d\mu$, denn $f = u - v = f^+ - f^-$, also $u + f^- = v + f^+$. Mit Satz 31.7 folgt $\int u\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int v\,d\mu + \int f^+\,d\mu$. □

Korollar 31.19 *Ist $f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}})$ μ-integrierbar, dann ist $\mu[|f| = \infty] = 0$. Sind $f, g \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\overline{\mathbb{R}})$ μ-integrierbar, so sind auch $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ μ-integrierbar.*

Beweis: Es gilt $A := [|f| = \infty] \in \mathcal{A}$ und $\infty \cdot 1_A \leq |f|$, also mit Satz 31.7

$$\infty \cdot \mu(A) = \int_\Omega \infty \cdot 1_A \, d\mu \leq \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty.$$

Somit folgt $\mu(A) = 0$. Es sind $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ in $\mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ (siehe Satz 30.5). Beide Funktionen werden durch $|f| + |g|$ majorisiert, und $|f| + |g|$ ist eine μ-integrierbare Funktion. Also folgt die Behauptung mit Satz 31.17. $\square$

Satz 31.20 *(Linearität und Monotonie des Integrals)*

(i) *Sind $f, g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ μ-integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f + g$ μ-integrierbar und $\int (\alpha f + g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ (hierfür muß $\alpha f + g$ wohldefiniert sein).*

(ii) *Sind $f, g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ μ-integrierbar, so gilt*

$$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu \quad \text{und} \quad \Big| \int f d\mu \Big| \leq \int |f| d\mu.$$

Beweis: zu (i): Die Funktion αf ist μ-integrierbar, denn sie ist meßbar und $|\alpha f| = |\alpha||f|$ ist nach Satz 31.7 μ-integrierbar. Es gilt $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ und $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ für $\alpha \geq 0$ und $(\alpha f)^+ = |\alpha| f^-$ und $(\alpha f)^- = |\alpha| f^+$ für $\alpha \leq 0$. Damit folgt

$$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu.$$

Weiter ist $f = f^+ - f^-$ und $g = g^+ - g^-$, also $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$. Mit Satz 31.7 sind $u := f^+ + g^+$ und $v := f^- + g^-$ μ-integrierbar. Also ist $f + g$ μ-integrierbar nach Satz 31.17 und die $f + g$ betreffende Behauptung folgt aus der Gleichheit $f + g = u - v$.

zu (ii): Aus $f \leq g$ folgt $f^+ \leq g^+$ und $f^- \geq g^-$, also $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ mit Satz 31.7. Da $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$, folgt $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$ aus dem gerade Bewiesenen, indem man speziell $g := |f|$ wählt. $\square$

Definition 31.21 Es bezeichne $\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ die Menge der reellwertigen μ-integrierbaren Funktionen.

Bemerkung 31.22 $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f \mapsto \int f \, d\mu$ ist eine *monotone Linearform.*

Bemerkung 31.23 Ist f μ-integrierbar, so auch $1_A \cdot f$ mit $A \in \mathcal{A}$, denn $|1_A \cdot f| \leq |f|$. Man verwende Satz 31.17. Damit ist $\int_A f d\mu := \int_\Omega 1_A f \, d\mu$ in Definition 31.15 ordentlich definiert. Die Abbildung $f \mapsto \int_A f d\mu$ ist eine Linearform auf $\mathcal{L}^1(\mu)$, $A \in \mathcal{A}$. Man kann Integrale über Mengen aus $\mathcal{A}$ auch gewinnen, indem man die Restriktion $\mu_A := \mu|_{A \cap \mathcal{A}}$ von μ auf die Spur σ-Algebra $A \cap \mathcal{A}$ betrachtet: Ist f' die Restriktion von f auf $A \in \mathcal{A}$, dann ist f' μ_A-integrierbar und

$$\int f' \, d\mu_A = \int_A f \, d\mu$$

(einfache Übung in drei Schritten!).

Beispiele 31.24 (i) Siehe Beispiel 31.13 (i): $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ ist genau dann δ_ω-integrierbar, wenn $f(\omega) \in \mathbb{R}$.

(ii) Siehe Beispiel 31.13 (ii): $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ ist ϱ-integrierbar (ϱ bezeichne das Zählmaß), wenn

$$\sum_{n \geq 1} |f(n)| < \infty.$$

KAPITEL 32

Fast überall bestehende Eigenschaften

Das μ-Integral wird sich als unempfindlich gegenüber Abänderungen des Integranden auf μ-Nullmengen erweisen, solange der Integrand meßbar bleibt. Um diese Eigenschaft formulieren zu können, hat sich der von Lebesgue eingeführte Begriff *fast überall* als zweckmäßig erwiesen. Im folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 32.1 Es sei E eine Eigenschaft, die für die Punkte aus Ω entweder richtig oder falsch ist. Man sagt, dass E *μ-fast überall* gilt (dass E für μ-fast alle $x \in \Omega$ richtig ist), wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass $E(x)$ für jedes $x \in N^c$ richtig ist. Abkürzend schreiben wir dafür *E gilt μ*–f.ü.

Beispiele 32.2

(i) Für $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $f \geq g$ μ–f.ü. genau dann, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt mit $f(x) \geq g(x)$ für jedes $x \in N^c$.

(ii) Es seien $f_j, f \in \mathbb{R}^\Omega$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(f_j)_j$ genau dann μ–f.ü. gegen f, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt mit $f_j(x) \to f(x)$ für $x \in N^c$.

(iii) $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann μ–f.ü. beschränkt, wenn es eine μ-Nullmenge N und ein $S \geq 0$ gibt mit $|f(x)| \leq S$ für jedes $x \in N^c$.

Es wird *nicht* gefordert, dass die Ausnahmemenge M der $x \in \Omega$, welche die Eigenschaft E nicht haben, zu $\mathcal{A}$ gehört. Es wird nur gefordert, dass M Teilmenge einer geeigneten μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ ist.

Satz 32.3

(i) *Für alle $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ gilt:*

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \ \mu\text{–f.ü.}$$

(ii) *Jedes $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ ist über eine beliebige μ-Nullmenge N integrierbar und es gilt*

$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

Beweis: zu (i): Da f meßbar ist, liegt $A := [f \neq 0] = [f > 0]$ in $\mathcal{A}$. Wir zeigen

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0 \ .$$

Es sei $\int_\Omega f \, d\mu = 0$. Es seien $A_n := [f > \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, also $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \uparrow A$. Aus $\frac{1}{n} 1_{A_n} \leq f$ folgt

$$0 \leq \frac{1}{n}\, \mu(A_n) = \int_\Omega \frac{1}{n}\, 1_{A_n} \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu = 0,$$

also $\mu(A_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, und somit ist $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Ist umgekehrt $\mu(A) = 0$, so ist mit $f \leq \infty \cdot 1_A$

$$0 \leq \int_\Omega f\, d\mu \leq \infty \cdot \int_\Omega 1_A\, d\mu = \infty \cdot \mu(A) = 0,$$

also folgt $\int_\Omega f\, d\mu = 0$.

zu (ii): Für $f \geq 0$ ist $f\,1_N \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ und μ–f.ü. Null, also ist nach (i) $\int_N f\, d\mu = \int_\Omega f\,1_N\, d\mu = 0$. Für ein $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ folgt die Behauptung dann durch Anwendung des Gezeigten auf f^+ und f^-. □

Der erste Teil von Korollar 31.19 liest sich nun so:

Korollar 32.4 *Jede μ-integrierbare Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist μ–f.ü. auf Ω reellwertig.*

In Kapitel 31 haben wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ der reellwertigen μ-integrierbaren Funktionen eingeführt. Wir versehen diesen Raum nun mit einer Halbnorm:

Definition 32.5 Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, so heißt $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ eine *Halbnorm* auf V, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $\|x\| \geq 0$
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Gilt $\|x\| = 0$ nur für $x = 0$, so heißt $\|\cdot\|$ eine Norm.

Satz 32.6 *Die Menge $\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Halbnorm*

$$\|f\|_1 := \int_\Omega |f|\, d\mu, \quad f \in \mathcal{L}^1.$$

Die Abbildung $I : \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}$, $I(f) := \int_\Omega f\, d\mu$, ist eine positive Linearform auf $\mathcal{L}^1$ mit der Eigenschaft

$$|I(f) - I(g)| \leq \|f - g\|_1, \quad f, g \in \mathcal{L}^1.$$

Beweis: In Satz 31.20 und Bemerkung 31.22 ist gezeigt worden, dass $\mathcal{L}^1$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und dass I eine Linearform ist. Für $f \in \mathcal{L}^1$ mit $f \geq 0$ gilt $I(f) \geq 0$. $\|\cdot\|_1$ ist eine Halbnorm, denn $\int |f|\, d\mu \geq 0$, und die anderen Eigenschaften sind unmittelbar klar. Weiter ist

$$\left|\int_\Omega (f - g)\, d\mu\right| \leq \int_\Omega |f - g|\, d\mu = \|f - g\|_1$$

für $f, g \in \mathcal{L}^1$. □

Bemerkung 32.7 $\|\cdot\|_1$ ist nicht notwendig eine Norm. Denn mit Satz 32.3 (i) gilt $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn $[|f| > 0]$ eine μ-Nullmenge ist. Gibt es also eine nicht-leere Nullmenge $A \in \mathcal{A}$, so ist $f := 1_A \in \mathcal{L}^1$, $f \neq 0$, aber $\|f\|_1 = 0$.

Satz 32.8 *Es seien $f, g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$, die μ–f.ü. auf Ω gleich sind. Dann gilt:*

(i) *Ist $f \geq 0$ und $g \geq 0$, so folgt $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.*
(ii) *Ist f μ-integrierbar, so ist g μ-integrierbar und $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.*

Beweis: zu (i): Es sei $N := [f \neq g]$. Also ist $N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$ nach Voraussetzung. Somit ist $\int_N f\,d\mu = \int_N g\,d\mu = 0$ nach Satz 32.3 (ii). Mit $M := N^c$ ist dann

$$\int_M f\,d\mu = \int_\Omega 1_M f\,d\mu = \int_\Omega 1_M\,g\,d\mu = \int_M g\,d\mu.$$

Also folgt die Behauptung, da $\int_{M \cup N} f\,d\mu = \int_M f\,d\mu + \int_N f\,d\mu$ für $M \cap N = \emptyset$ (siehe Satz 31.3 und die einfache Ausweitung auf μ-integrierbare Funktionen).

zu (ii): Es ist $f^+ = g^+$ μ–f.ü. und $f^- = g^-$ μ–f.ü. Also folgt mit (i) $\int f^+\,d\mu = \int g^+\,d\mu$ und $\int f^-\,d\mu = \int g^-\,d\mu$. Da f μ-integrierbar ist, sind beide Integrale nichtnegative reelle Zahlen. Daraus folgt die Behauptung. □

Korollar 32.9 *Es seien $f, g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ und $|f| \leq g$ μ–f.ü. Dann ist mit g auch f μ-integrierbar.*

Beweis: Wir setzen $g' := g \vee |f|$, dann ist g' meßbar und $g' = g$ μ–f.ü. und $|f| \leq g'$. Nach Satz 32.8 ist g' somit μ-integrierbar und nach Satz 31.17 dann auch f. □

Es sei N eine μ-Nullmenge und f eine auf N^c definierte, $N^c \cap \mathcal{A}$-meßbare Funktion. f heißt *μ–f.ü. definierte*, $\mathcal{A}$-meßbare Funktion. f kann zu einer $\mathcal{A}$-meßbaren Funktion auf Ω fortgesetzt werden: man setze

$$f_{N^c}(x) := \begin{cases} f(x)\,, & x \in N^c \\ 0\,, & x \in N. \end{cases}$$

Jede andere Fortsetzung von f auf Ω ist dann μ–f.ü. gleich f_{N^c}. Nach Satz 32.8 sind somit alle Fortsetzungen μ-integrierbar oder keine der Fortsetzungen ist μ-integrierbar. Sind sie μ-integrierbar, so haben alle dasselbe μ-Integral. Dies führt zu der folgenden Definition:

Definition 32.10 Es sei f eine μ–f.ü. auf Ω definierte, $\mathcal{A}$-meßbare, numerische Funktion. Sie heißt *μ-integrierbar*, wenn sie zu einer μ-integrierbaren, auf ganz Ω definierten Funktion f' fortgesetzt werden kann. $\int f'\,d\mu$ heißt dann das μ-Integral von f. Es wird auch mit $\int f\,d\mu$ bezeichnet.

Bemerkung 32.11 Es seien f, g zwei μ-integrierbare Funktionen. Nach Korollar 32.4 ist $\mathcal{A} \ni N := \{|f| = \infty\} \cup \{|g| = \infty\}$ eine μ-Nullmenge, also ist $f + g$ auf N^c definiert, also im Sinne der Definition 32.10 integrierbar. Es gilt $\int (f + g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$ (siehe Satz 31.20). Die zusätzliche Bemerkung, $f + g$ sei überall wohldefiniert, die eigentlich bei der Betrachtung einer Summe zweier meßbarer numerischer Funktionen erfolgen muß, kann also weggelassen werden.

Wir betrachten nun einen zentralen *Vertauschungssatz* für Integrale und Grenzwerte, den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz:

Satz 32.12 *(von der majorisierten Konvergenz, Lebesgue)*

Die Funktionen $(f_j)_j$ *und* f *seien in* $\mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ *und* $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ μ*–f.ü. Ferner gebe es ein* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R}^+)$ *mit* $|f_j| \leq g$ μ*–f.ü.,* $j \in \mathbb{N}$*. Dann sind* f *und* f_j*,* $j \in \mathbb{N}$*,* μ*-integrierbar und es gelten*

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu = \int f \, d\mu$$

und

$$\lim_{j\to\infty} \int |f_j - f| \, d\mu = 0.$$

Beweis: Nach Korollar 32.9 sind f und alle f_j, $j \in \mathbb{N}$, μ-integrierbar. Nach den μ–fast überall Resultaten (siehe Satz 32.4, 32.8) haben ohne Einschränkung der Allgemeinheit f und g und alle f_j, $j \in \mathbb{N}$, Werte in $\mathbb{R}$ (überall) und überall gilt $\lim_{j\to\infty} f_j = f$, $|f_j| \leq g$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$g_j := |f| + g - |f_j - f|$$

in $\mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ und das Lemma von Fatou (Satz 31.14) liefert

$$\begin{aligned} \int \big(|f| + g\big) \, d\mu = \int \big(\liminf_j g_j\big) \, d\mu \;&\leq\; \liminf_j \int g_j \, d\mu \\ &=\; \int \big(|f| + g\big) \, d\mu - \limsup_j \int |f_j - f| \, d\mu. \end{aligned}$$

Hier ist das Integral $\int \big(|f| + g\big) \, d\mu$ endlich, also folgt $\lim_{j\to\infty} \int |f_j - f| \, d\mu = 0$ und somit liefert $| \int f_j \, d\mu - \int f \, d\mu| \leq \int |f_j - f| \, d\mu$ die Behauptung. □

Wir haben somit bereits *die drei wichtigsten* Konvergenzsätze der Integrationstheorie kennengelernt : Satz 31.10 *über die monotone Konvergenz*, Satz 31.14, das *Lemma von Fatou*, und Satz 32.12 *von der majorisierten Konvergenz*. Die Lebesguesche Integrationstheorie ermöglicht sehr allgemeine und flexible Kriterien für die Vertauschbarkeit von Grenzwerten und Integralen. So ist in Satz 32.12 nur punktweise Konvergenz vorausgesetzt. Bei den Cauchy-Riemann-Integralen haben wir f_j auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definiert und bei $f_j \to f$ die *gleichmäßige* Konvergenz gegen f gefordert, um den Konvergenzsatz Satz 17.1 erhalten zu können.

Abschließend betrachten wir eine Anwendung von Satz 32.12. Sie betrifft die Untersuchung von *parameterabhängigen* Integralen:

Satz 32.13 *(Stetigkeit von Parameterintegralen)*

Es sei M *ein metrischer Raum und* $f\colon \Omega \times M \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung mit*

(i) $f(\cdot, m) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ *für alle* $m \in M$,
(ii) $f(x, \cdot) \in C(M, \mathbb{R})$ *für* μ*–fast alle* $x \in \Omega$.
(iii) *Es gibt ein* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ *mit* $|f(x, m)| \leq g(x)$ *für* $(x, m) \in \Omega \times M$.

Dann ist $F\colon M \to \mathbb{R}$ *mit* $m \mapsto \int_\Omega f(x, m)\, \mu(dx)$ *wohldefiniert und stetig.*

Beweis: Die Wohldefiniertheit folgt mit (i). Sei $m \in M$ und $(m_j)_j$ eine Folge mit $\lim_{j\to\infty} m_j = m$. Man setze $f_j := f(\cdot, m_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus (ii), dass $f_j \to f$ μ–f.ü. Mit (i) und (ii) kann Satz 32.12 auf $(f_j)_j$ angewendet werden:

$$\lim_{j\to\infty} F(m_j) = \lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu = \int \lim_{j\to\infty} f_j \, d\mu = \int f(x, m)\, \mu(dx) = F(m).$$

Das ist die Stetigkeit in metrischen Räumen. □

KAPITEL 33

Die Lebesgueschen Räume $\mathcal{L}^p$ und L^p

Gegeben seien der Meßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und eine numerische Funktion $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$. Es sei weiter ϱ ein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mit $\varrho(\{n\}) = \alpha_n$ (der Fall $\alpha_n = 1$ liefert das Zählmaß). Dann gilt analog zu Beispiel 31.13 (ii)

$$\int f \, d\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \, \varrho(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \, \alpha_n.$$

Ist nun $\alpha_n = n^{-p-1}$, $p \in (1, \infty)$, und $f(n) = n$, so ist f ϱ-integrierbar, aber die p-te Potenz $f^p(n) = n^p$ ist *nicht* ϱ-integrierbar. Insbesondere ist im Fall $p = 2$ die Funktion $f^2 = f \cdot f$ nicht ϱ-integrierbar. Somit ist das Produkt zweier integrierbarer Funktionen im allgemeinen nicht wieder integrierbar. Wir wollen in diesem Kapitel diejenigen meßbaren numerischen Funktionen untersuchen, für welche $|f|^p$ integrierbar ist.

Im folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Ist $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$, so ist $|f|^p$, $p \in (0, \infty)$, auch in $\mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$, denn für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$[|f|^p \geq \alpha] = \begin{cases} [|f| \geq \alpha^{1/p}] \,, & \alpha > 0, \\ \Omega \,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also liefert Satz 30.3 die Behauptung.

Definition 33.1 Es sei $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \mathbb{R})$. Man nennt f *μ-wesentlich beschränkt*, wenn es ein $\alpha \geq 0$ gibt mit $\mu([|f| > \alpha]) = 0$. Dann heißt

$$\|f\|_\infty := \text{ess-sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf\{\alpha \geq 0 \colon \mu([|f| > \alpha]) = 0\}$$

μ-wesentliches Supremum von f. Wir setzen

$$\|f\|_p := \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}, \ \ p \in (0, \infty),$$

mit der Vereinbarung $\infty^{1/p} := \infty$. Dann heißt

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu, \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mu, \mathbb{R}) : \|f\|_p < \infty\}, \ \ p \in (0, \infty],$$

Lebesguescher Raum über Ω bezüglich μ. Für $p \in [1, \infty]$ ist der zu p *duale Exponent* gegeben durch

$$p' := \begin{cases} \infty & , \ p = 1 \\ p/(p-1) & , \ p \in (1, \infty) \\ 1 & , \ p = \infty. \end{cases}$$

Mit der Festsetzung des dualen Exponenten gilt

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\quad p\in[1,\infty].$$

Wir werden zeigen, dass für $p\geq 1$ die Abbildung $\|\cdot\|_p:\mathcal{L}^p(\Omega,\mu,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ eine Halbnorm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{L}^p:=\mathcal{L}^p(\Omega,\mu,\mathbb{R})$ ist und das $(\mathcal{L}^p,\|\cdot\|_p)$ vollständig ist. Dabei werden wir noch klären, was Vollständigkeit für einen Vektorraum, versehen mit einer Halbnorm, bedeutet.

Bemerkungen 33.2 (i) Eine Funktion $f\in\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\mathbb{R})$ ist genau dann μ-wesentlich beschränkt, wenn $\|f\|_\infty<\infty$.

(ii) Für $f\in\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\mathbb{R})$ gilt $|f|\leq\|f\|_\infty$ μ–f.ü., denn im Fall $\|f\|_\infty=\infty$ ist dies klar. Gilt $\|f\|_\infty<\infty$, so ist $[|f|>\|f\|_\infty+2^{-j}]$ für jedes $j\in\mathbb{N}$ eine μ-Nullmenge, also auch $[|f|>\|f\|_\infty]=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}[|f|>\|f\|_\infty+2^{-j}]$.

(iii) Es seien f und g μ-wesentlich beschränkt und $\alpha\in\mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha f+g$ μ-wesentlich beschränkt und es gilt

$$\|\alpha f+g\|_\infty\leq|\alpha|\,\|f\|_\infty+\|g\|_\infty.$$

Denn gemäß (ii) gibt es μ-Nullmengen M und N mit $|f(x)|\leq\|f\|_\infty$ für $x\in M^c$ und $|g(x)|\leq\|g\|_\infty$ für $x\in N^c$. Also gilt

$$|\alpha f(x)+g(x)|\leq|\alpha|\,\|f\|_\infty+\|g\|_\infty,\quad x\in(M\cup N)^c=M^c\cap N^c.$$

Satz 33.3 *$\mathcal{L}^p$ ist ein reeller Vektorraum für $1\leq p\leq\infty$ (ein Untervektorraum von $\mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\mathbb{R})$).*

Beweis: Für $p=\infty$ folgt dies aus Bemerkung 33.2 (iii). Im Fall $p=1$ wurde in Satz 31.20 bereits betrachtet. Es sei $p\in(1,\infty)$. Betrachte

$$|a+b|^p\leq\big(2(|a|\vee|b|)\big)^p\leq 2^p\left(|a|^p+|b|^p\right),\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Dann ist mit $f,g\in\mathcal{L}^p$

$$\int_\Omega|f+g|^p\,d\mu\leq 2^p\left(\int_\Omega|f|^p\,d\mu+\int_\Omega|g|^p\,d\mu\right)<\infty,$$

also $\|f+g\|_p<\infty$. $\alpha f\in\mathcal{L}^p$ für $\alpha\in\mathbb{R}$ ist klar. □

Satz 33.4 *(Höldersche Ungleichung)*
Es sei $p\in[1,\infty]$. Für $f\in\mathcal{L}^p$ und $g\in\mathcal{L}^{p'}$ ist $f\,g\in\mathcal{L}^1$ und

$$\left|\int_\Omega f\,g\,d\mu\right|\leq\int_\Omega|f\,g|\,d\mu\leq\|f\|_p\,\|g\|_{p'}.$$

Im Fall $p=p'=2$ heißt die Ungleichung die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (vgl. Satz 12.19 und Korollar 12.20).

Korollar 33.5 *Wähle für μ das Zählmaß ϱ auf $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, so folgt*

$$\sum_{n\geq1}|x_ny_n|\leq\left(\sum_{n\geq1}|x_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n\geq1}|y_n|^{p'}\right)^{1/p'}$$

für $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis von Satz 33.4: Wir betrachten zuerst den Fall $p = 1$. Nach Bemerkung 33.2 (ii) existiert eine μ-Nullmenge N mit $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$, $x \in N^c$. Dann folgt

$$\int_{N^c} |f\,g|\,d\mu \leq \|g\|_\infty \int_{N^c} |f|\,d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty$$

nach Satz 32.8 und Satz 31.20. Dann ist $f\,g$ in $\mathcal{L}^1$ nach Satz 32.8 und Satz 31.17. Weiter folgt mit Satz 31.20

$$\Big|\int_\Omega f\,g\,d\mu\Big| \leq \int_\Omega |f\,g|\,d\mu = \int_{N^c} |f\,g|\,d\mu \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Der Fall $p = \infty$ wird analog zu $p = 1$ behandelt.

Es sei nun $p \in (1, \infty)$: Für $f = 0$ μ–f.ü. oder $g = 0$ μ–f.ü. verschwindet $f\,g$ μ–f.ü. und Satz 32.3 (i) liefert die Behauptung. Sonst gilt $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_{p'} > 0$ (man verwende $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ–f.ü. für $f \in \mathcal{L}^1$, Satz 32.3 (i)). Nach Korollar 12.18 gilt

$$\xi\,\eta \leq \frac{1}{p}\xi^p + \frac{1}{p'}\eta^{p'}$$

für alle $\xi, \eta \in [0, \infty]$. Setzen wir nun $\xi := \frac{|f|}{\|f\|_p}$ und $\eta := \frac{|g|}{\|g\|_{p'}}$, so folgt

$$\frac{|f\,g|}{\|f\|_p\,\|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'}\,\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}\,,$$

also

$$\int_\Omega |f\,g|\,d\mu \leq \frac{1}{p}\,\|f\|_p^{1-p}\,\|g\|_{p'} \int_\Omega |f|^p\,d\mu + \frac{1}{p'}\,\|f\|_p\,\|g\|_{p'}^{1-p'} \int_\Omega |g|^{p'}\,d\mu = \|f\|_p\,\|g\|_{p'},$$

und somit $f\,g \in \mathcal{L}^1$ mit Satz 31.17 und

$$\Big|\int_\Omega f\,g\,d\mu\Big| \leq \|f\,g\|_1 \leq \|f\|_p\,\|g\|_{p'}.$$

□

Die nun folgende Ungleichung von Minkowski bringt zum Ausdruck, dass $\|\cdot\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ der Dreiecks-Ungleichung genügt.

Satz 33.6 *(Minkowskische Ungleichung)*
Es sei $p \in [1, \infty]$. *Für* $f, g \in \mathcal{L}^p$ *ist* $f + g \in \mathcal{L}^p$ *und*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis: Der Fall $p = 1$ folgt mit Satz 32.6. Der Fall $p = \infty$ folgt mit Bemerkung 33.2 (iii). Es sei fortan $p \in (1, \infty)$. Auf Grund der Äquivalenz

$$|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^{p'} \Leftrightarrow |f + g| \in \mathcal{L}^p$$

folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$\int_\Omega |h| \cdot |f + g|^{p-1}\,d\mu \leq \|h\|_p \cdot \|\,|f + g|^{p-1}\,\|_{p'} = \|h\|_p \cdot \|f + g\|_p^{p/p'}$$

für $h \in \mathcal{L}^p$, also

$$\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu \leq \int_\Omega |f|\cdot|f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_\Omega |g|\cdot|f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\cdot\|f+g\|_p^{p/p'} .$$

Es ist $\|f+g\|_p < \infty$ und $p/p' = p-1$, und somit folgt die Behauptung. □

Satz 33.7 *Für $p \in [1,\infty]$ ist $\mathcal{L}^p$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_p$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$.*

Beweis: Die Eigenschaft, $\mathbb{R}$-Vektorraum zu sein, ist in Satz 33.3 bewiesen worden. Im Fall $p = 1$ folgt aus Satz 32.6, dass $\|\cdot\|_1$ eine Halbnorm ist. Der Fall $p \in (1,\infty]$ folgt aus der Minkowskischen Ungleichung. □

Bemerkung 33.8 Es sei $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\mathbb{R})\colon f = 0 \ \mu\text{–f.ü.}\}$. Dann sind für $f \in \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\mathbb{R})$ äquivalent:

(i) $\|f\|_p = 0$ für alle $p \in [1,\infty]$,
(ii) $\|f\|_p = 0$ für ein $p \in [1,\infty]$,
(iii) $f \in \mathcal{N}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): ist klar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): zu zeigen ist $\|f\|_1 = 0$ (denn dies ist äquivalent zu $f = 0$ μ–f.ü., siehe Satz 32.3 (i)). Aber mit $|f| \leq |f|^p$ ist dies klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Für $p \in [1,\infty)$ ist dies mit Satz 32.8 (ii) klar. Der Fall $p = \infty$ ist klar. □

Bemerkung 33.9 Für $p \in [1,\infty]$ ist

$$\mathcal{EF}(\Omega,\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^p(\Omega,\mu,\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\mathbb{R})$$

im Sinne von Untervektorräumen.

Beweis: Jede $\mathcal{A}$-einfache Funktionen ist μ-wesentlich beschränkt. Es sei $p \in [1,\infty)$, und $\varphi = \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j} \in \mathcal{EF}(\Omega,\mathbb{R})$ sei die Normalform von φ. Dann gilt die Abschätzung $|\varphi|^p \leq \sum_{j=1}^m |\alpha_j|^p \, 1_{A_j}$, also $\|\varphi\|_p < \infty$. Mit Satz 33.3 folgt die Behauptung. □

Das $\mathcal{N}$ aus Bemerkung 33.8 ist für jedes $p \in \{0\} \cup [1,\infty]$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$. Dabei folgen wir für $p = 0$ der Benennung $\mathcal{L}^0 := \mathcal{L}_0(\Omega,\mu,\mathbb{R})$. Für $p = 0$ ist dies klar, also ist $\mathcal{N}$ ein Vektorraum. Für $p \in [1,\infty]$ folgt dies aus Bemerkung 33.8 (iii) $\Rightarrow$ (i).

Die Quotientenräume

$$L^p(\Omega,\mu,\mathbb{R}) := \mathcal{L}^p(\Omega,\mu,\mathbb{R})/\mathcal{N}, \quad p \in \{0\} \cup [1,\infty],$$

sind somit wohldefinierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Es gilt

$$L^p(\Omega,\mu,\mathbb{R}) \subset L^0(\Omega,\mu,\mathbb{R}), \quad p \in [1,\infty].$$

Es bezeichne $[f] \in L^0(\Omega,\mu,\mathbb{R})$ und g einen Repräsentanten von $[f]$, dann ist $f - g \in \mathcal{N}$, also stimmen f und g μ–f.ü. überein. Mit Bemerkung 33.8 ist $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ für jedes $p \in [1, \infty]$ und $f \in L^0(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ wohldefiniert. Für $[f] \in L^p(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ gilt

$$\|[f]\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \ \mu\text{–f.ü.} \Leftrightarrow [f] = 0.$$

Also ist hier $\|\cdot\|_p$ eine *Norm* auf $L^p(\Omega, \mu, \mathbb{R})$. Der Preis für diese Verbesserung ist die Tatsache, dass die Elemente von L^p keine Funktionen über Ω, sondern Nebenklassen bezüglich des Untervektorraumes $\mathcal{N}$ von $\mathcal{L}^p$ sind.

Die folgende Vereinbarung führt aber in der Regel zu keinen Mißverständnissen: Für die Nebenklassen $[f] = f + \mathcal{N}$ aus L^p, $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$, schreiben wir wieder f und fortan sei

$$L^p := L^p(\Omega, \mu, \mathbb{R}) := (L^p(\Omega, \mu, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p), \ \ p \in [1, \infty].$$

Wir fassen zusammen:

Satz 33.10 *Für $p \in [1, \infty]$ ist L^p bzgl. $\|\cdot\|_p$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Definition 33.11 Es seien $p \in [1, \infty]$ und $f_n \in \mathcal{L}^p$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_n)_n$ heißt im *p-ten Mittel konvergent* gegen $f \in \mathcal{L}^p$, falls $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Die Folge $(f_n)_n$ heißt eine *Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p$* oder eine Cauchy-Folge für die Konvergenz im p-ten Mittel, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|f_m - f_n\|_p < \epsilon$ für alle $m, n \geq N_0(\epsilon)$. Analoge Begriffe führt man für L^p statt $\mathcal{L}^p$ ein.

Eine positive Antwort auf die Frage nach der Vollständigkeit von $\mathcal{L}^p$ bzw. L^p gibt der folgende Satz:

Satz 33.12 *(von Riesz-Fischer)*

Für $p \in [1, \infty]$ ist $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ vollständig.

Korollar 33.13 *Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ ein Banachraum.*

Beweis von Satz 33.12: Es seien $p \in [1, \infty]$ und $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p$. Es existiert zu $k \in \mathbb{N}$ ein $N(k)$ mit $\|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ für $n, m \geq N(k)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist $N(1) < N(2) < N(3) < \cdots$. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$g_k := |f_{N(1)}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{N(j+1)} - f_{N(j)}|, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Jedes g_k ist $\mathcal{A}$-meßbar, nicht-negativ und $g_k \leq g_{k+1}$.

Es folgt mit Satz 33.6

$$\|g_k\|_p \leq \|f_{N(1)}\|_p + \sum_{j=1}^{k} \|f_{N(j+1)} - f_{N(j)}\|_p \leq \|f_{N(1)}\|_p + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \leq \|f_{N(1)}\|_p + 1 < \infty \ .$$

Mit dem Satz über die monotone Konvergenz (Satz 31.10) folgt

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k^p \, d\mu = \int_\Omega \big(\lim_{k\to\infty} g_k^p\big) \, d\mu < \infty.$$

Also ist $\lim_{k\to\infty} g_k^p$ μ–f.ü. endlich (Satz 32.4). Es existiert also eine μ-Nullmenge $A \in \mathcal{A}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) < \infty$$

für $x \in A^c$. Zu $x \in A^c$ ist

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = |f_{N(1)}(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{N(j+1)}(x) - f_{N(j)}(x)|.$$

Also ist $f_{N(1)}(x) + \sum_{j\geq 1}\big(f_{N(j+1)}(x) - f_{N(j)}(x)\big)$ in $\mathbb{R}$ absolut konvergent, also insbesondere konvergent, und die $(k-1)$-te Partialsumme ist $f_{N(k)}(x)$. Also existiert $\lim_{k\to\infty} f_{N(k)}(x)$. Man setzt nun

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_{N(k)}(x) \ , & x \in A^c, \\ 0 \ , & x \in A. \end{cases}$$

Dann ist $f|_{A^c}$ $\mathcal{A}$-meßbar, und $f|_A$ ist es auch, also ist f $\mathcal{A}$-meßbar.

Es bleibt zu zeigen, dass $(f_n)_n$ im p-ten Mittel gegen f konvergiert. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ für $n, m \geq N(\epsilon)$. Aus dem Lemma von Fatou (Satz 31.14) folgt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_p^p &= \int_\Omega |\lim_{k\to\infty} f_{N(k)}(x) - f_n(x)|^p \, d\mu(x) = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |f_{N(k)}(x) - f_n(x)|^p \, d\mu(x) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{N(k)}(x) - f_n(x)|^p \, d\mu(x) = \liminf_{k\to\infty} \|f_{N(k)} - f_n\|_p^p \leq \varepsilon^p \end{aligned}$$

für $n > N(\epsilon)$. Weiterhin impliziert

$$\|f\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p < \epsilon + \|f_n\|_p < \infty,$$

dass $f \in \mathcal{L}^p$ und die obige Abschätzung liefert die gewünschte Konvergenz.

Es seien nun $p = \infty$ und $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^\infty$. Wir setzen

$$N := \bigcup_{n\geq 1} [|f_n| > \|f_n\|_\infty] \cup \bigcup_{m,n\geq 1} [|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty].$$

Dies ist eine μ-Nullmenge und für $x \in N^c$ ist

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty, \ \ m, n \in \mathbb{N}.$$

Also konvergiert $(f_n)_n$ auf N^c gleichmäßig gegen $f := \lim_{n\to\infty} 1_{N^c} f_n \in \mathcal{L}^\infty$. Insbesondere ist $f \in \mathcal{L}^\infty$ und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Dem Beweis des Satzes von Riesz-Fischer entnimmt man das folgende Resultat:

Korollar 33.14 *(von Hermann Weyl) Es sei $p \in [1, \infty]$.*

(i) *Zu jeder Cauchy-Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{L}^p$ gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ und ein $f \in \mathcal{L}^p$, so dass $f_{n_k} \to f$ μ–f.ü.*
(ii) *Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{L}^p$ im p-ten Mittel gegen $f \in \mathcal{L}^p$, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die μ–f.ü. gegen f konvergiert.*

Beweis: zu (i): Siehe Beweis des Satzes von Riesz-Fischer.

zu (ii): Nach Beweis des Satzes von Riesz-Fischer gibt es ein $g \in \mathcal{L}^p$ mit $\|f_n - g\|_p \to 0$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die μ–f.ü. gegen g konvergiert. Wegen $\|f_n - f\|_p \to 0$ ist dann $f = g$ μ–f.ü. $\square$

KAPITEL 34

Lebesgue, Cauchy-Riemann und Riemann Integral

Gegeben sei der Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$. Entlang der Definition 31.15 spricht man für Funktionen aus $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^d, \lambda^d, \overline{\mathbb{R}})$ von *Lebesgue integrierbaren* Funktionen und von deren *Lebesgue Integral*. In diesem Kapitel zeigen wir, dass jede Regelfunktion (siehe Definition 16.1) Borel-meßbar ist und das das Cauchy-Riemann Integral mit dem Lebesgue Integral übereinstimmt. Damit stehen im Rahmen des Lebesgue Integrals die Methoden zur Verfügung, die für das Cauchy-Riemann Integral entwickelt wurden. Weiter werden wir beweisen, dass eine beschränkte, reelle Funktion auf einem kompakten Intervall genau dann Riemann integrierbar ist, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen eine λ^1-Nullmenge ist. Es folgt daraus, dass das Lebesguesche Integral eine echte Erweiterung des Riemannschen, und daher des Cauchy-Riemannschen Integrals ist.

Es sei fortan $X \subset \mathbb{R}^d$ mit $\lambda^d(X) > 0$ gegeben. Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathcal{L}^p(X) := \mathcal{L}^p(X, \lambda^d|_X, \mathbb{R})$$

für $p \in [1, \infty] \cup \{0\}$.

Satz 34.1 *Es seien $-\infty \le a < b \le \infty$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sei absolut integrierbar (siehe Definition 20.8). Dann ist $f \in \mathcal{L}^1((a,b))$ und*

$$\int_{(a,b)} f \, d\lambda^1 = \int_a^b f.$$

Beweis: 1. Schritt: Es seien zunächst $a < \alpha < \beta < b$. Ist $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, so ist g $\mathcal{B}$-einfach und

$$\int_{(\alpha,\beta)} g \, d\lambda^1 = \int_\alpha^\beta g. \qquad (*)$$

Es sei nun $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann existiert eine Folge $(g_j)_j$ von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen g konvergiert. Also ist g Borel-meßbar und $g \in \mathcal{L}^1((\alpha, \beta))$, denn g ist beschränkt (siehe Bemerkung 16.2 (c)), also ist $|g| \le \gamma$ für ein $\gamma \in [0, \infty)$, also $\int_{(\alpha,\beta)} |g| \, d\lambda^1 \le \gamma(\beta - \alpha)$. Da die Folge $(g_j)_j$ gleichmäßig konvergiert und g beschränkt ist, gibt es ein $M \ge 0$ mit $|g_j| \le M$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nach Satz 32.12 (Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue) folgt also

$$\lim_{j \to \infty} \int_{(\alpha,\beta)} g_j \, d\lambda^1 = \int_{(\alpha,\beta)} g \, d\lambda^1.$$

Nach der Definition des Cauchy-Riemann Integrals und $(*)$ folgt

$$\int_\alpha^\beta g = \lim_{j\to\infty} \int_\alpha^\beta g_j = \lim_{j\to\infty} \int_{(\alpha,\beta)} g_j \, d\lambda^1 = \int_{(\alpha,\beta)} g \, d\lambda^1.$$

2. Schritt: Es sei nun $c \in (a,b)$ und $(\beta_j)_j$ eine Folge in (c,b) mit $\beta_j \uparrow b$. Sei $g := 1_{[c,b)} f$ und $g_j := 1_{[c,\beta_j]} f$, $j \in \mathbb{N}$. Nach dem 1. Schritt ist g_j in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Die Folge $(g_j)_j$ konvergiert punktweise gegen g und die Folge $(|g_j|)_j$ konvergiert wachsend gegen $|g|$. Somit ist g Borel-meßbar und mit Hilfe des 1. Schritts folgt

$$\int_{\mathbb{R}} |g_j| \, d\lambda^1 = \int_{(c,\beta_j)} |f| \, d\lambda^1 = \int_c^{\beta_j} |f|.$$

Die absolute Konvergenz von $\int_c^b f$ liefert

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_j| \, d\lambda^1 = \lim_{j\to\infty} \int_c^{\beta_j} |f| = \int_c^b |f|.$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 31.10) liefert

$$\int_{\mathbb{R}} |g| \, d\lambda^1 = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_j| \, d\lambda^1,$$

also folgt $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Der Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz 32.12) kann somit auf die Folge $(g_j)_j$ angewendet werden:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_j \, d\lambda^1 = \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda^1 = \int_{[c,b)} f \, d\lambda^1.$$

Weiter ist nach Schritt 1 $\int_{\mathbb{R}} g_j \, d\lambda^1 = \int_c^{\beta_j} f$, also

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_j \, d\lambda^1 = \lim_{j\to\infty} \int_c^{\beta_j} f = \int_c^b f.$$

Somit stimmen die Grenzwerte $\int_{[c,b)} f \, d\lambda^1$ und $\int_c^b f$ überein. Analog zeigt man, dass $1_{(a,c]} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $\int_{(a,c]} f \, d\lambda^1 = \int_a^c f$ gilt. Somit ist f λ^1-integrierbar mit $\int_{(a,b)} f \, d\lambda^1 = \int_a^b f$. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Bemerkung 34.2 Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zulässig und $\int_a^b f$ existiere als uneigentliches Integral, so muß f nicht zu $\mathcal{L}^1((a,b))$ gehören. Dazu betrachten wir

$$f(x) := \begin{cases} 0\,, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{(-1)^j}{j}\,, & x \in [j-1, j),\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dann ist f zulässig (ist auf kompakten Teilintervallen sprungstetig) und

$$\int_{-\infty}^\infty f = \sum_{j=1}^\infty (-1)^j/j,$$

also existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f$ in $\mathbb{R}$. Angenommen, es ist $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Dann gilt $\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda^1 < \infty$, aber aus dem Satz über die monotone Konvergenz (Satz 31.10) folgt

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda^1 = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,k]}\, |f|\, d\lambda^1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} = \infty,$$

und das ist ein Widerspruch.

□

Satz 34.3 *Es sei I ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Genau dann ist f Riemann integrierbar, wenn f λ^1–f.ü. stetig ist. In diesem Fall ist f Lebesgue integrierbar und das Riemannsche Integral stimmt mit dem Lebegueschen überein.*

Beweis: 1. Schritt: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir $I = [0,1]$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{Z}_k := (\zeta_{0,k,\ldots,}\zeta_{2^k,k})$ die Zerlegung von $[0,1]$ mit $\zeta_{j,k} := j2^{-k}$ für $j = 0,\ldots,2^k$. Ferner seien

$$I_{0,k} := [\zeta_{0,k}, \zeta_{1,k}]\ ,\ I_{j,k} := (\zeta_{j,k}, \zeta_{j+1,k}]\ ,\ j = 1,\ldots,2^k - 1,$$

$$\alpha_{j,k} := \inf_{x\in \overline{I}_{j,k}} f(x)\ ,\ \beta_{j,k} := \sup_{x\in \overline{I}_{j,k}} f(x),$$

sowie

$$g_k := \sum_{j=0}^{2^k-1} \alpha_{j,k}\, 1_{I_{j,k}}\ ,\ h_k := \sum_{j=0}^{2^k-1} \beta_{j,k}\, 1_{I_{j,k}},\ k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(g_k)_k$ eine wachsende Folge und $(h_k)_k$ ist eine fallende Folge von $\mathcal{B}$-einfachen Funktionen. Somit sind $g = \lim_k g_k$ und $h = \lim_k h_k$ punktweise definiert und $\mathcal{B}$-meßbar und es gilt $g \le f \le h$. Es gilt

$$\int_{[0,1]} g_k\, d\lambda^1 = \underline{S}(f,[0,1],\mathcal{Z}_k) \text{ und } \int_{[0,1]} h_k\, d\lambda^1 = \overline{S}(f,[0,1],\mathcal{Z}_k).$$

Hierbei bezeichnet $\underline{S}(f,[0,1],\mathcal{Z}_k)$ bzw. $\overline{S}(f,[0,1],\mathcal{Z}_k)$ die Unter- bzw. Obersumme von f über $[0,1]$ bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}_k$ (siehe Blatt 4, Analysis II). In der Notation des oberen und unteren Riemann Integrals $\overline{\int_I} f$, $\underline{\int_I} f$ (siehe Blatt 4, Analysis II) folgt mittels des Satzes über die monotone Konvergenz (Satz 31.10):

$$\int_{[0,1]} (h-g)\, d\lambda_1 = \overline{\int_{[0,1]}} f - \underline{\int_{[0,1]}} f. \qquad (*)$$

2. Schritt: Es seien $R = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\zeta_{0,k,\ldots}\zeta_{2^k,k}\}$ und C die Menge der Stetigkeitspunkte von f. Dann gilt

$$[g = h] \cap R^c \subset C \subset [g = h]. \qquad (**)$$

Um dies zu beweisen, seien $\epsilon > 0$ und $x_0 \in R^c$ mit $g(x_0) = h(x_0)$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $h_k(x_0) - g_k(x_0) < \epsilon$ und ein $j \in \{0,\ldots,2^{k-1}\}$, so dass x_0 in $(\zeta_{j,k}, \zeta_{j+1,k})$

liegt. Für $x \in I_{j,k}$ ist
$$| f(x) - f(x_0) | \leq \sup_{y \in \overline{I}_{j,k}} f(y) - \inf_{y \in \overline{I}_{j,k}} f(y) = h_k(x_0) - g_k(x_0) < \epsilon,$$
also ist f in x_0 stetig. Damit ist die Inklusion $[g = h] \cap R^c \subset C$ bewiesen.

Sei weiter $x_0 \in C$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $| f(x) - f(x_0) | < \epsilon/2$ für $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [0, 1]$. Es sei $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-k_0} \leq \delta$. Man findet für jedes $k \geq k_0$ ein $j \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ mit $x_0 \in I_{j,k} \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Also
$$0 \leq h_k(x_0) - g_k(x_0) = \sup_{x \in \overline{I}_{j,k}} \big(f(x) - f(x_0)\big) - \inf_{x \in \overline{I}_{j,k}} \big(f(x) - f(x_0)\big) < \epsilon.$$
Somit folgt $h(x_0) - g(x_0) = \lim_k \big(h_k(x_0) - g_k(x_0)\big) = 0$. Damit ist die Inklusion $C \subset [g = h]$ bewiesen und somit ist $(**)$ bewiesen.

3. Schritt: Ist f Riemann integrierbar, so ist
$$\underline{\int}_{[0,1]} f = \overline{\int}_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} f,$$
also ist $h = g = f$ λ^1–f.ü. nach $(*)$. Damit ist f $\mathcal{B}$-meßbar. Da f beschränkt ist, folgt $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$. Weiter ist $|g_k| \leq \|f\|_\infty$ λ^1–f.ü. für $k \in \mathbb{N}$, und somit ergibt der Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz 32.12)
$$\int_{[0,1]} g \, d\lambda^1 = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} g_k \, d\lambda^1 = \lim_{k\to\infty} \underline{S}(f, [0, 1], \mathcal{Z}_k) = \int_0^1 f.$$
Da $g = f$ λ^1–f.ü., folgt $\int_{[0,1]} f \, d\lambda^1 = \int_0^1 f$. Es bleibt zu zeigen, dass die Menge C^c der Unstetigkeitsstellen von f eine λ^1-Nullmenge ist. Nach $(**)$ gilt $C^c \subset [h \neq g] \cup R$. Da aber $g = h$ λ^1–f.ü., und die Menge R abzählbar ist, folgt
$$\lambda^1(C^c) \leq \lambda^1\big([h \neq g] \cup R\big) = 0.$$
Damit bilden die Unstetigkeitsstellen von f eine λ^1-Nullmenge.

4. Schritt: Es sei nun C^c eine λ^1-Nullmenge, dann ist nach $(**)$ auch $[g \neq h]$ eine λ^1-Nullmenge und die Riemann Integrierbarkeit von f folgt aus $(*)$. Somit ist der Satz bewiesen. □

Korollar 34.4 *Das Lebesgue-Integral ist eine echte Erweiterung des Riemannschen Integrals.*

Beweis: Man betrachte die *Dirichletfunktion*
$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Da $f = 0$ λ^1–f.ü. (siehe Beispiel 28.15 (ii)), ist $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$, siehe 32.8 (ii). Weiter ist f in keinem Punkt stetig, also ist f nach Satz 34.3 nicht Riemann integrierbar. □

KAPITEL 35

Produktmaße und der Satz von Fubini

Im Zentrum steht nun die Diskussion mehrfacher Integrale. Der Satz von Fubini gestattet die Reduktion mehrfacher Integrale auf einfache: Integrale einer Funktion von mehreren Variablen können iterativ berechnet werden und die Integrationsreihenfolge kann beliebig gewählt werden. Zuvor konstruieren wir zu zwei Maßräumen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ein geeignetes Maß ϱ auf $X \times Y$, versehen mit einer geeigneten σ-Algebra. Geeignet soll dabei bedeuten, dass mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ die Menge $A \times B$ zum Definitionsbereich von ϱ gehört und $\varrho(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$ gilt. Dies entspricht unserer elementargeometrischen Vorstellung, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks sich aus Länge mal Breite bestimmen lassen soll.

Es seien fortan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei Maßräume.

Definition 35.1 Die von der Menge der Rechtecke $\{A \times B \,|\, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ erzeugte σ-Algebra heißt *Produkt-σ-Algebra* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ auf $X \times Y$.

Beispiel 35.2 Es seien $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}^p)$ und $(Y, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^q, \mathcal{B}^q)$, $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q = \mathcal{B}^{p+q}$.

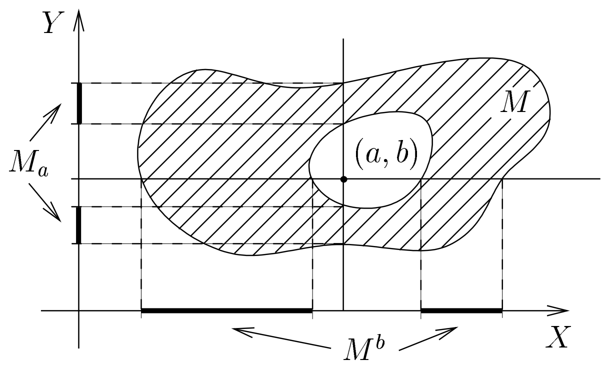
Beweis: Die σ-Algebra der Borelschen Mengen wird von Intervallen erzeugt (siehe Definition 28.12). Intervalle in $\mathbb{R}^{p+q}$ sind in $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$ enthalten, also folgt $\mathcal{B}^{p+q} \subset \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$. Sei weiter I ein festes Intervall in $\mathbb{R}^p$. Dann ist $\{B \subset \mathbb{R}^q \colon I \times B \in \mathcal{B}^{p+q}\}$ eine σ-Algebra, die die Intervalle in $\mathbb{R}^q$ umfaßt, also auch $\mathcal{B}^q$. Zu $B \in \mathcal{B}^q$ sei $\{A \subset \mathbb{R}^p : A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}\}$ gegeben. Dieses Mengensystem umfaßt alle Intervalle in $\mathbb{R}^p$ und ist eine σ-Algebra, umfaßt also $\mathcal{B}^p$. Somit liegen alle $A \times B$ mit $A \in \mathcal{B}^p$ und $B \in \mathcal{B}^q$ in $\mathcal{B}^{p+q}$, also folgt $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q \subset \mathcal{B}^{p+q}$, was zu zeigen war. □

Wir wollen nun auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ein Maß konstruieren, so dass $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ der Wert $\mu(A)\,\nu(B)$ zugeordnet wird. Wir führen die folgende Notation ein: für ein $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bezeichne

$$M_a := \{y \in Y \colon (a, y) \in M\},\ a \in X$$

$$M^b := \{x \in X \colon (x, b) \in M\},\ b \in Y$$

den *a-Schnitt* M_a bzw. *b-Schnitt* M^b von M oder kurz, einen *Schnitt* von M.



Satz 35.3 *Es gibt ein Maß ϱ auf $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, so dass $\varrho(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$ für $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ gilt.*

Beweis: Es bezeichne $\mathcal{R}$ das System der endlichen Vereinigungen von Mengen der Form $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Dann ist ein $R \in \mathcal{R}$ als disjunkte, endliche Vereinigung von Mengen der Form $A \times B$ darstellbar. Siehe dazu Lemma 27.6. Der Beweis geht völlig analog. Wir betrachten zwei verschiedene Darstellungen von $R \in \mathcal{R}$, also $R = \bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i = \bigcup_{j=1}^m C_j \times D_j$ (disjunkte Vereinigungen) mit $A_i, C_j \in \mathcal{A}$ und $B_i, D_j \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Dann ist $\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\,\nu(B_i) = \sum_{j=1}^m \mu(C_j)\,\nu(D_j)$. Der Beweis geht völlig analog zu dem in Beispiel 27.10 (iv). Weiter ist $\mathcal{R}$ ist ein Ring (analog zu Satz 27.7 zu beweisen). Es sei nun $\varrho_0 \colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\varrho_0(R) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\,\nu(B_i)$$

mit $R = \bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i$ (disjunkte Vereinigung). Dann ist nach Obigem ϱ_0 wohldefiniert und ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ (analog zu Beispiel 27.10 (iv)). ϱ_0 ist sogar σ-additiv, also ein Prämaß. Der in $\mathbb{R}^d$ geführte Beweis (Satz 27.11) basiert auf einem Kompaktheitsargument, muß hier also neu geführt werden. Zu $R \in \mathcal{R}$ sei $f_R \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch $f_R(x) := \sum_{i=1}^n \nu(B_i) 1_{A_i}(x)$ für die Darstellung $R = \bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i$ (disjunkte Vereinigung). Dann ist f_R $\mathcal{A}$-meßbar und $\int f_R\, d\mu = \varrho_0(R)$. Es sei nun $(R_n)_n$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{R}$, so dass $R := \bigcup_{n=1}^\infty R_n \in \mathcal{R}$. In diesem Fall gilt $f_R = \sum_{n=1}^\infty f_{R_n}$. Denn für jedes $a \in X$ gilt für den a-Schnitt von R

$$R_a = \bigcup_{n \geq 1} (R_n)_a,$$

und dies ist wieder eine disjunkte Vereinigung. Der Satz von der monotonen Konvergenz (Korollar 31.11) liefert nun

$$\varrho_0(R) = \int f_R\, d\mu = \int \Big(\sum_{n\geq 1} f_{R_n}\Big)\, d\mu = \sum_{n \geq 1} \int f_{R_n}\, d\mu = \sum_{n\geq 1} \varrho_0(R_n).$$

Also ist ϱ_0 ein Prämaß. ϱ_0 kann nun nach Satz 28.8 zu einem Maß ϱ auf $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ fortgesetzt werden. Dies war zu zeigen. $\square$

Nach Satz 28.11 ist ϱ in Satz 35.3 für zwei σ-endliche Maße μ und ν eindeutig bestimmt. Die Konstruktion von ϱ mit Hilfe des Fortsetzungssatzes ist aber „unhandlich“. Ein alternativer Konstruktionsweg geht auf *B. Cavalieri* (1591-1647), ein Schüler von G. Galilei, zurück. Das *Cavalierische Prinzip* ist, das Maß (Volumen) einer Menge „durch Zerlegen dieser Menge in dünne parallele Scheiben und kontinuierliches Aufsummieren“ (Integrieren) der Volumina dieser Scheiben zu bestimmen. Dieses Prinzip wollen wir nun mathematisch präzisieren.

Lemma 35.4 *Für $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist jeder Schnitt M_a, $a \in X$, und M^b, $b \in Y$, meßbar, d.h. $M_a \in \mathcal{B}$ und $M^b \in \mathcal{A}$.*

Beweis: Wir betrachten Teilmengen Q, Q_n, $n \in \mathbb{N}$, von $X \times Y$. Für $a \in X$ ist

$$\Big((X \times Y) \setminus Q\Big)_a = Y \setminus Q_a$$

und $(\bigcup_{n\geq 1} Q_n)_a = \bigcup_{n\geq 1}(Q_n)_a$. Ferner ist $(X \times Y)_a = Y$ und $(A \times B)_a = B$ bzw. $\emptyset$, je nachdem, ob a in A liegt oder nicht ($A \subset X$, $B \subset Y$). Also ist das System aller $Q \subset X \times Y$ mit $Q_a \in \mathcal{B}$ eine σ-Algebra in $X \times Y$, die alle Mengen $A \times B$ ($A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$) enthält, also enthält sie auch $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Für b-Schnitte geht der Beweis analog. □

Satz 35.5 *Ist das Maß ν auf $(Y, \mathcal{B})$ σ-endlich, so ist für jedes $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ die Funktion $x \mapsto \nu(M_x)$ $\mathcal{A}$-meßbar und $\varrho\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$\varrho(M) := \int_X \nu(M_x)\, d\mu(x),\ \ M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

ist ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $\varrho(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Beweis: Der Beweis ist umfangreich. Es sei

$$f_M\colon X \to \overline{\mathbb{R}},\ f_M(x) := \nu(M_x),\ x \in X,\ M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\ .$$

Wir zeigen die $\mathcal{A}$-Meßbarkeit von f_M in mehreren Schritten. Wir verwenden das *Prinzip der guten Mengen* und setzen

$$\mathcal{M} := \{M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\colon f_M \text{ ist } \mathcal{A}\text{-meßbar}\}.$$

und wollen $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ zeigen. Für $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ ist $f_{A\times B}(x) = \nu(B)1_A(x)$, $x \in X$, also $\mathcal{A}$-meßbar, also gilt $\{A \times B,\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{M}$.

1. Schritt: Es sei $\nu(Y) < \infty$. Dann ist $X \times Y \in \mathcal{M}$, denn $f_{X\times Y}$ ist konstant gleich $\nu(Y)$, also $\mathcal{A}$-meßbar. Mit $M \in \mathcal{M}$ ist auch $M^c \in \mathcal{M}$, denn für $x \in X$ ist

$$f_{M^c}(x) = \nu((M_x)^c) = \nu(Y) - f_M(x),$$

da $\nu(Y) < \infty$. Also ist f_{M^c} $\mathcal{A}$-meßbar. Ist nun $(M_n)_n$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{M}$, so ist auch $\bigcup_{n\geq 1} M_n \in \mathcal{M}$, denn $f_{\bigcup_{n\geq 1} M_n} = \sum_{n\geq 1} f_{M_n}$ ist $\mathcal{A}$-meßbar. Wir zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. Dann ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, also $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{M}$.

Lemma 35.6 *$\mathcal{M}$ im Beweis von Satz 35.5 ist eine σ-Algebra.*

Beweis: $\mathcal{M}$ hat die Eigenschaft $X \times Y \in \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{M} \Rightarrow M^c \in \mathcal{M}$. Weiter gilt (iii) in Definition 27.1 für disjunkte Folgen. Ein solches Mengensystem wird auch *Dynkin-System* genannt. Wir betrachten nun

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}(\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}),$$

das von der Menge $\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ *erzeugte* Dynkin-System (man vergleiche mit Beispiel 27.2 (v) und Bemerkung 27.8). Wir zeigen: $\mathcal{D}$ ist durchschnittsstabil, d.h. mit je zwei Mengen $E, F \in \mathcal{D}$ ist $E \cap F \in \mathcal{D}$. Denn dann ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra, also $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, also $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und mit $\mathcal{D} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ folgt $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ durchschnittsstabil ist und, dass ein durchschnittsstabiles Dynkin-System eine σ-Algebra ist. Die zuletzt genannte Eigenschaft zeigen wir zuerst. Für $E, F \in \mathcal{D}$ ist $E \setminus F = E \setminus (E \cap F) = E \cap (E \cap F)^c$ in $\mathcal{D}$, und wegen $E \cup F = (E \setminus F) \cup F$ und $(E \setminus F) \cap F = \emptyset$ ist auch jede endliche Vereinigung in $\mathcal{D}$. Für eine Folge $(D_n)_n$ aus $\mathcal{D}$ ist dann

$$\bigcup_{n \geq 1} D_n = \bigcup_{n \geq 1} (D'_{n+1} \setminus D'_n)$$

mit $D'_0 = \emptyset$, $D'_n := D_1 \cup \cdots \cup D_n$. Also ist $\bigcup_{n \geq 1} D_n \in \mathcal{D}$, da $D'_{n+1} \setminus D'_n \in \mathcal{D}$ nach dem bereits Bewiesenen. Damit ist $\mathcal{D}$ also eine σ-Algebra.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ durchschnittsstabil ist. Zu $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ und $C \in \mathcal{D}$ ist $(A \times B) \cap C \in \mathcal{D}$, denn $\{C \subset X \times Y, (A \times B) \cap C \in \mathcal{D}\}$ ist ein Dynkin-System, es enthält alle Mengen der Form $A \times B$ und damit insbesondere $\mathcal{D}$. Dann folgt für $C, D \in \mathcal{D}$, dass $C \cap D \in \mathcal{D}$, denn $\{D \subset X \times Y, C \cap D \in \mathcal{D}\}$ ist ein Dynkin-System, enthält nach obigem Beweis Mengen der Form $A \times B$, also $\mathcal{D}$. $\square$

Fortsetzung des Beweises von 35.5:

2. Schritt: Es sei nun ν σ-endlich. Also existiert eine Folge $(B_n)_n$ in $\mathcal{B}$ mit $B_n \uparrow Y$ und $\nu(B_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Es sei $\nu_n \colon \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ gegeben durch $\nu_n(B) := \nu(B \cap B_n)$, $B \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$. Für $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist $x \mapsto \nu_n(M_x)$ nach Schritt 1 $\mathcal{A}$-meßbar, also ist auch $f_M(x) = \lim_{n \to \infty} \nu_n(M_x)$ eine $\mathcal{A}$-meßbare Funktion. Somit gilt auch in diesem Fall $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

3. Schritt: Nach Schritt 1 und 2 ist somit ϱ wohldefiniert und es gilt offenbar $\varrho(A \times B) = \nu(B)\,\mu(A)$. Wir müssen nun die σ-Additivität zeigen. Es sei $(M_n)_n$ eine Folge disjunkter Mengen in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, so ist

$$\begin{aligned}
\varrho\Big(\bigcup_{n \geq 1} M_n\Big) &= \int_X \nu\Big(\big(\bigcup_{n \geq 1} M_n\big)_x\Big)\, d\mu(x) = \int_X \sum_{n \geq 1} \nu\big((M_n)_x\big)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{n \geq 1} \int_X \nu\big((M_n)_x\big)\, d\mu(x) = \sum_{n \geq 1} \varrho(M_n)\ .
\end{aligned}$$

Wieder haben wir den Satz von der monotonen Konvergenz (genauer Korollar 31.11) verwendet. Damit ist der Satz nun bewiesen. $\square$

Satz 35.7 *Sind μ und ν σ-endlich, so gibt es genau ein Maß $\mu\otimes\nu\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to[0,\infty]$ mit $\mu\otimes\nu(A\times B)=\mu(A)\,\nu(B)$, $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, und es ist*

$$\mu\otimes\nu(M)=\int_X \nu(M_x)\,d\mu(x)=\int_Y \mu(M^y)\,d\nu(y)$$

für $M\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Das Maß $\mu\otimes\nu$ ist σ-endlich.

Definition 35.8 Das Maß $\mu\otimes\nu$ heißt das *Produktmaß* von μ und ν.

Beweis: Das Maß ϱ aus Satz 35.3 ist in der Situation unseres Satzes σ-endlich: Es seien $(A_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $A_n\uparrow X$ und $(B_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{B}$ mit $B_n\uparrow Y$ mit $\mu(A_n)<\infty$, $\nu(B_n)<\infty$, $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $A_n\times B_n\uparrow X\times Y$ mit $\varrho(A_n\times B_n)<\infty$ für $n\in\mathbb{N}$. Nach Satz 28.11 existiert genau ein Maß $\mu\otimes\nu\colon\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to[0,\infty]$ mit $\mu\otimes\nu(A\times B)=\mu(A)\,\nu(B)$ und $\mu\otimes\nu$ ist σ-endlich. Andererseits ist das Maß ϱ aus Satz 35.5 ein Maß auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $\varrho(A\times B)=\mu(A)\,\nu(B)$, also ist $\varrho=\mu\otimes\nu$. Weiter ist $\sigma\colon\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to[0,\infty]$ mit

$$\sigma(M):=\int_Y \mu(M^y)\,d\nu(y),\ M\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$$

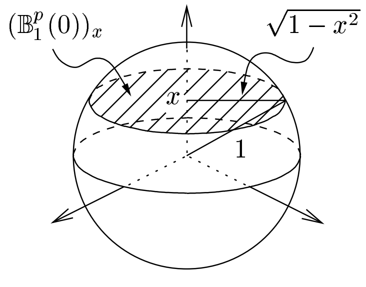
ein Maß mit $\sigma(A\times B)=\mu(A)\,\nu(B)$, $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, also auch $\sigma=\mu\otimes\nu$. $\square$

Beispiel 35.9 Es ist $\mathcal{B}^p\otimes\mathcal{B}^q=\mathcal{B}^{p+q}$. Es bezeichne $\mathcal{I}^p$ die Menge aller nach rechts halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}^p$. Die Borel-Lebesgueschen Maße $\lambda^p\otimes\lambda^q$ und λ^{p+q} stimmen auf $\mathcal{I}^{p+q}$ (Erzeuger von $\mathcal{B}^{p+q}$) überein. Weiter ist

$$\{I\times J\colon I\in\mathcal{I}^p, J\in\mathcal{I}^q\}=\mathcal{I}^{p+q}.$$

Also folgt $\lambda^p\otimes\lambda^q=\lambda^{p+q}$.

Beispiel 35.10 (Kugelvolumen im $\mathbb{R}^p$) Es sei $B_R^p(0)=\{x\in\mathbb{R}^p;\|x\|\le R\}$, $R>0$. Es ist $\lambda^p(B_R^p(0))=R^p\,\lambda^p(B_1^p(0))$ nach Korollar 29.13 mit $f(x):=R\,x$, $x\in\mathbb{R}^p$. Sei $\omega_p:=\lambda^p(B_1^p(0))$. Es ist $\omega_1=2$. Sei $p\ge 2$ und $\mathbb{R}^p=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{p-1}$ und $\lambda^p=\lambda^1\otimes\lambda^{p-1}$. Für $-1<x<1$ ist der x-Schnitt $(B_1^p(0))_x$ eine $(p-1)$-dimensionale Kugel vom Radius $\sqrt{1-x^2}$.



Somit liefert Satz 35.7:

$$\begin{aligned}\omega_p &= \int_{-1}^{1}\lambda^{p-1}\big((B_1^p(0))_x\big)\,d\lambda^1(x)=\int_{-1}^{1}\lambda^{p-1}\big(\sqrt{1-x^2}\,B_1^{p-1}(0)\big)\,d\lambda^1(x)\\ &= \omega_{p-1}\int_{-1}^{1}\big(\sqrt{1-x^2}\big)^{p-1}\,d\lambda^1(x)=2\,\omega_{p-1}\int_0^1\big(1-x^2\big)^{\frac{p-1}{2}}\,d\lambda^1(x).\end{aligned}$$

Die Substitution $x = -\cos t$ und Satz 34.1 liefern

$$\omega_p = 2\,\omega_{p-1} \int_0^{\pi/2} \sin^p t\, dt =: \omega_{p-1}\, B_p \ .$$

Nach Beispiel 18.4 (iv) wissen wir

$$B_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2}\,\pi$$

und

$$B_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1}\,2.$$

Also gilt

$$B_p\, B_{p-1} = \frac{2\pi}{p}.$$

Weiter ist $\omega_1 = 2$ und $\omega_2 = B_2\,\omega_1 = 2\,B_2 = \pi$. Allgemein gilt also

$$\omega_p = B_p\,\omega_{p-1} = B_p\,B_{p-1}\,\omega_{p-2} = \frac{2\pi}{p}\,\omega_{p-2}.$$

Daraus ergibt sich

$$\omega_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}$$

und

$$\omega_{2p+1} = \frac{(2\pi)^p}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p+1)}\cdot 2.$$

Nun ist $\Gamma(p+1) = p!$ und $\Gamma(p+\frac{3}{2}) = (p+\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})\frac{1\cdot 3\cdots(2p+1)}{2^{p+1}}$ nach Kapitel 20 und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (siehe Übung 26, Analysis II). Also ist $\omega_{2p} = \frac{\pi^p}{\Gamma(p+1)}$ und $\omega_{2p+1} = \frac{\pi^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(p+\frac{3}{2})}$ und daher

$$\lambda^p(B_R^p(0)) = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2+1)}\,R^p,\ \ p \geq 1.$$

Korollar 35.11 *(Cavalierisches Prinzip) Es seien μ, ν σ-endlich und für $M, N \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ sei $\nu(M_x) = \nu(N_x)$ für μ-fast alle $x \in X$. Dann ist $\mu\otimes\nu(M) = \mu\otimes\nu(N)$.*

Wir bereiten nun den Satz von Fubini vor:

Lemma 35.12 *Sei $(Z, \mathcal{C})$ ein weiterer Meßraum. Für jede meßbare Abbildung $f\colon (X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ sind alle Schnitte $f(a,\cdot)\colon (Y,\mathcal{B}) \to (Z,\mathcal{C})$, $a \in X$, und $f(\cdot,b)\colon (X,\mathcal{A}) \to (Z,\mathcal{C})$, $b \in Y$, meßbar.*

Beweis: Sei $C \in \mathcal{C}$, $a \in X$, $b \in Y$, so gilt

$$\big(f(a,\cdot)\big)^{-1}(C) = \big(f^{-1}(C)\big)_a \text{ und } \big(f(\cdot,b)\big)^{-1}(C) = \big(f^{-1}(C)\big)^b \ ,$$

also ist die Behauptung mit Hilfe von Lemma 35.4 bewiesen. □

Satz 35.13 *(von Fubini) Es seien μ, ν σ-endlich. Dann gilt*

(i) Für jede nicht-negative $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-meßbare numerische Funktion f sind die durch

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad \text{bzw.} \quad y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$

auf X bzw. Y definierten nicht-negativen numerischen Funktionen $\mathcal{A}$-meßbar bzw. $\mathcal{B}$-meßbar und es gilt

$$(*) \qquad \int_{X\times Y} f\, d\mu \otimes \nu = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \Big)\, d\nu(y)\ .$$

(ii) Ist $f \colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu \otimes \nu$-integrierbar, so ist $f(x,\cdot)$ ν-integrierbar für μ-fast alle $x \in X$ und $f(\cdot, y)$ ist μ-integrierbar für ν-fast alle $y \in Y$. Die Funktionen $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ bzw. $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ sind somit μ- bzw. ν- fast überall definiert und μ- bzw. ν-integrierbar und es gilt $(*)$.

Beweis: zu (i): Für $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist $M_x \in \mathcal{B},\ x \in X$. Die Funktion

$$x \mapsto \nu(M_x) = \int_Y 1_M(x,y)\, d\nu(y)$$

ist $\mathcal{A}$-meßbar und nach Satz 35.7 ist

$$\int_{X\times Y} 1_M\, d\mu \otimes \nu = \int_X \Big(\int_Y 1_M(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x)\ .$$

Analog mit vertauschten Rollen für μ und ν. Also gilt (i) für $f = 1_M$ mit $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und damit für jedes $f \in \mathcal{EF}(X \times Y, \mathbb{R}^+)$. Für eine nicht-negative $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-meßbare numerische Funktion f gibt es eine Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{EF}(X \times Y, \mathbb{R}^+)$ mit $f_n \uparrow f$ (Satz 30.12). Für $x \in X$ ist $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}_0(Y, \nu, \overline{\mathbb{R}}^+)$, siehe Lemma 35.12, und $f_n(x,\cdot) \in \mathcal{EF}(Y, \mathbb{R}^+)$ und $f_n(x,\cdot) \uparrow f(x,\cdot)$. Nach der Definition des Integrals folgt für $x \in X$

$$(**) \qquad \int_Y f_n(x,y)\, d\nu(y) \uparrow \int_Y f(x,y)\, d\nu(y),$$

und auf der linken Seite steht eine Folge $\mathcal{A}$-meßbarer Funktionen in x und rechts steht somit ebenfalls eine $\mathcal{A}$-meßbare Funktion in x. Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f\, d\mu \otimes \nu &= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n\, d\mu \otimes \nu = \lim_{n\to\infty} \int_X \Big(\int_Y f_n(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \Big(\lim_{n\to\infty} \int_Y f_n(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x)\ . \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die Definition des Integrals, $(*)$ für einfache Funktionen sowie monotone Konvergenz und $(**)$. Eine analoge Herleitung mit vertauschten Rollen für μ und ν liefert den Beweis zu (i).

zu (ii): Mit f ist auch $|f|$ integrierbar bzgl. $\mu \otimes \nu$ und (i) besagt

$$\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) = \int_{X\times Y} |f|\, d\mu \otimes \nu < \infty\ .$$

Die Funktion in der Klammer der linken Seite ist nach (i) eine $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktion von $x \in X$ und die Endlichkeit des Integrals impliziert

$$\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) < \infty$$

für μ-fast alle $x \in X$. Für μ-fast alle x gilt somit

$$(***) \qquad \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) = \int_Y f^+(x,y)\, d\nu(y) - \int_Y f^-(x,y)\, d\nu(y)\ .$$

Nach (i) sind die Integrale der rechten Seite als Funktionen in $x \in X$ nicht-negative $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktionen, und sie sind μ-integrierbar, denn

$$\int_X \Big(\int_Y f^{\pm}(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) \le \int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) < \infty\ .$$

Damit ist $(***)$ als Funktion in x μ-fast überall integrierbar und

$$\begin{aligned} &\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \Big(\int_Y f^+(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) - \int_X \Big(\int_Y f^-(x,y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) \\ &= \int_{X\times Y} f^+\, d\mu\otimes\nu - \int_{X\times Y} f^-\, d\mu\otimes\nu = \int_{X\times Y} f\, d\mu\otimes\nu\ . \end{aligned}$$

Analog schließt man bei vertauschten Rollen für μ und ν. Somit ist der Satz bewiesen. $\square$

Beispiele 35.14 (i) Es seien $\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1$, $A := \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}^2$ und $f := 1_A$, dann ist $\lambda^2(A) = \int f d\lambda^2 = 0$ nach Satz 35.7, also ist f λ^2-integrierbar. Aber $f(x,\cdot)$ ist für $x \in \mathbb{Q}$ nicht λ^1-integrierbar.

(ii) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}\ .$$

Dann ist f eine $\mathcal{B}^2$-meßbar Funktion und für jedes $y \in \mathbb{R}$ konvergiert das uneigentliche Cauchy-Riemann Integral $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx$ absolut. Weiter ist $f(\cdot,y)$ ungerade, also

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda^1(x) = 0,$$

und wegen $f(x,y) = f(y,x)$ ist auch

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda^1(x) \Big)\, d\lambda^1(y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda^1(y) \Big)\, d\lambda^1(x) = 0\ .$$

Wäre f λ^2-integrierbar, so wäre nach dem Satz von Fubini auch $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, d\lambda^1(y)$ λ^1-integrierbar, aber $\int_{\mathbb{R}} \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2}\, d\lambda^1(y) = \frac{1}{|x|}$ für $x \neq 0$, also ist f nicht integrierbar, d.h. $f \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$. Aus der Existenz und Gleichheit der iterierten Integrale kann nicht auf die Integrierbarkeit von f geschlossen werden.

(iii) Für $x, y > 0$ ist $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan \frac{x}{y}$, also ist

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, d\lambda^1(y) \Big) \, d\lambda^1(x) = \frac{\pi}{4}$$

und

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, d\lambda^1(x) \Big) \, d\lambda^1(y) = -\frac{\pi}{4}.$$

Die iterierten Integrale existieren beide, sind aber nicht gleich, also ist die Funktion nicht λ^2-integrierbar über $]0,1[^2$ (Beispiel von Cauchy 1814).

(iv) Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \varrho)$, wobei ϱ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ ist. Es ist $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ und der Satz von Fubini (35.13) sagt

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} a_{mn} = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} a_{mn} = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} a_{mn}$$

für alle $a_{mn} \in [0, \infty]$ und die Gleichheit gilt auch für $a_{mn} \in \mathbb{R}$, falls eine der Reihen bei Ersetzung von a_{mn} durch $|a_{mn}|$ konvergiert. Dies ist der (große) Umordnungssatz für Doppelreihen. Es ist eine Ausweitung von Satz 6.20.

(v) Es ist

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2} dy \Big) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} \ ,$$

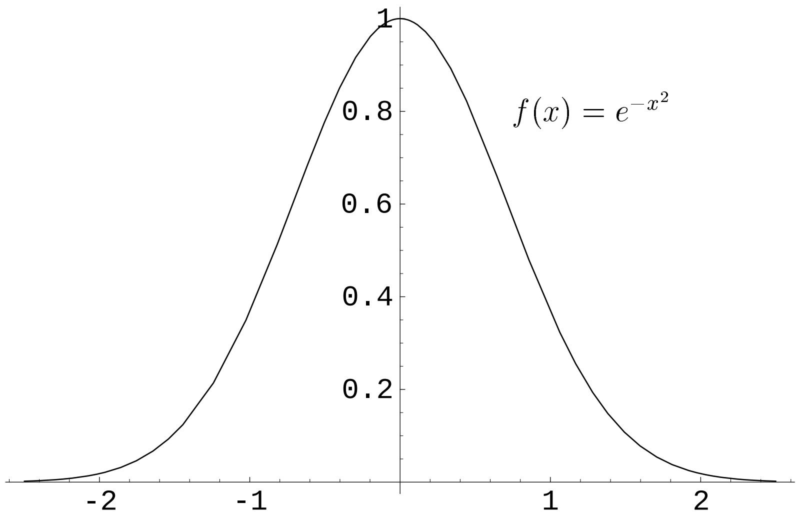
denn $-\frac{1}{2(1+x^2)} e^{-(1+x^2)y^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2(1+x^2)}$. Nun ist $\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan x \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$ (siehe Beispiel 17.12). Andererseits ist

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-x^2 y^2} dx \Big) y e^{-y^2} \, dy = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \Big) e^{-y^2} \, dy = \Big(\int_0^\infty e^{-y^2} \, dy \Big)^2 .$$

Da der Integrand nicht-negativ ist, können wir die Integrationsreihenfolge vertauschen und es folgt $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (vgl. Übung 26, Analysis II). Eine einfache Substitution liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\,\sigma^2} \, dx = 1, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Der Integrand wird die Dichte der *Gaußschen Normalverteilung* genannt. Der obige Beweis stammt von Laplace (1778).


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-2
-1
1
2
$f(x) = e^{-x^2}$

KAPITEL 36

Die Transformationsformel

Bei der Einführung des Cauchy-Riemann Integrals haben wir die Bedeutung der *Substitutionsregel* für die konkrete Berechnung von Integralen gesehen. In der Integrationstheorie für Abbildungen in mehreren Veränderlichen ist die Einführung neuer Variablen ebenfalls von Bedeutung. Wir leiten in diesem Kapitel die Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale bezüglich des Borel-Lebesgueschen Maßes her. Dies ist bedeutend schwieriger. In Kapitel 29 haben wir die Substitutionsregel bereits für jede bijektive affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ kennengelernt. Es gilt

$$\lambda^d(f(A)) = |\det f|\,\lambda^d(A)$$

für $A \in \mathcal{B}^d$. Wir wollen eine solche Formel für eine große Klasse von Abbildungen herleiten und gelangen zur *Transformationsformel* von Jacobi. Diese Formel stellt die Grundlage für die Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten dar, die wir in den folgenden Kapiteln entwickeln werden.

Im folgenden sei immer der Meßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$ gegeben. Für eine Borel-Menge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{B}^d_X := \mathcal{B}^d|_X.$$

Weiter verwenden wir die Abkürzung $\mathcal{L}^0(X, \overline{\mathbb{R}}) := \mathcal{L}^0(X, \lambda^d|_X, \overline{\mathbb{R}})$ und analog $\mathcal{L}^0(X, \overline{\mathbb{R}}^+)$ für $X \in \mathcal{B}^d$ mit $\lambda^d(X) > 0$.

Wir bereiten die Transformationsformel vor:

Lemma 36.1 *Sind U und V offene Teilmengen in $\mathbb{R}^d$ und ist $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus, so ist*

$$\mathcal{B}^d_V = \{\varphi(A), A \in \mathcal{B}^d_U\}.$$

Beweis: Da φ ein Diffeomorphismus ist, ist $\varphi^{-1}\colon V \to U$ stetig, also ist $\varphi(A) = (\varphi^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}^d_V$ für $A \in \mathcal{B}^d_U$. Also haben wir $\{\varphi(A), A \in \mathcal{B}^d_U\} \subset \mathcal{B}^d_V$ gezeigt. Ist nun $B \in \mathcal{B}^d_V$, so ist $A := \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}^d_U$ und $B = \varphi(A)$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Wir wollen nun beweisen:

Satz 36.2 *(Transformationsformel von Jacobi)*

Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt:

(a) Für alle $A \in \mathcal{B}^d_U$ ist

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \int_A |\det \partial\varphi|\, d\lambda^d.$$

(b) Für alle $f \in \mathcal{L}^0(V, \overline{\mathbb{R}}^+)$ gilt:

$$\int_V f\, d\lambda^d = \int_U f \circ \varphi \,|\det \partial\varphi|\, d\lambda^d.$$

(c) Eine numerische Funktion $f\colon V \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann λ^d-integrierbar über V, wenn die Funktion $(f \circ \varphi)\,|\det \partial\varphi|$ über U λ^d-integrierbar ist, und dann gilt:

$$\int_V f\, d\lambda^d = \int_U f \circ \varphi \,|\det \partial\varphi|\, d\lambda^d.$$

Teil (b) und (c) folgt aus (a) via der *Integration bezüglich eines Bildmaßes.* Dies stellen wir zunächst allgemein bereit.

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Meßraum und $T\colon \Omega \to \Omega'$ eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$-meßbare Abbildung und $\mu' = T(\mu)$ das Bildmaß (siehe Definition 29.7). Dann gilt:

Satz 36.3 (i) *Für $f' \in \mathcal{L}^0(\Omega', \mu', \overline{\mathbb{R}}^+)$ gilt*

$$(*) \qquad \int_{\Omega'} f'\, dT(\mu) = \int_\Omega f' \circ T\, d\mu.$$

(ii) *Es sei $f' \in \mathcal{L}^0(\Omega', \mu', \overline{\mathbb{R}})$. Dann ist f' genau dann $T(\mu)$-integrierbar, wenn $f' \circ T$ μ-integrierbar ist und es gilt $(*)$.*

(iii) *Zu $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ wird durch $\nu(A) := \int_A f\, d\mu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert (Maß mit der Dichte f bezüglich μ). Wir schreiben $\nu = f\mu$. Es gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}})$*

$$(**) \qquad \int_\Omega \varphi\, d\nu = \int_\Omega \varphi\, f\, d\mu.$$

Eine $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktion $\varphi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann ν-integrierbar, wenn φf μ-integrierbar ist, und in diesem Fall gilt $(*)$.

Beweis: zu (i):

Die Abbildung $f' \circ T$ ist $\mathcal{A}$-meßbar, also ist $\int f' \circ T\, d\mu$ definiert. Es sei zunächst $f' = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i'}$ mit $A_i' \in \mathcal{A}'$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, dann ist $f' \circ T = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ mit $A_i = T^{-1}(A_i')$. Mit $T(\mu)(A_i') = \mu(A_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ folgt somit $(*)$. Ist nun $f' \in \mathcal{L}^0(\Omega', \mu', \overline{\mathbb{R}}^+)$, so existiert eine Folge $(f_n')_n$ mit $f_n \in \mathcal{EF}(\Omega', \mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$, und $f_n' \uparrow f'$. Dann ist $(f_n' \circ T)_n$ eine Folge in $\mathcal{EF}(\Omega, \mathbb{R}^+)$ mit $f_n' \circ T \uparrow f' \circ T$. Die Definition des Integrals liefert dann unmittelbar $(*)$.

zu (ii):

Nach Teil (i) ist $\int (f')^+\, dT(\mu) = \int (f')^+ \circ T\, d\mu$ und $\int (f')^-\, dT(\mu) = \int (f')^- \circ T d\mu$ und mit $(f' \circ T)^+ = (f')^+ \circ T$ und $(f' \circ T)^- = (f')^- \circ T$ folgt die Behauptung.

zu (iii):

Es ist $\nu(\emptyset) = 0$ und $\nu \geq 0$. Für jede disjunkte Folge $(A_n)_n$ von Mengen in $\mathcal{A}$ mit $A = \bigcup_n A_n$ ist $1_A f = \sum_{n\geq 1} 1_{A_n} f$, also folgt mit Korollar

$$\nu(A) = \int 1_A f \, d\mu = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n),$$

also ist ν ein Maß. Weiter folgt für eine $\mathcal{A}$-einfache Funktion $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$

$$\int \varphi \, d\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int 1_{A_i} f \, d\mu = \int \varphi f \, d\mu.$$

Zu einem $\varphi \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ existiert eine Folge $(\varphi_n)_n$ einfacher Funktionen mit $\varphi_n \uparrow \varphi$. Dann gilt auch $\varphi_n f \uparrow \varphi f$ und $(**)$ folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz ...). Ist schließlich φ eine $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktion, so gilt $\int \varphi^+ \, d\nu = \int \varphi^+ f \, d\mu = \int (\varphi f)^+ \, d\mu$ und $\int \varphi^- \, d\nu = \int \varphi^- f \, d\mu = \int (\varphi f)^- \, d\mu$. Daraus und aus der Definition der Integrierbarkeit folgt der letzte Teil der Behauptung in (iii). $\square$

Beweis (von Satz 36.2):

Die Aussagen (b) und (c) folgen mit Hilfe von Satz 36.3 aus Teil (a) wie folgt. Nach (a) ist $\varphi^{-1}(\lambda^d|_V) = |\det \partial\varphi| \, \lambda^d|_U$ im Sinne der Notation in Satz 36.3 (iii). Dann ist nach Satz 36.3 $f \circ \varphi$ genau dann über U bezüglich $\mu := |\det \partial\varphi| \, \lambda^d$ integrierbar, wenn $(f \circ \varphi) \, |\det \partial\varphi|$ über U bezüglich λ^d integrierbar ist. Wir verwenden dazu, dass die Meßbarkeit von f zu der von $f \circ \varphi$ äquivalent ist. Setzen wir nun $T := \varphi^{-1}$, so liefert Satz 36.3 (ii)

$$\int f \, d\lambda^d = \int f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \, d\lambda^d = \int f \circ \varphi \; d(\varphi^{-1}(\lambda^d)) = \int f \circ \varphi \, |\det \partial\varphi| \, d\lambda^d.$$

Mit Satz 36.3 (i) und (iii) folgt analog (b).

Wir beweisen nun die Aussage (a) in fünf Schritten:

1. Schritt: Es genügt, die folgende *lokale* Aussage zu zeigen: Jeder Punkt $p \in U$ hat eine offene Umgebung $W \subset U$, so dass (a) für die Transformation $\varphi|_W \colon W \to \varphi(W)$ gilt (da φ ein Diffeomorphismus ist, ist $\varphi(W)$ offen). Dies sieht man so. Angenommen, wir haben die lokale Aussage bewiesen. Es existieren abzählbar viele W's der lokalen Aussage mit $U = \bigcup_{j\geq 1} W_j$ (siehe Lemma 28.13: man wählt Kugeln mit Mittelpunkten aus rationalen Komponenten und Radien aus $\mathbb{Q}^+$). Sei nun $A \in \mathcal{B}^d_U$. Dann ist $A = \bigcup_{j\geq 1} (A \cap W_j)$. Man findet eine disjunkte Folge $(A_j)_j$ mit $A = \bigcup_{j\geq 1} A_j$ und $A_j \in \mathcal{B}^d_U$: Man wähle einfach

$$A_1 = A \cap W_1, \; A_2 = (A \cap W_2) \setminus A_1, \; A_3 = (A \cap W_3) \setminus (A_1 \cup A_2), \; \ldots$$

Dann ist

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \lambda^d\big(\bigcup_{j\geq 1} \varphi(A_j)\big) = \sum_{j\geq 1} \lambda^d\big(\varphi(A_j)\big),$$

denn φ ist eine Bijektion und λ^d ist σ-additiv. Da wir nun für jedes A_j die Aussage (a) anwenden können, folgt

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \sum_{j\geq 1} \int_{A_j} |\det \partial\varphi| \, d\lambda^d = \int_A |\det \partial\varphi| \, d\lambda^d \, .$$

Damit folgt also die Aussage (a).

2. Schritt: Die Aussage (a) gilt, falls φ eine Permutation der Koordinaten ist. Dies folgt, da φ eine bijektive lineare Abbildung ist, also aus Satz 29.13 (das kann man auch direkt -ohne Verwendung von Satz 29.13- beweisen).

3. Schritt: Es seien $\psi\colon U \to W$ und $\varrho\colon W \to V$ zwei C^1-Diffeomorphismen mit $W = \psi(U)$ (ist eine offene Menge). Gilt die Aussage (a) für ϱ und ψ^{-1}, so gilt (a) auch für $\varrho \circ \psi\colon U \to V$. Um dies zu sehen, betrachten wir $A \in \mathcal{B}^d_U$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lambda^d((\varrho\circ\psi)(A)) &= \lambda^d(\varrho(\psi(A))) \\
&= \int_{\psi(A)} |\det \partial\varrho| \, d\lambda^d \qquad \text{(nach (a) für } \varrho) \\
&= \int 1_{\psi(A)}(y) \, |\det \partial\varrho(y)| \, d\lambda^d(y) \\
&= \int_W (1_A \circ \psi^{-1})(y) \, |\det \partial(\varrho\circ\psi)(\psi^{-1}(y))| \, \frac{1}{|\det \partial\psi(\psi^{-1}(y))|} \, d\lambda^d(y),
\end{aligned}$$

denn $\partial(\varrho\circ\psi)(x) = \partial\varrho(\psi(x)) \circ \partial\psi(x)$ nach der Kettenregel, also

$$\det \partial(\varrho\circ\psi)(x) = \det \partial\varrho(\psi(x)) \cdot \det \partial\psi(x)$$

und wähle $x = \psi^{-1}(y)$.

Nun wenden wir (c) für ψ^{-1} an: für die Abbildung ψ^{-1} gilt nach Voraussetzung die Aussage (a), und somit gilt die Aussage (c). Es folgt

$$\lambda^d((\varrho\circ\psi)(A)) = \int_U 1_A \, |\det \partial(\varrho\circ\psi)| \, d\lambda^d,$$

denn nach dem Satz 25.7 über inverse Funktionen gilt

$$\partial\psi^{-1}(y) = \big(\partial\psi(\psi^{-1}(y))\big)^{-1}$$

und damit folgt für die Determinante

$$|\det \partial\psi^{-1}(y)| = \frac{1}{|\det \partial\psi(\psi^{-1}(y))|}.$$

4. Schritt: Wir zeigen nun, dass die lokale Aussage (siehe 1. Schritt) für $d = 1$ gilt. Sei dazu $[a, b] \subset U$ und $f\colon \varphi([a, b]) \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt

$$\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi' \, d\lambda^1 = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \, d\lambda^1$$

nach Satz 18.1 und Satz 34.3. Nun ist

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \, d\lambda^1 = \begin{cases} \int_{\varphi([a,b])} f \, d\lambda^1 \, , & \text{falls } \varphi' > 0 \text{ auf } [a, b] \\ -\int_{\varphi([a,b])} f \, d\lambda^1 \, , & \text{falls } \varphi' < 0 \text{ auf } [a, b] \end{cases} .$$

Da φ ein C^1-Diffeomorphismus ist, ist entweder $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ auf $[a,b]$. Also folgt

$$\int_a^b (f\circ\varphi)|\varphi'|\,d\lambda^1 = \int_{\varphi([a,b])} f\,d\lambda^1 \,.$$

Es ist $\lambda^1(\{x\}) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, also gilt

$$\int_{\varphi([a,b[)} f\,d\lambda^1 = \int_{[a,b[} (f\circ\varphi)\,|\varphi'|\,d\lambda^1.$$

Wir setzen nun $f \equiv 1$ und wählen ein offenes Intervall $W \subset U$, beliebig, mit $\varphi(W) = V$. Dann folgt

$$\lambda^1\big(\varphi([a,b[)|_V\big) = \int_{[a,b[} |\varphi'|\,d\lambda^1|_W = |\varphi'|\,\lambda^1([a,b[\cap W),$$

also folgt Gleichheit für alle $[a,b[\subset W$ und somit folgt nach Satz 28.11 die lokale Aussage für $d = 1$.

5. Schritt: Nun zeigen wir: Gilt die lokale Aussage für die Dimension $d-1$, so gilt sie auch für d. Da der Fall $d = 1$ im 4. Schritt bewiesen wurde, folgt dann die Aussage (a) per Induktion für jede Dimension.

Es sei $\varphi\colon U \to \varphi(U) = V$ ein C^1-Diffeomorphismus und $p \in U$. Da nach dem Satz über inverse Funktionen (Satz 25.7) $\det \partial\varphi \neq 0$ in einer Umgebung von p, kann nach Schritt 2 angenommen werden (mittels Vertauschung der Koordinaten), dass $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \neq 0$ in einer offenen Umgebung U_1 von p. Hierbei bezeichnet φ_1 die erste Komponentenfunktion von φ.

Wir zerlegen nun φ lokal um p in die Verknüpfung zweier Abbildungen. Die Idee dabei ist, dass man sich auf den Fall $\varphi(x) = (x_1, \varphi_2(x), \ldots, \varphi_d(x))$ zurückziehen möchte. Es sei

$$\psi(x_1,\ldots,x_d) := (\varphi_1(x), x_2, \ldots, x_d)$$

für $x = (x_1,\ldots,x_d) \in U_1$. Dann ist ψ eine C^1-Abbildung auf U_1 und

$$\partial\psi = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_d} \\ \hline 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{array}\right),$$

also $\det(\partial\psi(p)) \neq 0$ und somit ist ψ ein lokaler Diffeomorphismus um p. Es existiert nach Satz 25.7 eine offene Umgebung $U_2 \subset U_1$ von p, mit ψ^{-1} ist eine C^1-Abbildung auf $W := \psi(U_2)$. W ist eine offene Menge. Es sei nun $\varrho\colon W \to V := \varphi(U_2)$ durch $\varrho := \varphi\circ\psi^{-1}$ gegeben. Dann gilt $\varrho(y) = (y_1, \varrho_2(y), \ldots, \varrho_d(y))$ für alle $y \in W$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_2 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & V \\ & W \arrow[ur, "\varrho"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, also folgt $\varphi = \varrho\circ\psi$.

Wir haben also lokal um p den Diffeomorphismus φ in die Komposition zweier Diffeomorphismen ψ und ϱ zerlegt, die beide mindestens eine Koordinate fest lassen.

Mit Schritt 3 kann also angenommen werden, dass φ mindestens eine Koordinate fest läßt und mit Schritt 2 genügt es, die lokale Behauptung in Schritt 1 für ein φ zu beweisen, das die 1. Koordinate fest läßt, und zwar in einer Umgebung $U_3 =: U$ von p. Wir definieren $\varphi\colon (t,x) \in U \to (t, \varphi_t(x))$ mit

$$\varphi_t\colon U_t := \{x \in \mathbb{R}^{d-1} : (t,x) \in U\} \to \mathbb{R}^{d-1},$$

definert durch

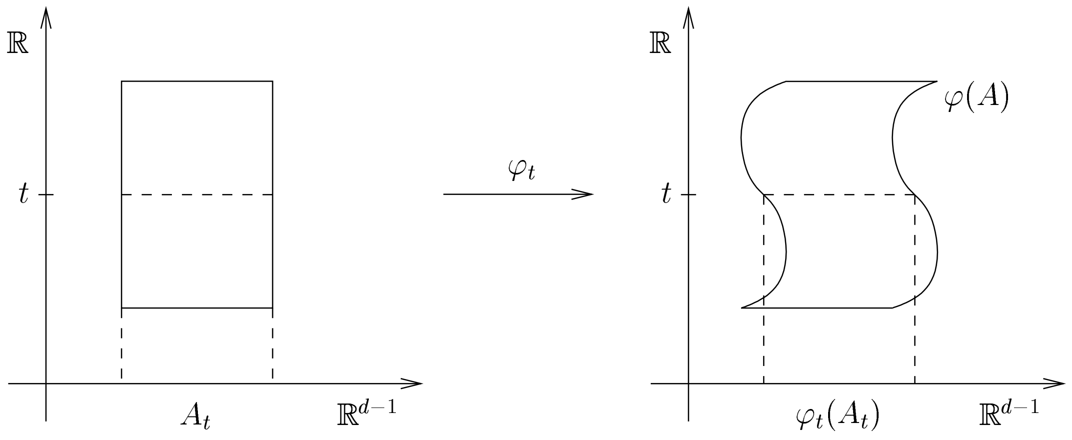
$$\varphi_t(x_2, \ldots, x_d) := (\varphi_2(t, x_2, \ldots, x_d), \ldots, \varphi_d(t, x_2, \ldots, x_d))$$

für $(x_2, \ldots, x_d)$ aus U_t.

Es gilt

$$(*) \qquad\qquad (\varphi(A))_t = \varphi_t(A_t)$$

für Teilmengen $A \subset U$, denn $\varphi_1(x_1, \ldots, x_d) = x_1$. Hierbei bezeichnet $(\varphi(A))_t$ bzw. A_t den t-Schnitt von $\varphi(A)$ bzw. A wie in Kapitel 35.



Für $x \in U$ gilt

$$\partial\varphi(x) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & & & \\ \vdots & & \partial\varphi_t(x') & \\ \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_1} & & & \end{array}\right)$$

mit $x = (t, x')$, also folgt $\det \partial\varphi(t, x') = \det \partial\varphi_t(x')$. Zusammengefaßt folgt für $A \in \mathcal{B}_U^d$

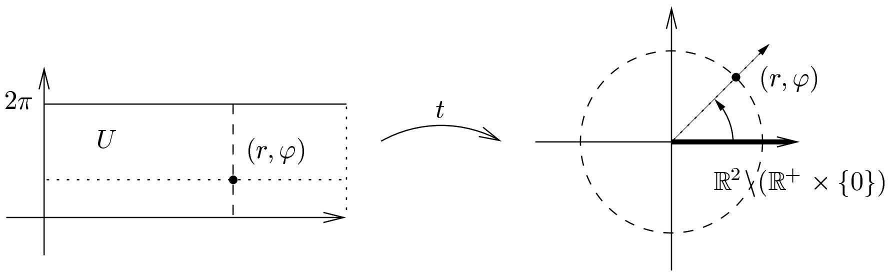
$$\begin{aligned}
\lambda^d(\varphi(A)) &= \int \lambda^{d-1}\big((\varphi(A))_t\big)\, d\lambda^1(t) \qquad \text{(Cavalieri, Satz 35.7)}\\
&= \int \lambda^{d-1}\big(\varphi_t(A_t)\big)\, d\lambda^1(t) \qquad \text{nach } (*)\\
&= \int \Big(\int_{A_t} |\det \partial\varphi_t(x)|\, d\lambda^{d-1}(x)\Big)\, d\lambda^1(t) \text{ (Induktionsannahme)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} 1_{A_t} |\det \partial\varphi_t(x)|\, d\lambda^{d-1}(x)\Big)\, d\lambda^1(t)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 1_A\, |\det \partial\varphi|\, d\lambda^d \qquad \text{(Fubini, Satz 35.13)}\\
&= \int_A |\det \partial\varphi|\, d\lambda^d\ .
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Beispiele 36.4 (i) *Ebene Polarkoordinaten*: Es sei

$$t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Betrachte $U := (0, \infty) \times (0, 2\pi)$.



Dann ist

$$t(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \geq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\}), \quad t(\overline{U}) = \mathbb{R}^2,$$

und $t|_U$ ist ein C^1-Diffeomorphismus (ist sogar ein Element von $\mathrm{Diff}^\infty(U, t(U))$) mit $\det \partial t(r, \varphi) = r$, denn

$$[\partial t(r, \varphi)] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Da $\{(x, 0)\colon x \geq 0\}$ eine λ^2-Nullmenge ist, gilt: Für jedes $f \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, \overline{\mathbb{R}}^+)$ gilt nach Satz 35.13 (Fubini) und Satz 36.2 (Transformationsformel):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi \qquad (*)\\
&= \int_0^\infty r\Big(\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi\Big)\, dr.
\end{aligned}$$

f ist genau dann λ^2-integrierbar, wenn dies für

$$(0,\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R},\quad (r,\varphi)\mapsto f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\; r$$

richtig ist. Dann gilt (*) (siehe Satz 36.2 und Satz 35.13).

Wir betrachten das folgende Beispiel: Nach dem Satz von Funbini (35.13) ist

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\Big)^2 &= \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\Big)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d\lambda^2 \text{ und nach } (*)\\ &= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^\infty re^{-r^2}\,dr\Big)\,d\varphi = \pi\int_0^\infty \frac{d}{dr}(-e^{-r^2})\,dr.\end{aligned}$$

Also haben wir erneut bewiesen:

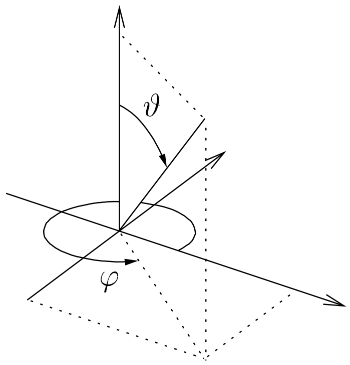
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

(vgl. Übung 26, Analysis II, sowie Beipsiel 35.14 (v)).

(ii) *Kugelkoordinaten*: Es sei

$$f_3\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad (r,\varphi,\vartheta)\mapsto(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta).$$

Betrachte $U := (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$, dann ist $f_3|_U$ ein C^1-Diffeomorphismus (sogar $\in \mathrm{Diff}^\infty(U, f_3(U))$ und $f_3(U) = \mathbb{R}^3\setminus(\mathbb{R}^+\times\{0\}\times\mathbb{R})$ (man nimmt eine abgeschlossene Halbebene raus).



Weiter ist $\det\partial f_3(r,\varphi,\vartheta) = -r^2\sin\vartheta \neq 0$ für $(r,\varphi,\vartheta)\in U$, denn

$$[\partial f_3(r,\varphi,\vartheta)] = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta\\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta\end{pmatrix}.$$

Man entwickle nach der letzten Zeile.

Da $\mathbb{R}^+\times\{0\}\times\mathbb{R}$ eine λ^3-Nullmenge ist, folgt: Für $f\in\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^3,\mathcal{B}^3,\overline{\mathbb{R}}^+)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,d\lambda^3(x,y,z) =$$

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,r^2\;\sin\vartheta\,d\lambda^1(\vartheta)\,d\lambda^1(\varphi)\,d\lambda^1(r)$$

und es gilt die analoge Aussage wie in Beispiel (i) für die λ^3-Integrierbarkeit von f.

Wir betrachten ein Beispiel zum Rechnen mit Kugelkoordinaten. Es sei $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R\}$, $R > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda^3(A) &= \int_{\mathbb{R}^3} 1_A \, d\lambda^3 = \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot (-\cos\vartheta)|_0^\pi \cdot (2\pi) = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

Man vergleiche mit Beispiel 35.10.

KAPITEL 37

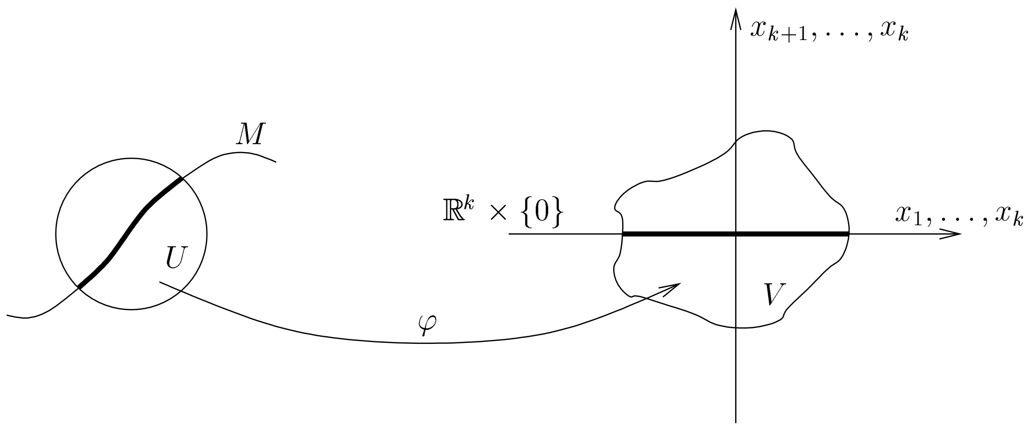
Untermannigfaltigkeiten

Neben Gebietsintegralen begegnet man auch *Kurven-* oder *Flächenintegralen*. Wir wollen dabei über *gekrümmte* Bereiche integrieren. Dies führt zur Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten. Wir beschränken uns im Rahmen dieser Vorlesung auf die Einführung von Untermannigfaltigkeiten. Grob gesprochen sind dies Teilmengen des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$, die lokal und in *flachmachenden* Koordinaten wie offene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$, $k \leq n$, aussehen. Der Satz über implizite Funktionen (Satz 26.1) liefert uns dann die lokale Darstellung einer Untermannigfaltigkeit als Graphen einer Funktion. Abstrakte Mannigfaltigkeiten wurden von B. Riemann 1854 skizziert. Diese sehen ebenfalls lokal wie offene Mengen des $\mathbb{R}^k$ aus, müssen aber nicht in einen Vektorraum eingebettet sein.

Definition 37.1 Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit (UM) der Klasse $q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung U von x_0, eine offene Menge V in $\mathbb{R}^n$ sowie ein $\varphi \in \mathrm{Diff}^q(U, V)$ gibt mit

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Ein- bzw. zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ heißen (in $\mathbb{R}^n$ eingebettete) *Kurven* bzw. *Flächen*, Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$ heißen *Hyperflächen*. Wir sagen fortan kurz C^q-Untermannigfaltigkeit und im Fall $q = \infty$ kurz Untermannigfaltigkeit.



Die Definition besagt, dass eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit lokal so in $\mathbb{R}^n$ liegt wie $\mathbb{R}^k$ als Untervektorraum in $\mathbb{R}^n$, bis auf eine kleine *Deformation*.

Beispiele 37.2 (i) Jede Teilmenge X des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn X in $\mathbb{R}^n$ offen ist. Dazu sei X eine n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit und $x_0 \in X$. Dann existiert eine offene Umgebung U von x_0 und eine offene Menge V in $\mathbb{R}^n$ sowie $\varphi \in \mathrm{Diff}^\infty(U,V)$ mit $\varphi(U\cap X) = V$. Also folgt $U\cap X = \varphi^{-1}(V) = U$, also ist $U \subset X$, und somit ist X offen. Ist umgekehrt X offen in $\mathbb{R}^n$, so setzen wir $U := X$ und $V := X$ und $\varphi = \mathrm{id}_X$.

(ii) Es sei $M = \{x_0, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist M eine 0-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dazu setzen wir $\alpha := \min\{|x_i - x_j|; 0 \leq i, j \leq k, i \neq j\}$. Es sei $y \in M$. Wir betrachten $B(y,\alpha)$, $\varphi(x) := x - y$ mit $x \in B(y,\alpha)$. Dann ist $\varphi \in \mathrm{Diff}^\infty(B(y,\alpha), \alpha B)$ und $\varphi(B(y,\alpha)\cap M) = \{0\}$. Hierbei bezeichnet $B = B(0,1)$.

Satz 37.3 *Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge und $f \in C^q(X,\mathbb{R}^n)$. Dann ist* $\mathrm{graph}(f)$ *eine k-dimensionale C^q-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{k+n}$.*

Beweis: Wir wählen $U := X \times \mathbb{R}^n$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{k+n}\colon (x,y) \mapsto (x, y - f(x))$. Dann ist $\varphi \in C^q(U, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n)$, $\varphi(U) = U$. Weiter ist $\varphi\colon U \to U$ bijektiv mit $\varphi^{-1}(x,z) = (x, z + f(x))$. Somit ist φ ein C^q-Diffeomorphismus von U auf sich und es gilt

$$\varphi\big(U \cap \mathrm{graph}(f)\big) = X \times \{0\} = U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

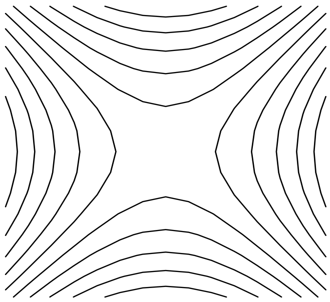
Dies war zu zeigen. □

Satz 37.4 *(vom regulären Wert) Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und c sei ein regulärer Wert von $f \in C^q(X,\mathbb{R}^n)$ (siehe Definition 26.4). Dann ist $f^{-1}(c)$ eine $(k-n)$-dimensionale C^q-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$.*

Beweis: Nach Bemerkung 26.5 (d) kann $f^{-1}(c)$ lokal als Graph einer C^q-Funktion in $k - n$ Variablen dargestellt werden. Damit folgt die Behauptung aus Satz 37.3. □

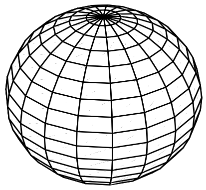
Korollar 37.5 *Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f \in C^q(X,\mathbb{R})$. Gilt $\nabla f(x) \neq 0$ für $x \in f^{-1}(c)$, so ist die Niveaufläche $f^{-1}(c)$ von f eine C^q-Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$ (folgt sofort aus Bemerkung 26.5(c) und Satz 37.4).*

Beispiele 37.6 (i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$. f besitzt $(0,0)$ als einzigen kritischen Punkt. Die Niveaukurven sind *Hyperbeln.*



(ii) Die Menge

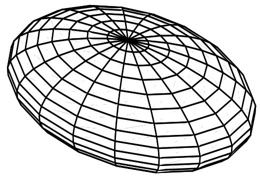
$$S^{n-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\} \quad (n-1) - \textit{Sphäre})$$



ist eine $n-1$ dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ in $\mathbb{R}^n$. Denn sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto |x|^2$. f ist glatt und es gilt $S^{n-1} = f^{-1}(1)$. Weiter ist $\nabla f(x) = 2x$, also ist 1 ein regulärer Wert.

(iii) Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Die Menge

$$\mathcal{E} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;:\; \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1 \right\} \quad (\textit{Ellipsoid})$$



ist eine $n-1$ dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ in $\mathbb{R}^n$. Dazu betrachten wir

$$f(x) := \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - 1,\; Df(x) = \big(2\frac{x_1}{a_1}, \ldots, 2\frac{x_n}{a_n}\big) \neq 0 \quad \text{für} \;\; x \in \mathcal{E}.$$

(iv) Es sei $0 < r < R$. Dann ist

$$\mathcal{T} := \big\{ x \in \mathbb{R}^3 \;:\; (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 = r^2 \big\} \quad (\textit{Torus})$$

ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ in $\mathbb{R}^3$. Mit

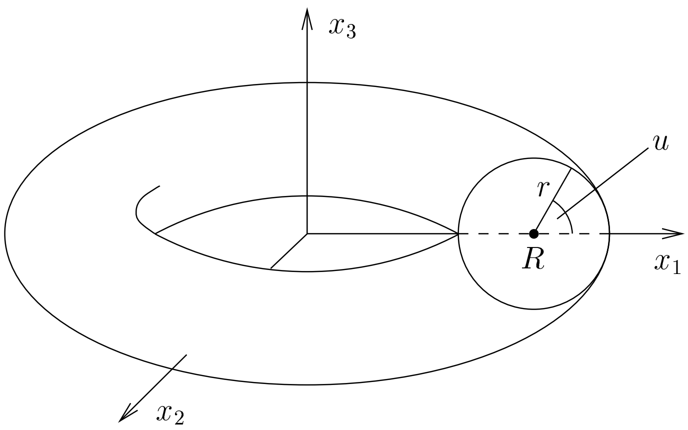
$$f(x) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 - r^2, x \neq 0$$

ist

$$Df(x) = \Big(2(\sqrt{x_1^2+x_2^2} - R)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, 2(\sqrt{x_1^2+x_2^2} - R)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, 2x_3\Big) \neq 0$$

für $x \in \mathcal{T}$.

Als Ergänzung klären wir, warum die Menge $\mathcal{T}$ Torus genannt wird. Gegeben sei ein Kreis in der (x_1, x_3)-Ebene um $(R, 0)$ mit Radius r, $\;0 < r < R$.



$\mathcal{T}$ ist dann die Punktmenge im $\mathbb{R}^3$, die bei Drehung dieses Kreises um die x_3-Achse entsteht. Der Kreis in der (x_1, x_3)-Ebene wird durch $(R + r\cos u, r\sin u) = \gamma(u)$ beschrieben. Bei Drehung um die x_3-Achse bleibt die x_3-Koordinate unverändert. In der (x_1, x_2)-Ebene gilt in Polarkoordinaten:

$$pe^{iv} = p(\cos v + i\sin v) = (p\cos v,\ p\sin v),$$

wobei p der Abstand vom Nullpunkt ist. Also ist

$$x_1 = (R + r\cos u)\cos v, \quad x_2 = (R + r\cos u)\sin v, \quad x_3 = r\sin u\ .$$

Damit ist $x_1^2 + x_2^2 = (R + r\cos u)^2$, also

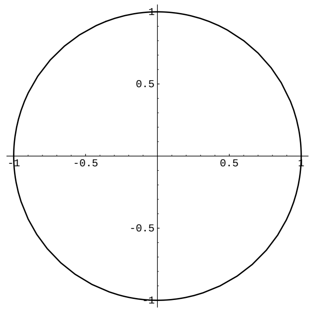
$$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 = r^2\cos^2 u = r^2(1 - \sin^2 u) = r^2 - x_3^2.$$

Definition 37.7 Es sei X offen in $\mathbb{R}^k$. Eine Abbildung $f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$ heißt *Immersion* (von X in $\mathbb{R}^n$), wenn $\partial f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ für jedes $x \in X$ injektiv ist. f heißt dann *reguläre Parametrisierung* von $f(X)$.

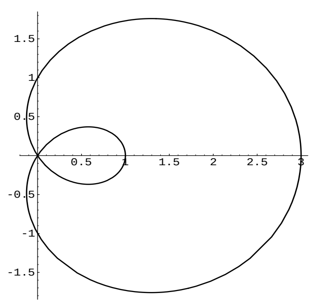
Beispiele 37.8 (i) Ist $f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion, so gilt $k \leq n$.

(ii) Für $l \in \mathbb{N}$ ist $t \mapsto (\cos(lt), \sin(lt))$ eingeschränkt auf $(0, 2\pi)$ eine C^∞-Immersion. Das Bild von $[0, 2\pi)$ unter dieser Abbildung ist die S^1, l-mal durchlaufen.

(iii) Es sei $(-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (1 + 2\cos t)\ (\cos t, \sin t)$ gegeben. Dies ist eine glatte Immersion (der Abschluß des Bildes wird als Limaçon (Ohrschnecke) von Pascal bezeichnet).



zu (ii)



zu (iii)

Satz 37.9 *(Immersionssatz) Es sei X offen in $\mathbb{R}^n$, und $f \in C^q(X, \mathbb{R}^n)$ sei eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ eine offene Umgebung X_0 in X, so dass $f(X_0)$ eine k-dimensionale C^q-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.*

Beweis: Ohne Einschränkung sind die ersten k Zeilen der Jacobi-Matrix $[\partial f(x_0)]$ linear unabhängig, also

$$\det[\partial_l f^j(x_0)]_{1 \le j,l \le k} \ne 0.$$

Betrachte die in $\mathbb{R}^n$ offene Teilmenge $X \times \mathbb{R}^{n-k}$ und die Abbildung

$$\psi \colon X \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n, \; (x, y) \mapsto f(x) + (0, y).$$

Es ist $\psi \in C^q$ und

$$[\partial\psi(x_0, 0)] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 1_{n-k} \end{bmatrix}$$

mit

$$A := \begin{bmatrix} \partial_1 f^1 & \cdots & \partial_k f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^k & \cdots & \partial_k f^k \end{bmatrix} (x_0) \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} \partial_1 f^{k+1} & \cdots & \partial_k f^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n & \cdots & \partial_k f^n \end{bmatrix} (x_0)\ .$$

Also folgt $\partial\psi(x_0, 0) \in \mathcal{L}\mathrm{aut}(\mathbb{R}^n)$, denn $\det[\partial\psi(x_0, 0)] = \det A \ne 0$. Nach dem Satz von der Umkehrfunktion (Satz 25.7) existieren $V \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}^n}(x_0, 0)$ und $U \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}^n}(\psi(x_0, 0))$ mit $\psi|_V \in \mathrm{Diff}^q(V, U)$. Es sei $\Phi := (\psi|_V)^{-1} \in \mathrm{Diff}^q(U, V)$ und $X_0 := \{x \in \mathbb{R}^k : (x, 0) \in V\}$. Dann ist X_0 eine offene Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}^k$ und

$$\Phi(U \cap f(X_0)) = \Phi(\psi(X_0 \times \{0\})) = X_0 \times \{0\} = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 37.10 Das Beispiel 37.8 (iii) zeigt, dass mit f Immersion $f(X)$ im allgemeinen keine C^q–Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Hier hat $f(X)$ Selbstdurchdringungen! Das Beispiel 37.8 (ii) zeigt, dass Bilder nicht–injektiver Immersionen Untermannigfaltigkeiten sein können.

Wir betrachten nun eine Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit, die als Definition verwendet werden könnte.

Satz 37.11 *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale C^q-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine offene Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}^n$ und C^q-Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-k} \colon U \to \mathbb{R}$ gibt mit*

(i) $M \cap U = \{x \in U | f_1(x) = \cdots = f_{n-k}(x) = 0\}$
(ii) $\mathrm{grad} f_1, \ldots, \mathrm{grad} f_{n-k}$ *sind linear unabhängig in* $x \in U$.

Beweis: Es sei $\varphi \colon U \to V$ die Abbildung wie in Definition 37.1. Dann erfüllen $f_i := \varphi_{k+i}$, $1 \le i \le n-k$, die gewünschten Eigenschaften (i) und (ii). Eigenschaft (i) folgt nach Definition, denn $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Eigenschaft (ii) gilt, da φ ein C^q-Diffeomorphismus ist, womit $\mathrm{grad} f_1, \ldots, \mathrm{grad} f_{n-k}$ linear unabhängig für alle $x \in U$ sind.

Seien umgekehrt $f_1, \ldots, f_{n-k} \colon U \to \mathbb{R}$ Funktionen, die (i) und (ii) erfüllen. Betrachte $f = (f_1, \ldots, f_{n-k}) \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$. Mit (i) gilt $M \cap U = f^{-1}(0)$ und mit (ii) hat $\partial f(x)$ Rang $n-k$ für alle $x \in U$. Also ist $M \cap U$ nach Satz 37.4 eine k-dimensionale C^q-Untermannigfaltigkeit, damit auch M. □

Die abschließende Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit wird im Folgenden immer wieder verwendet:

Satz 37.12 *(Parameterdarstellung) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale C^q-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine offene Umgebung $V \subset M$ relativ M, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ der Klasse C^q gibt, die U homöomorph auf V abbildet (Bezeichnung: $f \colon U \xrightarrow{q} V$) (Erinnerung: Ein Homöomorphismus ist ein C^0–Diffeomorphismus).*

Beweis: „$\Leftarrow$ “ist der Immersionssatz Satz 37.9.

„$\Rightarrow$ “Es existiert laut Definition 37.1 ein $\varphi \in \mathrm{Diff}^q(\tilde{\mathrm{V}}, \tilde{\mathrm{U}})$, $\tilde{V}$ ist eine offene Umgebung von $x_0 \in M$ und $\tilde{U}$ eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$, mit

$$\varphi(\tilde{V} \cap M) = \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Setze nun $V := \tilde{V} \cap M$ und $U := \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Dann ist V offene Umgebung von x_0 relativ zu M und U eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^k$. Wir setzen nun $f := \varphi^{-1} : U \subset \mathbb{R}^k \to V$. Dies ist die gesuchte Immersion. □

Definition 37.13 Das Tripel (U, f, V) in Satz 37.12 heißt eine *lokale Parameterdarstellung* oder *Karte* der Untermannigfaltigkeit M. Eine Menge $\{(U_\lambda, f_\lambda, V_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ von Karten von M mit $M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ heißt *Atlas* von M.

Bemerkung 37.14
(i) Da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar und dicht in $\mathbb{R}^n$ ist, besitzt jede Untermannigfaltigkeit einen Atlas aus höchstens abzählbar vielen Karten.
(ii) Dem Beweis der Hinrichtung in Satz 37.12 entnehmen wir, dass wegen der eins zu eins Korrespondenz der Abbildung aus der Definition 37.1 und der Kartenabbildung (Immersion) f in Satz 37.12 auch $(U \cap M, \varphi|_U)$ aus Definition 37.1 eine Karte von M und $x_0 \in M$ verwendet werden könnte.

Beispiel 37.15 Betrachte $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\cos t, \sin t)$. Dann ist φ eine Immersion und

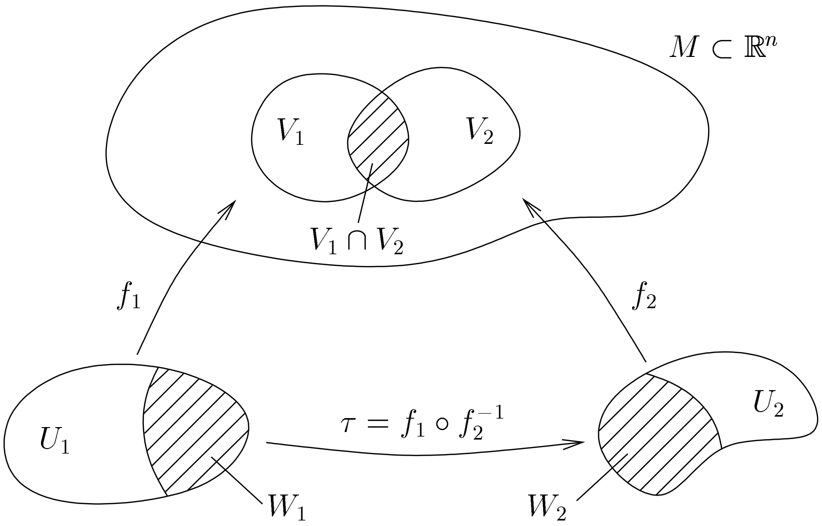
$$\Big\{ \Big((0, 3\pi/2), \varphi|_{(0,3\pi/2)}, \varphi((0, 3\pi/2)) \Big),\ \Big((\pi, 5\pi/2), \varphi|_{(\pi,5\pi/2)}, \varphi((\pi, 5\pi/2)) \Big) \Big\}$$

ist ein Atlas von S^1.

Die lokale geometrische Gestalt einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist unabhängig von der Beschreibung durch lokale Karten. Häufig ist es nützlich, zu besonders geeigneten Karten zu wechseln.

Satz 37.16 *(Kartenwechsel, Parametertransformation) Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^q und $(U_1, f_1, V_1), (U_2, f_2, V_2)$ zwei*

Karten von M mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann sind $W_1 = f_1^{-1}(V) \subset U_1$ und $W_2 := f_2^{-1}(V) \subset U_2$ offen und $\tau := f_2^{-1} \circ f_1 \colon W_1 \to W_2$ ist ein C^q-Diffeomorphismus.



Beweis: Die Menge V ist eine offene Teilmenge von V_j und f_j ist stetig, also ist W_j offen, $j = 1, 2$. Die Abbildung τ ist bijektiv. Es sei $x_1 \in W_1$ und

$$y := f_1(x_1), \quad x_2 := f_2^{-1}(y) = \tau(x_1).$$

Nach Definition 37.1 existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von y und ein $U' \subset \mathbb{R}^n$, offen, und ein C^q-Diffeomorphismus f mit $f(M \cap U) = U' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Ohne Einschränkung ist $M \cap U \subset V$. Es sei $W_j' := f_j^{-1}(M \cap U)$, $j = 1, 2$. Auf diesen Mengen gilt $f \circ f_1 = (g_1, \ldots, g_k, 0, \ldots, 0)$ und $f \circ f_2 = (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0)$. Da $\mathrm{Rang}(Df_j) = k$ und Df invertierbar ist, folgt $\mathrm{Rang}(D(f \circ f_j)) = k$, $j = 1, 2$. Also sind

$$g = (g_1, \ldots, g_k) \colon W_1' \to U' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

und

$$h = (h_1, \ldots, h_k) \colon W_2' \to U' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

C^q Diffeomorphismen (betrachte $U' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^k$). Auf W_1 ist nun

$$\tau = f_2^{-1} \circ f_1 = (f \circ f_2)^{-1} \circ (f \circ f_1) = h^{-1} \circ g,$$

also ist τ ein C^q-Diffeomorphismus von W_1' nach W_2'. Nun war x_1 beliebig in W_1 gewählt. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

KAPITEL 38

Tangenten, Normalen und Orientierung

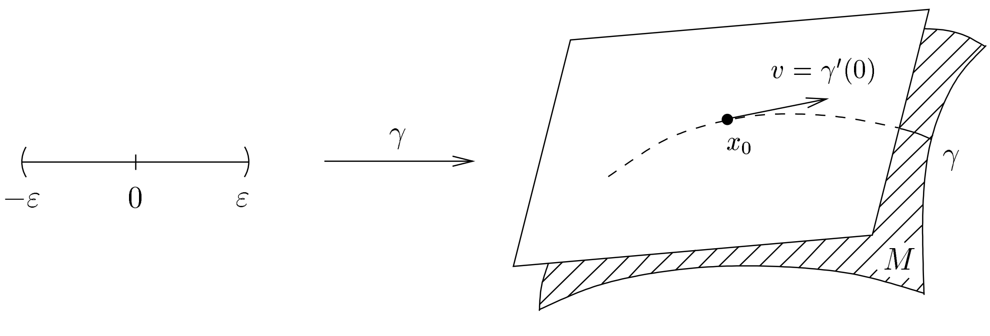
Wir führen nun lineare Strukturen ein, um die Konzepte der Differentialrechnung auf Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten zu übertragen. Die Strukturen werden mit Hilfe lokaler Koordinaten beschrieben. Der Begriff der Orientierung wird erst später bei der Integration von sogenannten Differentialformen eine Rolle spielen, ist aber ein Begriff für Untermannigfaltigkeiten, und wird daher schon jetzt vorgestellt.

Was ist die Differenzierbarkeit von einer Abbildung $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$, wobei S^2 die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ ist? Für $p \in S^2$ und $h \in \mathbb{R}^3$ mit $h \neq 0$ liegt $p+h$ im allgemeinen nicht auf S^2, also ist $f(p+h) - f(p)$ nicht erklärt. Dies deutet die Schwierigkeiten an, den Differenzierbarkeitsbegriff geeignet zu erklären.

Es sei fortan $q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Definition 38.1 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^q.

(i) $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt x_0, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und ein $\gamma \in C^1((-\varepsilon,\varepsilon), M)$ gibt mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$.
(ii) $T_{x_0}M := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ im Punkt } x_0\}$ heißt der *Tangentialraum* von M im Punkt x_0.
(iii) $u \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor* an M im Punkt x_0, wenn gilt $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $v \in T_{x_0}M$ (hierbei bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt).
(iv) $N_{x_0}M := \{u \in \mathbb{R}^n : u \text{ ist Normalenvektor zu } M \text{ im Punkt } x_0\}$ heißt der *Normalenraum* von M im Punkt x_0.



Satz 38.2 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^q und $x_0 \in M$. Dann gilt:*

(i) *$T_{x_0}M$ ist ein k–dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.*
(ii) *$N_{x_0}M$ ist ein $n-k$–dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.*

(iii) *Sei* (U, φ, V) *eine Karte von* M *und* $x_0 \in V$ *und* $y_0 = \varphi^{-1}(x_0)$. *Dann ist* $D_1\varphi(y_0), \ldots, D_k\varphi(y_0)$ *eine Basis von* $T_{x_0}M$

(iv) *Es sei* U *eine offene Umgebung von* x_0 *in* $\mathbb{R}^n$ *und* $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$ *so, dass* x_0 *ein regulärer Punkt von* f *ist und* $M \cap U = f^{-1}(0)$. *Dann ist*

$$T_{x_0}M = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f_j(x_0), v\rangle = 0 \;\; \textit{für} \;\; j = 1, \ldots, n-k\}.$$

Beweis: Es seien $T_1 := \operatorname{span}\{D_1\varphi(y_0), \ldots, D_k\varphi(y_0)\}$ und

$$T_2 := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f_j(x_0), v\rangle = 0 \;\; \text{für} \;\; j = 1, \ldots, n-k\}.$$

T_1 und T_2 sind k-dimensionale Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen: $T_1 \subset T_{x_0}M \subset T_2$. Dann ist notwendig $T_1 = T_{x_0}M = T_2$, und somit sind bereits (i), (iii) und (iv) bewiesen. Aus (iv) folgt $N_{x_0}M = \operatorname{span}\{\nabla f_1(x_0), \ldots, \nabla f_{n-k}(x_0)\}$, womit auch (ii) gezeigt ist.

Wir zeigen zunächst $T_1 \subset T_{x_0}M$: Es sei $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i \, D_i\varphi(y_0) \in T_1$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $y_0 + t\sum_{i=1}^k \lambda_i \, e_i \in U$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt. Dabei bezeichnet e_i den i-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^k$. Es sei nun $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\gamma(t) := \varphi\big(y_0 + t\sum_{i=1}^k \lambda_i \, e_i\big), \quad \text{also} \quad \gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), M)$$

und

$$\gamma(0) = \varphi(y_0) = x_0, \;\; \gamma'(0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \, D_i\varphi(y_0) = v.$$

Somit ist $v \in T_{x_0}M$, was wir zeigen wollten.

Wir zeigen nun $T_{x_0}M \subset T_2$: Es sei $v \in T_{x_0}M$, also $v = \psi'(0)$ für eine Abbildung $\psi \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ mit $\psi(0) = x_0$. Dann ist für jedes $1 \leq j \leq n-k$ nach Voraussetzung $f_j(\psi(t)) = 0$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Also folgt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} f_j(\psi(t))|_{t=0} &= \langle \nabla f_j(\psi(0)), \psi'(0)\rangle \\ &= \langle \nabla f_j(x_0), v\rangle \end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, n-k$, also ist $v \in T_2$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Definition 38.3 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^q. Dann heißt

$$\mathrm{TM} := \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in M, v \in T_xM\}$$

der *Tangentialraum* von M.

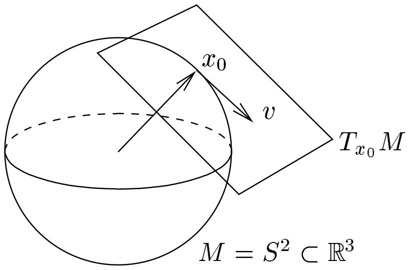
Beispiele 38.4 (i) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in U$. Dann ist $T_{x_0}U = \mathbb{R}^n$. Man betrachte $\gamma(t) = x_0 + t\,v$.

(ii) Wir betrachten die Sphäre $S^{n-1} = f^{-1}(0)$ mit $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$. Dann ist

$$N_{x_0}S^{n-1} = \operatorname{span}\,\{(x_{10}, \ldots, x_{n0})\} \text{ und } T_{x_0}S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle x_0, v\rangle = 0\}$$

Im Fall $n = 3$ gilt

$$T_{(0,0,1)}S^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$N_{(0,0,1)}S^2 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in \mathbb{R}\}.$$



(iii) Wir betrachten den Torus aus Beispiel 37.6 (iv): $\mathcal{T} = f^{-1}(0)$ mit $f(x) := (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 - r^2$. Dann ist

$$T_{x_0}\mathcal{T} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R\right) \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_3 v_3 = 0 \right\}.$$

Wählt man als Karte eine Polarkoordinatendarstellung

$$x = \psi(\varphi, \Theta) = \Big((R + r\cos\Theta)\cos\varphi, (R + r\cos\Theta)\sin\varphi, r\sin\Theta\Big),$$

so ist

$$T_x\mathcal{T} = \operatorname{span}\left\{ \Big(-(R + r\cos\Theta)\sin\varphi, (R + \cos\Theta)\cos\varphi, 0\Big), \Big(-r\sin\Theta\cos\varphi, -r\sin\Theta\sin\varphi, r\cos\Theta\Big) \right\}.$$

Wir kommen nun zum Begriff der Orientierung. Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $B(V)$ die Menge der Basen in V. Zu zwei Basen $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ in V sei $M_{a,b}$ die Übergangsmatrix des Basiswechsels

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\, b_i.$$

Die Basen a und b heißen *gleichorientiert*, in Zeichen $a \sim b$, falls $\det(M_{a,b}) > 0$. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $B(V)$. $B(V)/\sim$ hat genau zwei Elemente. Eine *Orientierung* $\mathcal{O}_V$ von V ist eine Äquivalenzklasse $\mathcal{O}_V := [a]$ von Basen. Man nennt $(V, \mathcal{O}_V)$ einen orientierten Vektorraum. $a \in B(V)$ mit $a \in \mathcal{O}_V$ heißt *positiv orientiert*. Es bezeichne $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} := [(e_1, \ldots, e_n)]$.

Definition 38.5 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. M heißt *orientierbar*, falls eine Familie von Orientierungen $\mathcal{O}_M = \{\mathcal{O}_{T_xM}\}_{x \in M}$ in den Tangentialräumen existiert, so dass für jedes $x_0 \in M$ eine Karte (U, φ, V) existiert mit $x_0 \in V$ und

$$(D_1\varphi(y), \ldots, D_k\varphi(y)) \in \mathcal{O}_{T_xM} \quad \text{für} \quad x \in V.$$

Hierbei ist $y = \varphi^{-1}(x)$. Eine solche Karte heißt *positiv orientiert*. Die Familie $\mathcal{O}_M$ heißt *Orientierung von* M, das Paar $(M, \mathcal{O}_M)$ heißt *orientierte Untermannigfaltigkeit*.

Satz 38.6 *Eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn ein Atlas $\mathcal{A}$ auf M existiert, so dass für je zwei Karten (U_1, φ_1, V_1), (U_2, φ_2, V_2) in $\mathcal{A}$ mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ gilt:*

$$(*) \quad \det\big(D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(u)\big) > 0 \quad \textit{für alle} \quad u \in \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2).$$

Man nennt $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ dann orientierungstreu. (Erinnerung: $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ist mit Satz 37.16 ein C^∞-Diffeomorphismus.)

Als Vorbereitung für den Beweis dieses Satzes betrachten wir die folgende Transformationsformel. Die Basis

$$(D_1\varphi(y_0), \ldots, D_k\varphi(y_0)), \quad y_0 = \varphi^{-1}(x_0),$$

(siehe Satz 38.2) nennt man die *kanonische Basis* in $T_{x_0}M$ bezüglich der Karte (U, φ, V). Wir beschreiben nun die Beziehung zwischen den kanonischen Basen zu zwei verschiedenen Karten um einen Punkt einer Untermannigfaltigkeit.

Satz 38.7 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Weiter seien (U_1, φ, V_1) und (U_2, ψ, V_2) zwei Karten um x_0. Dann gilt mit $y_0 = \varphi^{-1}(x_0)$*

$$D_i\varphi(y_0) = \sum_{\alpha=1}^{k} D_i(\psi^{-1} \circ \varphi)_\alpha(\varphi^{-1}(x_0))\, D_\alpha\psi(\psi^{-1}(x_0)),$$

wobei $D_i(\psi^{-1} \circ \varphi)_\alpha(\varphi^{-1}(x_0))$ die α-te Komponente des Vektors der i-ten partiellen Ableitung $D_i(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x_0))$ ist. Die Übergangsmatrix ist also die Jacobimatrix des Kartenwechsels $\psi^{-1} \circ \varphi$.

Beweis: Es gilt nach Definition und unter Verwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned}
D_i\varphi(\varphi^{-1}(x_0)) &= (D\varphi)(\varphi^{-1}(x_0))(e_i) \\
&= (D(\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi))(\varphi^{-1}(x_0))(e_i) \\
&= D\psi(\psi^{-1}(x_0)) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x_0))(e_i) \\
&= D\psi(\psi^{-1}(x_0)) \left(\sum_{\alpha=1}^{k} D_i(\psi^{-1} \circ \varphi)_\alpha(\varphi^{-1}(x_0)) \cdot e_\alpha\right),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die i-te Spalte der Jacobi-Matrix $D(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x_0))$ darstellen. Mittels der Linearität des Differenzierens folgt weiter

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} D_i(\psi^{-1} \circ \varphi)_\alpha(\varphi^{-1}(x_0)) D\psi(\psi^{-1}(x_0))(e_\alpha)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} D_i(\psi^{-1} \circ \varphi)_\alpha(\varphi^{-1}(x_0)) D_\alpha\psi(\psi^{-1}(x_0)).$$

Dies war die Behauptung. □

Es sei hier bemerkt, dass in der bisher verwendeten Notation für die Jakobimatrix (Analysis II) die i-te partielle Ableitung einer α-ten Koordinatenfunktion f^α mit $\partial_i f^\alpha$ bezeichnet wurde.

Beweis zu Satz 38.6: Es sei M orientierbar und $\mathcal{A} := \{(U, \varphi, V) | (U, \varphi, V)$ ist positiv orientierte Karte auf $M\}$. Nach Definition 38.5 ist $\mathcal{A}$ ein Atlas. Sind (U_1, φ_1, V_1) und (U_2, φ_2, V_2) zwei Karten aus $\mathcal{A}$ mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, so ist die Determinante der Übergangsmatrix der induzierten Basen in T_xM für $x \in V_1 \cap V_2$ strikt positiv. Nach Satz 38.7 ist diese Determinante gerade die Jacobi-Determinante (Funktionaldeterminante) des Koordinatenübergangs.

Es sei nun $\mathcal{A}$ ein Atlas mit der Eigenschaft $(*)$ und es sei $(U, \varphi, V) \in \mathcal{A}$. Wir definieren

$$\mathcal{O}_{T_xM} := [(D_1\varphi(y), \ldots, D_k\varphi(y))] \quad \text{für} \quad x \in V$$

mit $y = \varphi^{-1}(x) \in U$. Die Determinante der Übergangsmatrix zwischen zwei kanonischen Basen von Karten aus $\mathcal{A}$ ist strikt positiv, also ist $\mathcal{O}_{T_xM}$ korrekt definiert und erfüllt die Bedingungen der Definition 38.5. Damit ist Satz 38.6 bewiesen. $\square$

Definition 38.8 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit (eine Hyperfläche). Eine stetige Abbildung $\nu \colon M \to \mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto \nu(x) \in N_xM \subset \mathbb{R}^n$ und $\|\nu(x)\| = 1$ für jedes $x \in M$ heißt *Einheitsnormalenfeld* von M.

Es gibt nun einen schönen Zusammenhang zwischen der Existenz von Einheitsnormalenfeldern und der Orientierung einer Hyperfläche.

Satz 38.9 *Eine C^1-Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn auf M ein Einheitsnormalenfeld existiert.*

Beweis: Es sei M orientiert, $x_0 \in M$ und $(\hat{U}, \varphi, V)$ eine positiv orientierte Karte mit $x_0 \in V$ und

$$(D_1\varphi(y_0), \ldots, D_{n-1}\varphi(y_0))$$

mit $y_0 = \varphi^{-1}(x_0)$ in $\mathcal{O}_{T_{x_0}M}$. Da $N_{x_0}M$ ein eindimensionaler Untervektorraum ist, gibt es genau ein $\nu(x_0) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu(x_0)\| = 1$, $\nu(x_0) \in N_{x_0}M$, und

$$\det\big(\nu(x_0), D_1\varphi(y_0), \ldots, D_{n-1}\varphi(y_0)\big) > 0.$$

Zu zeigen ist, dass die Funktion $\nu \colon M \to \mathbb{R}^n$ stetig ist. Es sei $U \in \mathcal{U}(x_0)$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ sei wie in Satz 37.11 gewählt. Es gilt also $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und x_0 ist ein regulärer Punkt von f. Für eventuell zu verkleinerndes U ist

$$\tilde{\nu}(x) := \frac{1}{\|\nabla f(x)\|} \nabla f(x), \ \ x \in U,$$

eine stetige Funktion $\tilde{\nu} \colon U \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\tilde{\nu}(x)\| = 1$ und $\tilde{\nu}(x) \in N_xM$ für jedes $x \in U$. Wir können $\tilde{\nu}(x_0) = \nu(x_0)$ annehmen (notfalls gehen wir zu $-f$ über.) Betrachte nun $\varphi^{-1}(U \cap V) =: \tilde{U}$. Indem wir $\hat{U}$ eventuell verkleinern, können wir annehmen, dass $\tilde{U}$ zusammenhängend ist: Zu je zwei Punkten a, b in $\tilde{U}$ existiert eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to \tilde{U}$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Es sei nun $\triangle \colon \tilde{U} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$y \mapsto \det\big(\tilde{\nu}(\varphi(y)), D_1\varphi(y), \ldots, D_{n-1}\varphi(y)\big).$$

Dies ist eine stetige Funktion mit $\triangle(y_0) > 0$, denn $\tilde{\nu}(\varphi(y_0)) = \tilde{\nu}(x_0) = \nu(x_0)$. Dann ist $\triangle(y) > 0$ für alle $y \in \tilde{U}$, denn das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist wieder zusammenhängend. Hieraus und aus der Definition von ν folgt $\tilde{\nu}(\varphi(y)) = \nu(\varphi(y))$ für alle $y \in \tilde{U}$, also ist ν in x_0 stetig.

Sei nun ein Einheitsnormalenfeld ν gegeben. Definiere $\mathcal{O}_M = \{\mathcal{O}_{T_xM}\}_{x\in M}$ auf M durch

$$(v_1, \ldots, v_{n-1}) \in \mathcal{O}_{T_xM} \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_{n-1}, \nu(x)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}.$$

Es sei (U, φ, V) eine Karte um $x \in M$ mit zusammenhängendem Kartenbereich V. Die Determinante der $n \times n$ Matrix $(D_1\varphi(\varphi^{-1}(x)), \ldots, D_{n-1}\varphi(\varphi^{-1}(x)), \nu(x))$ hat in jedem Punkt $x \in V$ gleiches Vorzeichen (wir verwenden analog zu oben die Stetigkeit und die Tatsache, dass wir V zusammenhängend wählen). Ist das Vorzeichen positiv, so ist die Karte (U, φ, V) positiv orientiert. Ist das Vorzeichen negativ, so ersetzen wir (U, φ, V) durch $(U, \tilde{\varphi}, V)$ mit $\tilde{\varphi} = \tau \circ \varphi$, wobei $\tau\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ die vorgeschaltete Verschiebung $(y_1, \ldots, y_{n-1}) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-2}, -y_{n-1})$ ist. Wir erhalten dadurch eine positiv orientierte Karte. Also ist obige Setzung die Definition einer Orientierung von M. Dies war zu zeigen. □

Beispiel 38.10 (i) Die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist orientierbar, denn $\nu\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ mit $\nu(x) = \frac{x}{\|x\|}$ ist ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf S^{n-1}.

(ii) Die Abbildung

$$\nu(x) = \frac{1}{r}\Big(\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R\big)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R\big)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_3\Big)$$

ist ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf dem Torus $\mathcal{T}$.

(iii) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $F\colon U \to \mathbb{R}$ sei eine C^∞-Abbildung. Es seien $M := F^{-1}(0)$ und $\mathrm{grad}F(x) \neq 0$ für $x \in M$. Dann ist M eine $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit (siehe Satz 37.4). Es gilt

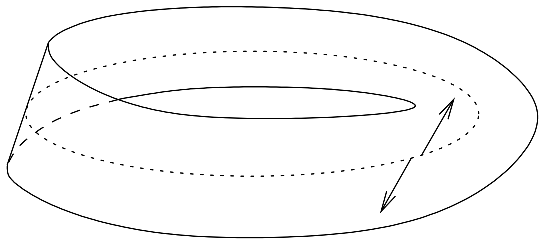
$$N_xM = \mathbb{R} \cdot \mathrm{grad}F(x).$$

Weiter ist M orientierbar, denn

$$\nu(x) := \frac{\mathrm{grad}F(x)}{\|\mathrm{grad}F(x)\|}$$

ist ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M.

(iv) *Das Möbiusband.* Man nimmt ein langes Band, verdreht eines der Enden einmal und klebt es zusammen. Dies wird das Möbiusband genannt. Es ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die *nicht* orientierbar ist. Man betrachte die Mittellinie, die um das Möbiusband herumläuft. Nehme einen Normalenvektor in einem Punkt der Mittellinie und gehe entlang der Mittellinie, wobei man den Normalenvektor stetig mit führt. Man landet im Ausgangspunkt beim negativen Normalenvektor. Es kann kein stetiges Normalenfeld geben. Dies kann man präzise ausführen (in den Übungen).



KAPITEL 39

Differenzierbare Abbildungen und Vektorfelder

Wir erinnern an die Ableitung für Abbildungen $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei U eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist. $D_a f(x_0)$ bezeichnete die *Richtungsableitung* von f an der Stelle x_0 in Richtung $a \in \mathbb{R}^n$. Das *Differential* $df_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ von f im Punkt $x \in U$ ist die lineare Abbildung, deren Wert für ein $a \in \mathbb{R}^n$ durch $D_a f(x)$ (Ableitung von f entlang der Geraden durch x in Richtung a) gegeben ist. Also gilt insbesondere $df_x(e_i) = \partial_i f(x)$. Den Vektorraum $\mathbb{R}^n$, auf dem das Differential df_x definiert ist, kann man als die Menge der Tangentialvektoren an alle Geraden $\gamma(t) = x + ta$ durch x in $t = 0$ auffassen. Dies mag überraschen, die Analogie klärt sich aber im Folgenden. Wir wollen die Differenzierbarkeit einer Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen zwei Untermannigfaltigkeit M und N definieren und auch das Differential von f. Dabei werden die Tangentialräume Definitions- und Wertebereich des Differentials werden. Die Rollen von Geraden durch x übernehmen Abbildungen $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ (Kurven) durch x ($\gamma(0) = x$), deren Bild auf M liegt. Weiter diskutieren wir *Vektorfelder*, eine *Riemannsche Metrik* sowie das *Gradientenvektorfeld*.

Definition 39.1 Es seien M_1 eine k_1-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n_1}$ und M_2 eine k_2-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n_2}$. Eine Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$ heißt *differenzierbar* von der Klasse $C^q, q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls für jede Karte (U, φ, V) von M_1 die Abbildung $f \circ \varphi\colon U \subset \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ eine C^q-Abbildung ist. Es bezeichne $C^q(M_1)$ die Menge aller reellwertigen C^q-Abbildungen auf M_1, analog sei $C^q(M_1, M_2)$ die Menge aller differenzierbaren Abbildungen $f\colon M_1 \to M_2$ von der Klasse C^q.

Bemerkungen 39.2

(i) Ist $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ eine offene Teilmenge, dann stimmt der Differenzierbarkeitsbegriff mit dem schon bekannten für Abbildungen zwischen reellen Vektorräumen überein.

(ii) Es sei M_3 eine k_3-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n_3}$. Weiter seien $f\colon M_1 \to M_2$ und $g\colon M_2 \to M_3$ differenzierbar, dann ist $g \circ f\colon M_1 \to M_3$ differenzierbar (einfache Übung).

(iii) Es genügt, die Differenzierbarkeit der Abbildungen $f \circ \varphi_i$ für einen Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, V_i), i \in I\}$ zu überprüfen (einfache Übung).

Definition 39.3 Es seien $f\colon M_1 \to M_2$ wie in Definition 39.1, (U_1, φ_1, V_1) eine Karte um $x_1 \in M_1$ und (U_2, φ_2, V_2) eine Karte um $f(x_1) \in M_2$. Dann heißt die Abbildung

$$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1\colon U_1 \subset \mathbb{R}^{k_1} \to U_2 \subset \mathbb{R}^{k_2}.$$

Kartendarstellung von f bezüglich der Karten φ_1 und φ_2. Ist $f\colon M_1 \to \mathbb{R}^{n_2}$, so heißt $f \circ \varphi\colon U \subset \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ Kartendarstellung von f bezüglich der Karte (U, φ, V).

Bemerkung 39.4 f ist differenzierbar von der Klasse C^q, wenn alle Kartendarstellungen C^q- Abbildungen sind.

Definition 39.5 Es sei $f\colon M_1 \to M_2$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten M_1 und M_2 (wie in Definition 39.1). Unter dem *Differential* von f im Punkt $x \in M_1$ versteht man die Abbildung

$$\begin{aligned} df_x\colon T_xM_1 &\to T_{f(x)}M_2 \\ \gamma'(0) &\to (f\gamma)'(0), \end{aligned}$$

wobei $\gamma \in C^1((-\epsilon,\epsilon), M_1)$ mit $\gamma(0) = x$.

Bemerkungen 39.6 (i) df_x ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl von γ. Sei dazu $v \in T_xM_1$ und $\gamma \in C^1((-\epsilon,\epsilon), M_1)$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$. Wähle eine Karte (U, φ, V) um x. Schränke den Definitionsbereich von γ so ein, dass die Bildmenge in V liegt. Aus der Kettenregel folgt nun

$$\begin{aligned} (f\gamma)'(0) &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma)'(0) \\ &= D(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(\gamma(0))) \cdot (\varphi^{-1} \circ \gamma)'(0) \\ &= D(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) D\varphi^{-1}(\gamma(0))\gamma'(0) \\ &= D(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) D\varphi^{-1}(x)(v), \end{aligned}$$

hängt also nicht von der Wahl von γ ab.

(ii) Sind $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ offene Teilmengen, dann stimmt das in 39.5 definierte Differential überein mit dem in der Einleitung eingeführten:

$$\begin{aligned} df_x(v) &= \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(x+tv)|_{t=0} = df_x(v). \end{aligned}$$

Satz 39.7 *Es seien $f\colon M_1 \to M_2$ und $g\colon M_2 \to M_3$ differenzierbar und $x \in M_1$. Dann gilt*

(i) $df_x : T_xM_1 \to T_{f(x)}M_2$ *ist eine lineare Abbildung.*
(ii) $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$ *(Kettenregel).*

Beweis: Es sei $v \in T_xM_1$ und $\gamma \in C^1((-\epsilon,\epsilon), M_1)$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$.

Zu (i): (U, φ, V) sei eine Karte um x. Wie in 39.6 (i) gilt nun

$$df_x(v) = (f\,\gamma)'(0) = (D(f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(x))\, D(\varphi^{-1}(x))(v).$$

Dies ist eine Komposition linearer Abbildungen.

Zu (ii): Es gilt

$$
\begin{aligned}
dg_{f(x)} \circ (df_x)(v) &= dg_{f(x)}((f \circ \gamma)'(0)) \\
&= (g \circ (f \circ \gamma))'(0) \\
&= ((g \circ f) \circ \gamma)'(0) \\
&= d(g \circ f)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\
&= d(g \circ f)_x(v).
\end{aligned}
$$

□

Satz 39.8 *(Basisdarstellung des Differentials einer differenzierbaren Abbildung)*
Es sei $f\colon M_1 \to M_2$ eine differenzierbare Abbildung zwischen den Untermannigfaltigkeiten M_1 und M_2 und sei $x \in M_1$. Sei ferner (U, φ, V) eine Karte um x und $(\tilde{U}, \psi, \tilde{V})$ eine Karte um $f(x) \in M_2$. Für die lineare Abbildung $df_x\colon T_xM_1 \to T_{f(x)}M_2$ gilt dann mit $y := \varphi^{-1}(x)$:

$$
df_x(D_i\varphi(y)) = \sum_{\alpha=1}^{k_2} D_i(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_\alpha(\varphi^{-1}(x))\, D_\alpha\psi(\psi^{-1}(f(x))) \;,
$$

$i = 1, \ldots, k_1$ (Jacobi-Matrix der Kartendarstellung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ von f in y).

Beweis: Der Beweis verläuft völlig zu den Rechenschritten im Beweis von Satz 38.6. Hier der Anfang:

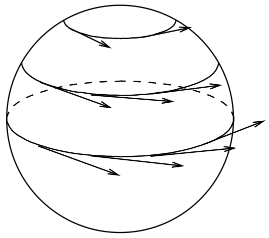
$$
\begin{aligned}
df_x(D_i\varphi(y)) &= df_x\big((d\varphi)_{\varphi^{-1}(x)}(e_i)\big) \\
&= d(\psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(x)}(e_i) \\
&= (D(\psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(x))(e_i).
\end{aligned}
$$

Ab der letzten Zeile rechnen wir nun genau wie im Beweis von Satz 38.6. □

Definition 39.9 Ein *Vektorfeld* auf einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^n$ ist eine C^∞-Abbildung $X\colon M \to \mathbb{R}^n$, so dass $X(x) \in T_xM$ für alle $x \in M$ gilt.

Bemerkung 39.10 Bezeichnet $\mathcal{X}(M)$ die Menge aller Vektorfelder auf M, so gilt: Sind $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$, so ist $X_1 + X_2 \in \mathcal{X}(M)$. Ist $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathcal{X}(M)$, so ist $fX \in \mathcal{X}(M)$.

Beispiele 39.11 (i) $X\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$, mit $X(x, y, z) := (-y, x, 0)$ ist ein Vektorfeld auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.



(ii) Zu einer Karte (U, φ, V) auf einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^n$ sei zu $x \in U$ $(D_1\varphi(y), \ldots, D_k\varphi(y))$ die *kanonische Basis* in T_xM, k, $y = \varphi^{-1}(x)$. Man betrachte die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \colon V \subset M \to \mathbb{R}^n \ ,$$

die jedem $x \in V$ den Vektor $D_i\varphi(y)$ zuordnet.
Ist M eine C^∞-Untermannigfaltigkeit, so ist φ^{-1} und $D_i\varphi$ in C^∞. Somit ist $\frac{\partial}{\partial x_i}$ für jedes $i = 1, \ldots, k$ ein Vektorfeld auf dem Kartenbereich V. Der Vektor $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k})$ heißt *kanonisches Basisfeld* bezüglich der Karte (U, φ, V).
Jedes Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ kann über dem Kartenbereich V punktweise in der kanonischen Basis dargestellt werden:

$$X(x) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x)\, D_i\varphi(\varphi^{-1}(x)),$$

wobei die Abbildungen $\eta_i \colon V \to \mathbb{R}$ in $C^\infty(V, \mathbb{R})$ sind. (*Basisdarstellung des Vektorfeldes X bzgl. (U, φ, V)*). Die $\eta_i \circ \varphi \colon U \to \mathbb{R}$ heißen *Komponenten* von X bezüglich der Karte (U, φ, V).

Definition 39.12 Es sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ und $f \colon M \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung

(i) Sei $v \in T_xM$ ein Tangentialvektor an M im Punkt x. Der Vektor $v(f) := df_x(v) \in T_{f(x)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ heißt *Richtungsableitung* von f nach v.
(ii) Ist $X \in \mathcal{X}(M)$, dann heißt $X(f) \colon M \to \mathbb{R}^m$ mit $X(f)(x) := df_x(X(x))$ Richtungsableitung von f nach dem Vektorfeld.

Das kanonische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im $\mathbb{R}^n$ induziert ein Skalarprodukt auf jedem Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, also auch auf T_xM. Wir wollen Geometrie auf Untermannigfaltigkeiten betreiben, z.B. Abstände zwischen Punkten oder Volumen von Teilmengen definieren und berechnen. Grundlegend dafür ist die

Definition 39.13 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $g_x \colon T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ das Skalarprodukt $g_x(a, b) := \langle a, b \rangle$, $x \in M$. Die Familie $g = \{g_x\}_{x \in M}$ heißt *induzierte Riemannsche Metrik* auf M.

Definition 39.14 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei (U, φ, V) eine Karte auf M um $x \in M$. Betrachte die symmetrische positiv-definite $(k \times k)$-Matrix

$$\begin{aligned} (g_{ij}(x))_{i,j} : &= \big(g_x(D_i\varphi(y), D_j\varphi(y))\big)_{i,j} \\ &= \big(\langle D_i\varphi(y), D_j\varphi(y)\rangle\big)_{i,j}, \quad y = \varphi^{-1}(x)\ . \end{aligned}$$

Die Funktionen $g_{ij} \circ \varphi \colon U \to \mathbb{R}$ heißen *lokale Koeffizienten der Metrik* bezüglich der Karte (U, φ, V).

Beispiele 39.15 (i) Es sei M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\varphi(x) = x$. Dann ist $D_i\varphi(\varphi^{-1}(x)) = e_i \in T_xM = \mathbb{R}^n$ und somit ist $g_{ij}(x) = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, also ist $(g_{ij}(x)) = \mathrm{Id}$.

(ii) *Ebene Polarkoordinaten* (siehe Beispiel 36.4) Gegeben sei

$$\Phi\colon (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \geq 0\}$$

$$\Phi(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Die Karte sei (U,Φ,V) mit $U := (0,\infty)\times(0,2\pi)$. Für $x = \Phi(r,\varphi)$ ist

$$D_1\Phi(r,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi) \text{ und } D_2\Phi(r,\varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)\ ,\ \text{also}$$

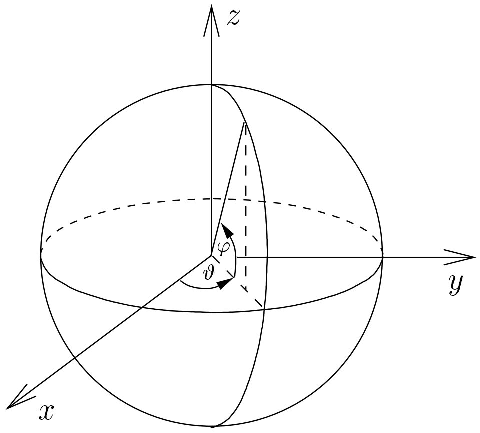
$$\begin{aligned}
&\langle D_1\Phi(r,\varphi), D_1\Phi(r,\varphi)\rangle = 1,\\
&\langle D_1\Phi(r,\varphi), D_2\Phi(r,\varphi)\rangle = 0 \text{ und}\\
&\langle D_2\Phi(r,\varphi), D_2\Phi(r,\varphi)\rangle = r^2\ .
\end{aligned}$$

Somit folgt für die zugeordnete symmetrische positiv-definite Form

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Sphärische Koordinaten.* Es sei die folgende Abbildung gegeben:

$$\Phi\colon (0,2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3,\ \ \Phi(\varphi,\vartheta) := (\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta).$$



Es gilt für $U := (0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dass $V = \Phi(U) = S^2\setminus\{(0,0,1),(0,0,-1)\}$. $\blacksquare$
Für $x = \Phi(\varphi,\vartheta)$ ist

$$D_1\Phi(\varphi,\vartheta) = (-\sin\varphi\cos\vartheta, \cos\varphi\cos\vartheta, 0),$$

$$D_2\Phi(\varphi,\vartheta) = (-\cos\varphi\sin\vartheta, -\sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta),$$

also

$$\begin{aligned}
&\langle D_1\Phi(\varphi,\vartheta), D_1\Phi(\varphi,\vartheta)\rangle = \cos^2\vartheta\\
&\langle D_1\Phi(\varphi,\vartheta), D_2\Phi(\varphi,\vartheta)\rangle = 0 \text{ und}\\
&\langle D_2\Phi(\varphi,\vartheta), D_2\Phi(\varphi,\vartheta)\rangle = 1.
\end{aligned}$$

Also ist die Matrix der induzierten Metrik auf S^2 in sphärischen Koordinaten von der Gestalt

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei nun $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $df_x\colon T_xM \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf dem euklidischen Vektorraum (T_xM, g_x). Dieser linearen Abbildung kann man den *dualen Vektor* zuordnen:

Definition 39.16 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit induzierter Riemannscher Metrik und $f\colon M \to \mathbb{R}$ sei eine glatte Funktion auf M. Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld $\operatorname{grad} f\colon M \to \mathbb{R}^n$ auf M, das jedem Punkt $x \in M$ den zu df_x dualen Vektor $\operatorname{grad} f(x) \in T_xM$ zuordnet:

$$g_x(\operatorname{grad} f(x), a) := df_x(a), \quad a \in T_xM.$$

Satz 39.17 *Es sei $f \in C^\infty(M)$ und (U, φ, V) eine Karte zu M. $\hat{f} := f \circ \varphi\colon U \to \mathbb{R}$ sei die Kartendarstellung von f und $(g^{ij}(x))$ die inverse Matrix zu $(g_{ij}(x))$. Dann gilt über V*

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x) &= \sum_{i,j=1}^{k} g^{ij}(x)(D_i\hat{f})(\varphi^{-1}(x)) \cdot (D_j\varphi)(\varphi^{-1}(x)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} g^{ij}(x)(D_i f)(x)(D_j\varphi)(\varphi^{-1}(x)).
\end{aligned}$$

Beweis: Wir bestimmen

$$\begin{aligned}
df_x\big(D_\alpha\varphi(\varphi^{-1}(x))\big) &= (D_\alpha(f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(D_i(f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(x))\delta_{i\alpha} \\
&= \sum_{i,j=1}^{k}(D_i(f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(x))g^{ij}(x)g_{j\alpha}(x) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k}(D_i(f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(x))g^{ij}(x)g_x(D_j\varphi(y), D_\alpha\varphi(y)) \\
&\quad (\text{mit } y = \varphi^{-1}(x)) \\
&= g_x\Big(\sum_{i,j=1}^{k} g^{ij}(x)(D_i\hat{f})(\varphi^{-1}(x))D_j\varphi(\varphi^{-1}(x)), D_\alpha\varphi(\varphi^{-1}(x))\Big)
\end{aligned}$$

für alle $\alpha = 1, \ldots, k$. Nun ist

$$g_x(\operatorname{grad} f(x), D_\alpha\varphi(y)) = df_x(D_\alpha\varphi(y))$$

nach Definition und g_x ist nichtausgeartet, also folgt die Behauptung. □

Beispiel 39.18 (i) Der Gradient einer Funktion in euklidischen Koordinaten: es sei U eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Die Karte sei $\varphi(x) = x$. Dann ist $(g_{ij}(x)) = (g^{ij}(x)) = \mathrm{Id}$ und $D_i\varphi(y) = e_i$, also folgt

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x) \cdot D_i \varphi(x) = (D_1 f(x), \ldots, D_n f(x)).$$

So kennen wir den Gradienten.

(ii) Der Gradient von $f\colon V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten:

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Nach Beispiel 39.15 (ii) ist

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

und somit

$$(g^{ij}(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Mit $\hat{f} = f \circ \Phi$ als Kartendarstellung von f gilt für (hier ist $V = \Phi((0, \infty) \times (0, 2\pi))$ wie in Beispiel 39.15 (ii)) $x = \Phi(r, \varphi)$:

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{\partial}{\partial r} \hat{f}(r, \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{f}(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(r, \varphi)$$

(Notation für partielle Ableitungen).

(iii) Der Gradient einer Funktion $f\colon V \subset S^2 \to \mathbb{R}$ in sphärischen Koordinaten:

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\cos \varphi \cos \vartheta, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta)$$

und $V = \Phi(U)$ mit $U = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$. Wieder sei $\hat{f} = f \circ \Phi$. Es gilt

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$(g^{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also folgt für $x = \Phi(\varphi, \vartheta)$:

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{f}(\varphi, \vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(\varphi, \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{f}(\varphi, \vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi(\varphi, \vartheta).$$

Der Gradient ordnet jeder Funktion auf M ein Vektorfeld zu. Der umgekehrte Prozess wird uns später begegnen: man ordnet häufig einem Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ eine Funktion zu. Die *Divergenz* ist ein wichtiges Beispiel.

KAPITEL 40

Alternierende Multilinearformen und Differentialformen

Das Integrieren über k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ führt man mittels der Karten (U, φ, V) auf das Integrieren im $\mathbb{R}^k$ zurück. Dabei würde für eine Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ der Beitrag eines Kartengebiets $V \subset M$ zum Integral von der Wahl der Karte φ abhängig sein. Wir werden in den folgenden Kapiteln sehen, dass die geeigneten Integranden *k-Differentialformen* über (orientierten) Untermannigfaltigkeiten sind. In diesem Kapitel führen wir in den Kalkül der Differentialformen ein. Zuvor noch ein Versuch der Motivation von der anschaulichen Seite her:

Als Integrand bietet sich der Begriff der *Dichte* an. Haben wir zum Beispiel eine Substanz in einer Untermannigfaltigkeit fein verteilt, soll Integration über die Dichte der Verteilung die Gesamtmenge der Substanz liefern. Wie kann man die Dichte mathematisch beschreiben? In $\mathbb{R}^k$ kann man die Dichte durch die Zahl beschreiben, welche die Menge der Substanz in $[0,1] \subset \mathbb{R}^k$ mißt. Im Tangentialraum T_xM verwenden wir k-Spate

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, v_i\,;\, 0 \le \lambda_i \le 1\Big\}.$$

Eine Dichte ist dann eine Abbildung $\varrho\colon T_xM \times \cdots \times T_xM \to \mathbb{R}$, welche für k-Vektoren die in deren k-Spat enthaltene Menge der Substanz mißt. Welche Abbildungen ϱ kommen sinnvollerweise vor? Wenn wir

$$\varrho(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) = |\lambda|\, \varrho(v_1, \ldots, v_k)$$

(*positive Homogenität*) und

$$\varrho(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k) = \varrho(v_1, \ldots, v_k)$$

(*Scherungsinvarianz*) für alle $v_1, \ldots, v_k \in T_xM$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $i \neq j$ fordern, so sprechen wir bei ϱ von einer Dichte. Eine solche Dichte, so wird sich zeigen, ist in T_xM fast dasselbe wie eine alternierende k-Form auf T_xM. Diesen Begriff führen wir nun ein:

Definition 40.1 (i) Es sei $k \geq 2$. Eine k-lineare Abbildung $\omega \in \mathcal{L}^k(V, \mathbb{R})$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$, falls $v_i = v_j$ für ein Paar (i, j) mit $i \neq j$ heißt *alternierende k-Form* (auf V).

(ii) Wir setzen $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$, $\Lambda^1(V) := V^*$ (der Dualraum $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ von V) und $\Lambda^k(V) = \{\omega \in \mathcal{L}^k(V, \mathbb{R}),\ \omega \text{ ist eine alternierende } k\text{-Form}\}$ für $k \geq 2$.

(iii) S_k bezeichnet die Gruppe der Permutation von $\{1, \ldots, k\}$.

Beispiel 40.2 Durch $(v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k \mapsto \det(v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}$ ist eine alternierende k-Form auf $\mathbb{R}^k$ definiert. Sie ist durch die Normierung $\det(e_1, \ldots, e_k) = 1$ eindeutig bestimmt.

Bemerkungen 40.3 (i) Man bezeichnet mit

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V^*\times V\to\mathbb{R},\ \ (\varphi,r)\mapsto\langle\varphi,r\rangle:=\varphi(r)$$

die *duale Paarung* zwischen V und V^*. Es gilt: ist $\dim V=n$, $n\in\mathbb{N}$, und ist $e_1,\dots,e_n$ eine Basis in V, so ist $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in V^*$ mit

$$\langle\varepsilon_i,\sum_{j=1}^n\alpha_j\,e_j\rangle=\alpha_i$$

für $v=\sum_{j=1}^n\alpha_j\,e_j\in V$ eine Basis von V^*, die *Dualbasis* von $e_1,\dots,e_n$. Es gilt $\langle\varepsilon_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$.

(ii) Für $k\geq 2$ und $\omega\in\mathcal{L}^k(V,\mathbb{R})$ sind äquivalent:
   (a) $\omega\in\Lambda^k(V)$
   (b) $\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})=\operatorname{sign}(\sigma)\,\omega(v_1,\dots,v_k)$ für alle $v_1,\dots,v_k\in V,\ \sigma\in S_k$.
   (c) $\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k)=-\omega(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)$ für $i\neq j$ und $v_1,\dots,v_k\in V$.

(iii) Sind $\omega\in\Lambda^k(V)$ und die Vektoren $v_1,\dots,v_k\in V$ linear abhängig, $k\geq 2$, so ist $\omega(v_1,\dots,v_k)=0$. Also $\Lambda^k(V)=\{0\}$ für $k>\dim V$.

(iv) $\Lambda^k(V)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^k(V,\mathbb{R})$.

Beweis: (i) ist aus der Linearen Algebra bekannt.

zu (ii): (a) $\Rightarrow$ (c): Es seien $v_1,\dots,v_k\in V$ und $1\leq i<r\leq k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}0 &= \omega(v_1,\dots,v_{i-1},v_i+v_r,v_{i+1},\dots,v_{r-1},v_i+v_r,v_{r+1},\dots,v_k)\\ &= \omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_i,\dots,v_k)+\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_r,\dots,v_k)\\ &+ \omega(v_1,\dots,v_r,\dots,v_i,\dots,v_k)+\omega(v_1,\dots,v_r,\dots,v_r,\dots,v_k)\\ &= \omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_r,\dots,v_k)+\omega(v_i,\dots,v_r,\dots,v_i,\dots,v_k).\end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (a) ist klar. (b) $\Leftrightarrow$ (c) ist auch klar, da jede Permutation eine Komposition von endlich vielen Vertauschungen ist.

(iii) folgt aus Linearität von ω und der Definition. (iv) ist klar. □

Definition 40.4 Es seien $\varphi_1,\dots,\varphi_k\in V^*,k\geq 2$. Dann wird durch

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k(v_1,\dots,v_k):=\det\bigl((\langle\varphi_i,v_j\rangle)_{i,j=1,\dots,k}\bigr),\ v_1,\dots,v_k\in V,$$

eine alternierende k-Form definiert. $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k$ heißt *äußeres Produkt* von $\varphi_1.\dots,\varphi_k$.

Satz 40.5 *Es sei $n:=\dim V<\infty$, $e_1,\dots,e_n$ eine Basis von V und $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ die Dualbasis zu $e_1,\dots,e_n$. Sei $1\leq k\leq n$. Dann ist*

$$\{\varepsilon_{j_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon_{j_k}\colon 1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n\}$$

eine Basis von $\Lambda^k(V)$, also $\dim\Lambda^k(V)=\binom{n}{k}$.

Beweis: Es seien $\omega \in \Lambda^k(V)$, $v_1, \ldots, v_k \in V$, also

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \langle \varepsilon_j, v_i \rangle e_j, \ 1 \leq i \leq k.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\omega(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{l_1=1}^{n} \cdots \sum_{l_k=1}^{n} \langle \varepsilon_{l_1}, v_1 \rangle \cdots \langle \varepsilon_{l_k}, v_k \rangle \, \omega(e_{l_1}, \ldots, e_{l_k}) \\
&= \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_k): \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n}} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma) \langle \varepsilon_{j_{\sigma(1)}}, v_1 \rangle \cdots \langle \varepsilon_{j_{\sigma(k)}}, v_k \rangle \\
&= \sum_{(j) \in J_k} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \det\big((\langle \varepsilon_{j_\varrho}, v_\tau \rangle)_{1 \leq \varrho, \tau \leq k} \big) \\
&= \sum_{(j) \in J_k} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \, \varepsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{j_k}(v_1, \ldots, v_k) \ ,
\end{aligned}$$

wobei $J_k := \{(j) := (j_1, \ldots, j_k) \colon 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n\}$.
Wir haben die Multilinearität von ω und 40.3 (ii) verwendet. Also ist

$$\omega = \sum_{(j) \in J_k} \omega_{(j)} \, \varepsilon_{(j)}$$

mit $\omega_{(j)} := \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ und $\varepsilon_{(j)} := \varepsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{j_k}$. Sei nun $\omega = \sum_{(j) \in J_k} a_{(j)} \, \varepsilon_{(j)}$ mit $a_{(j)} \in \mathbb{R}$. Zu zeigen: $a_{(j)} = \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$. Es sei $(l) \in J_k$:

$$\begin{aligned}
\omega(e_{l_1}, \ldots, e_{l_k}) &= \sum_{(j) \in J_k} a_{(j)} \, \varepsilon_{(j)}(e_{l_1}, \ldots, e_{l_k}) \\
&= \sum_{(j) \in J_k} a_{(j)} \ \det \big((\langle \varepsilon_{j_\varrho}, e_{l_\tau} \rangle)_{1 \leq \varrho, \tau \leq k} \big) \\
&= \sum_{(j) \in J_k} a_{(j)} \ \det \big(\delta_{j_\varrho l_\tau})_{1 \leq \varrho, \tau \leq k} \big) = a_{(l)}.
\end{aligned}$$

□

Satz 40.6 *Es seien $n := \dim V < \infty$ und $r, s, t \in \mathbb{N}$.*

(i) *Es gibt genau eine Abbildung*

$$\wedge \colon \Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) \to \Lambda^{r+s}(V), \ (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta,$$

genannt äußeres Produkt oder Dachprodukt, mit den Eigenschaften
(a) $\wedge$ *ist bilinear.*
(b) *Für $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s \in V^*$ ist*

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r) \wedge (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_s) = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_s.$$

(ii) *Ist* $e_1, \dots, e_n$ *eine Basis von* V *und* $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ *die Dualbasis dazu, so gilt für* $\alpha = \sum_{(j)\in J_r} \alpha_{(j)}\, \varepsilon_{(j)} \in \Lambda^r(V)$ *und* $\beta = \sum_{(k)\in J_s} \beta_{(k)}\, \varepsilon_{(k)} \in \Lambda^s(V)$*:*

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{(j)\in J_r, (k)\in J_s} \alpha_{(j)}\, \beta_{(k)}\, \varepsilon_{(j)} \wedge \varepsilon_{(k)}.$$

(iii) *Für* $\alpha \in \Lambda^r(V)$ *und* $\beta \in \Lambda^s(V)$ *ist* $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ *(antikommutativ).*

(iv) *Für* $\alpha \in \Lambda^r(V), \beta \in \Lambda^s(V), \gamma \in \Lambda^t(V)$ *ist* $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$*.*

Beweis: (i) Mit Satz 40.5 wird $\wedge$ durch die Eigenschaften (a) und (b) eindeutig bestimmt.

(ii) Folgt unmittelbar aus (a) und (b).

(iii) Folgt mit Bemerkung 40.3 (ii), da $\sigma \in S_{r+s}$ mit

$$(1, \dots, r, r+1, \dots, r+s) \mapsto (r+1, \dots, r+s, 1, \dots, r)$$

das Signum $(-1)^{rs}$ hat.

(iv) Folgt direkt aus (a) und (b).

□

Bemerkungen 40.7 (i) Für $r = 0$ oder $s = 0$ definieren wir das Dachprodukt $\wedge$ auch: Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \Lambda^k(V)$, so setzen wir $\alpha \wedge \beta := \beta \wedge \alpha := \alpha\beta$.

(ii) Für $\alpha, \beta \in \Lambda^1(V)$ ist $\alpha \wedge \beta$ gegeben durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1).$$

(iii) Für $\alpha \in \Lambda^r(V)$ und $\beta \in \Lambda^1(V)$ gilt

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i}\, \alpha(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{r+1})\, \beta(v_i),$$

wobei $(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots v_{r+1})$ das r-Tupel, das durch Streichen des i–ten Elements v_i aus dem $(r+1)$-Tupel $(v_1, \dots, v_{r+1})$ entsteht, bezeichne (kleine Übung).

Eine k-Form auf einem Vektorraum W kann man mittels einer linearen Abbildung $T\colon V \to W$ auf einen Vektorraum V *zurückziehen*:

Definition 40.8 Es seien $T \in \mathcal{L}(V, W)$ und $\omega \in \Lambda^k(W)$ und $k \geq 0$. Für $k = 0$ definieren wir $T^*\omega \in \Lambda^0(V)$ durch $T^*\omega := \omega$. Für $k > 0$ definieren wir $T^*\omega \in \Lambda^k(V)$ durch

$$T^*\omega(v_1, \dots, v_k) := \omega(Tv_1, \dots, Tv_k), \ v_1, \dots, v_k \in V.$$

$T^*\omega$ heißt *pull-back* oder *Rücktransport* von ω mittels T oder die *mittels* T *induzierte* k*-Form.*

Bemerkung 40.9 Man sieht leicht: $T^* \in \mathcal{L}(\Lambda^k(W), \Lambda^k(V))$ und $T^*(\omega \wedge \eta) = T^*\omega \wedge T^*\eta$ sowie $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$ für $T \in \mathcal{L}(V, W), S \in \mathcal{L}(V', V)$ und $\omega, \eta \in \Lambda^k(W)$.

Satz 40.10 *Es seien* $n := \dim(V) < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$ *und* $\omega \in \Lambda^n(V)$. *Dann gilt*

$$T^*\omega = \det(T) \cdot \omega.$$

Beweis: $e_1, \dots, e_n$ sei eine Basis von V und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die zugehörige Dualbasis. Sei $(T_{jk})_{1\le j,k\le n}$ die Matrix von T bezüglich $e_1, \dots, e_n$, also

$$T(e_k) = \sum_{j=1}^n T_{jk} e_j, \ 1 \le k \le n.$$

Dann folgt mit Bemerkung 40.3:

$$\begin{aligned} T^*\omega(e_1, \dots, e_n) &= \omega(T(e_1), \dots, T(e_n)) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n T_{j_1 1} \cdots T_{j_n n}\, \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} T_{\sigma(1)1} \cdots T_{\sigma(n)n} \operatorname{sign}(\sigma)\, \omega(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det(T)\, \omega(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Da $\dim \Lambda^n(V) = \binom{n}{n} = 1$, folgt hieraus die Behauptung. □

Wir betrachten nun Felder alternierender Multilinearformen.

Definition 40.11 Es seien $q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Eine Abbildung $\omega \in C^q(U, \Lambda^r(\mathbb{R}^n))$ heißt *Differentialform* vom Grad r auf U der Klasse C^q (kurz r-Form).

(ii) $\Omega_q^r(U) := \{\omega \colon \omega \text{ ist } r\text{-Form der Klasse } C^q \text{ auf } U\}$,

$$\Omega^r(U) := \Omega_0^r(U).$$

(iii) $\wedge \colon \Omega_q^r(U) \times \Omega_q^s(U) \to \Omega_q^{r+s}(U)$ mit $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ und

$$\alpha \wedge \beta(z) := \alpha(z) \wedge \beta(z), \ z \in U,$$

heißt *äußere Multiplikation* oder *äußeres Produkt*.

Bemerkungen 40.12 (i) 0-Formen sind C^q-Abbildungen von U nach $\mathbb{R}$. 1-Formen heißen *Pfaffsche Formen*. Ist $f \in C^{q+1}(U, \mathbb{R})$, so ist

$$Df \in C^q(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) = C^q(U, (\mathbb{R}^n)^*) = C^q(U, \Lambda^1(\mathbb{R}^n)).$$

Daher kann Df als 1-Form aufgefaßt werden. Wir schreiben dann df und nennen dies das totale *Differential von* f. Für $x \in U$ bezeichne df_x den Wert dieser Abbildung im Punkt x, dann liefert dies das Differential aus Kapitel 39. Es sei x_i, $i = 1, \dots, n$, die durch $(\xi_1, \dots, \xi_n) \to \xi_i$ definierte Koordinatenfunktion (Projektion). Für ihr Differential dx_i gilt an jeder Stelle ξ, daß $dx_i(\xi)h := (dx_i)_\xi(h) = h_i$. Ist ω eine 1-Form auf U, so setzen wir $a_i(\xi) := \omega(\xi)e_i$, $a_1, \dots, a_n \colon U \to \mathbb{R}$, also gilt

$$\omega(\xi)h = \sum_{i=1}^n a_i(\xi)\, h_i = \sum_{i=1}^n a_i(\xi)\, dx_i(\xi)h,$$

wofür wir kurz
$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$$
schreiben. Für $f \in C^{q+1}(U, \mathbb{R})$ ist $a_i(\xi) = df_\xi e_i = \partial_i f(\xi)$, also gilt
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

(ii) $\Omega_q^r(U) = \{0\}$ für $r > n$.

(iii) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha, \ \alpha \in \Omega_q^r(U), \beta \in \Omega_q^s(U)$.

Satz 40.13 *Es sei* $1 \leq k \leq n$.
$$\{dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \colon 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n\}$$
ist eine Basis von $\Omega^k(U)$*, das heißt jedes* $\omega \in \Omega^k(U)$ *besitzt eine eindeutige Darstellung*
$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1, \ldots, j_k} \, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$$
mit $a_{j_1,\ldots,j_k} \in C(U, \mathbb{R})$*. Insbesondere gilt* $\omega \in \Omega_q^k(U)$ *genau dann, wenn* $a_{j_1,\ldots,j_k} \in C^q(U, \mathbb{R})$ *für alle* $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ *und* $a_{j_1,\ldots,j_k}(x) = \omega(x)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$*. Die Funktionen* $a_{j_1,\ldots,j_k}$ *nennt man Koeffizientenfunktionen.*

Beweis: Wie in Bemerkung 40.12 (i) ausgeführt, gilt $dx_i(\xi)e_j = \delta_{ij}$, also sind die Differentiale $dx_1, \ldots, dx_n$ der Koordinatenfunktionen die duale Basis zur Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$. Somit folgt der Satz mit Satz 40.5. □

Beispiele 40.14 (i) Es sei $n = 2$. Dann gilt
$$\omega \in \Omega^1(U) \Leftrightarrow \omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$$
mit $a_1, a_2 \in C(U, \mathbb{R})$, siehe 40.12 (i). Weiter gilt
$$\omega \in \Omega^2(U) \Leftrightarrow \omega = a_{12} \, dx_1 \wedge dx_2$$
mit $a_{12} \in C(U, \mathbb{R})$.

(ii) Es sei $n = 3$. Dann gilt
$$\omega \in \Omega^1(U) \Leftrightarrow \omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$$
mit $a_1, a_2, a_3 \in C(U, \mathbb{R})$. Weiter gilt
$$\omega \in \Omega^2(U) \Leftrightarrow \omega = a_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + a_2 \, dx_3 \wedge dx_1 + a_3 \, dx_1 \wedge dx_2$$
mit $a_1, a_2, a_3 \in C(U, \mathbb{R})$. Schließlich ist
$$\omega \in \Omega^3(U) \Leftrightarrow \omega = a \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$
mit $a \in C(U, \mathbb{R})$.

(iii) Es sei $n \geq 2$. Dann gilt:
$$\omega \in \Omega^1(U) \Leftrightarrow \omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i, \ \ a_i \in C(U, \mathbb{R})$$
und
$$\omega \in \Omega^{n-1}(U) \Leftrightarrow \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \, a_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

mit $a_i \in C(U, \mathbb{R})$ mit der Notation in Bemerkung 40.7 (iii).

(iv) Es sei $n \geq 2$ und $f \in C(U, \mathbb{R}), u \in C(U, \mathbb{R}^n)$. Dann entsprechen f die 0- und die n-Formen

$$\begin{aligned} \omega_{0,f} &:= f \\ \omega_{n,f} &:= f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

und u die 1- und die $(n-1)$-Formen

$$\begin{aligned} \omega_{1,u} &:= \sum_{i=1}^{n} u_i\, dx_i \\ \omega_{n-1,u} &:= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, u_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Definition 40.15 (Zurückholen von Differentialformen) Es seien $V \subset \mathbb{R}^m$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\Phi \in C^{q+1}(U, \mathbb{R}^m)$ mit $\Phi(U) \subset V$. Es sei $\omega \in \Omega_q^k(V)$. Dann definieren wir den *Rücktransport* $\Phi^*\omega \in \Omega_q^k(U)$ von ω mittels Φ durch

$$\begin{aligned} (\Phi^*\omega)(z)(v_1, \ldots, v_k) &:= [D\Phi(z)]^*\, \omega(\Phi(z))(v_1, \ldots, v_k) \\ &= \omega(\Phi(z))(D\Phi(z)v_1, \ldots, D\Phi(z)v_k) \end{aligned}$$

für alle $z \in U$, $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Mit den Definitionen 40.15 und 40.8 sowie Bemerkung 40.9 und Satz 40.10 folgen:

Bemerkungen 40.16 (i) $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^*\alpha) \wedge (\Phi^*\beta)$

(ii) $\Phi^* dx_j = d\Phi_j$, $j = 1, \ldots, n$,
$\Phi^* f = f \circ \Phi$

(iii) $\Phi^*(dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}) = d\Phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{j_k}$ für $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m$, also

$$\Phi^*\Big(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1,\ldots,j_k}\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}\Big) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} (a_{j_1,\ldots,j_k} \circ \Phi) d\Phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{j_k}.$$

(iv) Im Fall $n = m$ gilt also

$$\Phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = d\Phi_1 \wedge \cdots \wedge d\Phi_n = \det(D\Phi)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

(v) Für $\Phi \in C^{q+1}(U, \mathbb{R}^m)$, $\Phi(U) \subset V$ ist

$$\Phi^* \in \mathcal{L}(\Omega_q^k(V), \Omega_q^k(U)), \quad \text{falls} \ \ k \geq 1 \text{ und}$$

$$\Phi^* \in \mathcal{L}(C^{q+1}(V, \mathbb{R}), C^{q+1}(U, \mathbb{R})), \quad \text{falls} \ \ k = 0.$$

(vi) $(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ (\Psi^*)$ und $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})^* = \mathrm{id}_{\Omega(U)}$.

Beispiel 40.17 Es sei $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\Phi(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Dann ist $d\Phi_1 = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$ und $d\Phi_2 = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$. Sei nun $V \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $U := \Phi^{-1}(V)$ und

$$\begin{aligned} \omega &:= f dx_1 + g dx_2 \in \Omega_q^1(V), \\ \eta &:= F dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega_q^2(V). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\Phi^*\omega = [\cos\varphi \cdot f \circ \Phi + \sin\varphi \cdot g \circ \Phi]dr + [r\cos\varphi \cdot g \circ \Phi - r\sin\varphi \cdot f \circ \Phi]d\varphi,$$
$$\Phi^*\eta = r \cdot F \circ \Phi\, dr \wedge d\varphi.$$

Wir führen nun den Begriff einer Differentialform auf einer Untermannigfaltigkeit ein.

Definition 40.18 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Abbildung ω, die jedem Punkt $x \in M$ eine alternierende r-Form $\omega(x) = \omega_x$ auf dem Tangentialraum T_xM zuordnet, heißt *Differentialform* vom Grad r auf M oder kurz *r-Form.* Es gilt also $\omega_x : (T_xM)^r \to \mathbb{R}$. Das äußere Produkt von Differentialformen auf M erklärt man punktweise.

Ist (U, φ, V) eine Karte mit $x \in V$, so induziert jede r-Form ω auf M durch Zurückholen eine r-Form $\varphi^*\omega$ auf U. Dabei gilt wieder

$$\varphi^*\omega(z)(v_1, \dots, v_r) = \omega(\varphi(z))(D\varphi(z)v_1, \dots, D\varphi(z)v_r)$$

für $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^k$.

Ist $(\tilde{U}, \psi, \tilde{V})$ eine weitere Karte mit $x \in \tilde{V}$ und $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, so bezeichnet $\psi^{-1} \circ \varphi$ den Kartenwechsel. Dann gilt

$$\varphi^*\omega = (\psi^{-1} \circ \varphi)^*(\psi^*\omega) \quad \text{(siehe Bemerkung 40.9).}$$

Für eine k-Form besagt dies mit Hilfe von Satz 40.10

$$\varphi^*\omega(\varphi^{-1}(x)) = \det D(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) \cdot \psi^*\omega(\psi^{-1}(x)).$$

Die Form in Definition 40.18 heißt stetig, differenzierbar oder von der Klasse C^q, wenn alle zurückgeholten Formen $\varphi^*\omega$, wobei φ einen Atlas $\mathcal{A}$ von M durchlaufe, die jeweilige Eigenschaft haben.

Um abschließend Satz 40.13 für r-Formen auf Untermannigfaltigkeiten herleiten zu können, benötigen wir eine Basis in T_xM und $(T_xM)^*$ für $x \in M$. Zu einer Karte (U, φ, V) mit $x \in V$ ist $(D_1\varphi(y), \dots, D_k\varphi(y)), y = \varphi^{-1}(x)$, nach Satz 38.2 eine Basis von T_xM.

Wir betrachten $\varphi^{-1}\colon V \subset M \to \mathbb{R}^k$ und die Koordinatenfunktionen

$$\varphi_1^{-1}, \dots, \varphi_k^{-1}\colon V \subset M \to \mathbb{R}.$$

Das Differential $d(\varphi_j^{-1})_x\colon T_xM \to T_{\varphi_j^{-1}(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ von φ_j^{-1} im Punkt x ist linear, also ist $d(\varphi_j^{-1})_x \in (T_xM)^*$, $j = 1, \dots, k$. Nun gilt $d(\varphi_j^{-1})_x(D_i\varphi(\varphi^{-1}(x))) = \delta_{ji}$, $i, j = 1, \dots, k$ (dies folgt unmittelbar aus dem Satz über inverse Funktionen), also bilden die Differentiale $d(\varphi_1^{-1})_x, \dots, d(\varphi_k^{-1})_x$ die duale Basis im Raum $(T_xM)^*$.

Damit liest sich der Satz 40.13 so: Für $1 \leq r \leq k$ besitzt jede r-Form auf M eine eindeutige Darstellung

$$\omega|_V = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq k} \omega^{\varphi}_{j_1,\dots,j_r}\, d\varphi_{j_1}^{-1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_r}^{-1} \qquad (*)$$

mit

$$\omega^{\varphi}(x) := \omega^{\varphi}_{j_1,\ldots,j_r}(x) := \omega(x)(D_{j_1}\varphi(y), \ldots, D_{j_r}\varphi(y)),\ \ y \in U, x \in V.$$

Man nennt $(*)$ die *lokale Darstellung* von ω bezüglich der Karte (U, φ, V) und die Abbildungen

$$\omega^{\varphi}_{j_1,\ldots,j_r} \circ \varphi \colon U \to \mathbb{R}$$

heißen *lokale Koeffizienten* der Form ω bezüglich der Karte (U, φ, V).

KAPITEL 41

Volumenform

Gegeben sei eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit $(M, \mathcal{O}_M)$, $M \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten in diesem Kapitel eine spezielle nicht-verschwindende k-Form ω auf M, die sogenannte *Volumenform* von $(M, \mathcal{O}_M)$. Nicht-verschwindend bedeutet dabei, dass $\omega_x \neq 0$ für alle $x \in M$. Diese Volumenform ist ein wichtiger Integrand. Im folgenden Kapitel wird mit Hilfe der Volumenform das Oberflächenintegral konstruiert. Wir betrachten als Vorbereitung für ein späteres Kapitel Untermannigfaltigkeiten mit Rand und stellen einen Zusammenhang zwischen der Volumenform einer orientierten Untermannigfaltigkeit mit Rand und der Volumenform des Randes dar.

Man kann orientierbare Untermannigfaltigkeiten mittels Differentialformen charakterisieren. Das folgende Resultat beweisen wir nicht.

Satz 41.1 *Eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn eine nirgends verschwindende k-Form ω auf M existiert, d.h. eine k-Form ω mit $\omega_x \neq 0$ für alle $x \in M$.*

Es sei $(M, \mathcal{O}_M)$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit. Der Raum $(T_xM, g_x, \mathcal{O}_{T_xM})$, $x \in M$, ist dann ein orientierter, euklidischer Vektorraum. Wir wählen in T_xM eine positiv orientierte orthonormale Basis $(e_1, \ldots, e_k)$. Da M orientiert ist, betrachten wir einfach eine positiv orientierte Karte (U, φ, V) mit der kanonischen Basis

$$(D_1\varphi(y), \ldots, D_k\varphi(y)) \in \mathcal{O}_{T_xM}, \quad y = \varphi^{-1}(x), x \in V,$$

und wenden das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf diese Basis in (T_xM, g_x) an. Wir erhalten eine positiv orientierte orthonormale Basis $(e_1, \ldots, e_k)$. Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau\colon T_xM &\to \mathbb{R}^k \\ v &\mapsto (g_x(v, e_1), \ldots, g_x(v, e_k)) \,. \end{aligned}$$

Wir ordnen also jedem Vektor $v \in T_xM$ seine Komponenten bezüglich der Orthonormalbasis (ONB) $(e_1, \ldots, e_k)$ zu. Diese Abbildung ist eine Isometrie. Wir haben die Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{k} g_x(v, e_i)e_i.$$

Definition 41.2 Die k-Form $dM_x \in \Lambda^k(T_xM)$ sei definiert durch

$dM_x(v_1, \dots, v_k) :=$ Volumen des von den Vektoren $\tau(v_1), \dots, \tau(v_k)$ im $\mathbb{R}^k$ aufgespannten Parallelepipedes

$$P = \left\{ \textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i \, \tau(v_i); 0 \le \lambda_i \le 1, i = 1, \dots, k \right\},$$

also

$$dM_x(v_1, \dots, v_k) := \det\bigl(g_x(v_i, e_j)_{i,j=1,\dots,k}\bigr).$$

dM_x heißt *Volumenform* von $(T_xM, g_x, \mathcal{O}_{T_xM})$ und $dM := \{dM_x\}_{x \in M}$ heißt *Volumenform der orientierten Untermannigfaltigkeit* $(M, \mathcal{O}_M)$.

Bemerkungen 41.3 (i) dM_x ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der orthonormalen Basis $(e_1, \dots, e_k)$, denn die Übergangsmatrix zwischen zwei ONB hat Determinante 1.

(ii) Es sei $(a_1, \dots, a_k)$ eine beliebige positiv orientierte Basis in $(T_xM, \mathcal{O}_{T_xM})$. Dann gilt

$$(*) \quad dM_x(a_1, \dots, a_k) = \sqrt{\det\bigl((g_x(a_i, a_j))_{i,j=1,\dots,k}\bigr)}.$$

Dazu bemerken wir:

$$\begin{aligned} dM_x(a_1, \dots, a_k) &= \det\bigl(\langle a_i, e_j \rangle_{i,j}\bigr) \\ &= \det\bigl(M_{(a),(e)}\bigr) > 0, \end{aligned}$$

wobei $(e_1, \dots, e_k)$ eine positiv orientierte ONB von T_xM ist, und $M_{(a),(e)}$ die Matrix des Basiswechsels zwischen $a = (a_1, \dots, a_k)$ und $e = (e_1, \dots, e_k)$ bezeichne. Also genügt es zu zeigen:

$$\det\bigl(\langle a_i, e_j \rangle_{i,j}\bigr)^2 = \det\bigl(\langle a_i, a_j \rangle_{i,j}\bigr).$$

Dies folgt so:

$$\begin{aligned} \det\bigl(\langle a_i, e_j \rangle_{i,j}\bigr)^2 &= \det\bigl(\langle a_i, e_j \rangle_{i,j}\bigr) \det\bigl(\langle a_i, e_j \rangle_{i,j}^t\bigr) \\ &= \det\bigl(\langle a_i, e_j \rangle_{i,j} \circ \langle e_l, a_m \rangle_{l,m}\bigr) \\ &= \det\left(\Bigl(\sum_{j=1}^k \langle a_i, e_j \rangle \, \langle e_j, a_m \rangle \Bigr)_{i,m} \right) \\ &= \det\Bigl(\langle a_i, \sum_{j=1}^k \langle e_j, a_m \rangle e_j \rangle_{i,m} \Bigr) \\ &= \det\bigl(\langle a_i, a_m \rangle_{i,m}\bigr). \end{aligned}$$

Wenn nun $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ die duale Basis zu $(a_1, \dots, a_k)$ ist, so erhält man mit Satz 40.13 die folgende Basisdarstellung der k-Form dM_x:

$$(**) \quad dM_x = \sqrt{\det\bigl(\langle a_i, a_j \rangle_{i,j}\bigr)} \, \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k.$$

(iii) Zu einer beliebigen k-Form ω auf M existiert eine Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\omega = f \cdot dM$. Dazu setzen wir $f(x) = \omega_x(e_1, \dots, e_k)$, wobei $(e_1, \dots, e_k)$ eine positiv orientierte orthonormale Basis ist.

Satz 41.4 *(Darstellung der Volumenform) Es sei $(M, \mathcal{O}_M)$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, eine orientierte Untermannigfaltigkeit der Dimension k und sei (U, φ, V) eine positiv orientierte Karte auf M. Wähle $(g_{ij}(x))_{i,j}$ wie in Definition 39.14 und betrachte die Differentiale $d(\varphi_1^{-1})_x, \ldots, d(\varphi_k^{-1})_x$, die die duale Basis in $(T_xM)^*$ zu den kanonischen Basisvektoren $(D_1\varphi(\varphi^{-1}(x)), \ldots, D_k\varphi(\varphi^{-1}(x)))$ sind (siehe Diskussion nach Definition 40.18). Dann gilt:*

$$dM|_V = \sqrt{\det\big((g_{ij})_{i,j}\big)}\, d\varphi_1^{-1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_k^{-1},$$

wobei $(g_{ij})_{i,j}$ für jedes $x \in V$ gegeben ist durch $\big(g_{ij}(x)\big)_{i,j}$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Darstellung (*) auf Seite 117 und Bemerkung 41.3 (ii). □

Beispiele 41.5 (i) *Die Volumenform von $\mathbb{R}^k$*: Es sei $\mathbb{R}^k$ gegeben mit der Karte $\varphi(x) = x$. Dann ist $(g_{ij}(x))_{i,j} = \mathrm{Id}$ und somit

$$d\mathbb{R}^k = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

(ii) *Die Volumenform von Kurven im $\mathbb{R}^n$*: Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine 1-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, also eine Kurve, und sei $\gamma \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon), M)$ mit $\gamma(0) = x$. Dann gilt für die Volumenform dieser Parametrisierung für jedes $x \in \gamma\big((-\varepsilon, \varepsilon)\big)$:

$$d\Gamma|_{\gamma\left((-\varepsilon,\varepsilon)\right)}(x) = \|\gamma'(\gamma^{-1}(x))\|\, d(\gamma^{-1})_x.$$

Man spricht vom *Bogenelement der Kurve.*

(iii) *Die Volumenform von Flächen im $\mathbb{R}^3$*: Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit und (U, φ, V) eine Karte. Für $x \in V$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{pmatrix} = \|D_1\varphi(\varphi^{-1}(x)) \times D_2\varphi(\varphi^{-1}(x))\|^2,$$

wobei $\times$ hier das *Vektorprodukt* im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Zur Erinnerung: für zwei Vektoren v, w des $\mathbb{R}^3$ ist $\|v \times w\| := \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2} = \|v\|\,\|w\| \sin\theta$, wobei θ der Winkel zwischen beiden Vektoren bezeichne. Es folgt für die Volumenform

$$dM|_{\varphi(U)}(x) = dM|_V(x) = \|D_1\varphi(\varphi^{-1}(x)) \times D_2\varphi(\varphi^{-1}(x))\|\, d(\varphi_1^{-1})_x \wedge d(\varphi_2^{-1})_x.$$

Man spricht vom *Oberflächenelement der Fläche.*

Wir betrachten nun Untermannigfaltigkeiten mit Rand. Ein Beispiel wird die Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ sein, die durch die Definition 37.1 bisher nicht erfaßt wird.

Es sei

$$\mathbb{R}^k_+ := \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k | x_k \geq 0\}$$

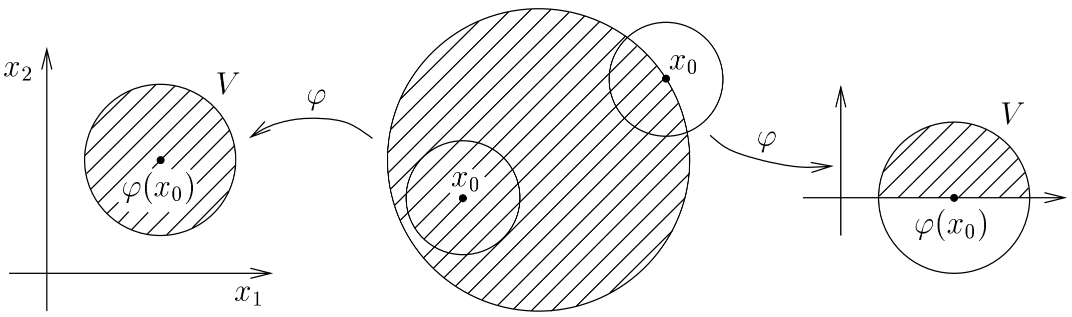
ein *Halbraum* und

$$\partial\mathbb{R}^k_+ := \{x \in \mathbb{R}^k_+ | x_k = 0\} \cong \mathbb{R}^{k-1}$$

der *Rand des Halbraums.*

Definition 41.6 $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale *Untermannigfaltigkeit mit Rand*, falls es zu jedem $x_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge V in $\mathbb{R}^n$ sowie ein $\varphi \in \mathrm{Diff}^q(U,V)$ gibt, so dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ oder
(ii) $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k_+ \times \{0\})$ und $\varphi^k(x_0) = 0$.



Typ (i) Typ (ii)

Satz 41.7 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und $x_0 \in M$. Dann erfüllen die Diffeomorphismen $\varphi\colon U \to V$ zu x_0 entweder alle die Bedingungen (i) oder alle die Bedingungen (ii) aus Definition 41.6.*

Beweis: Angenommen, es existiert eine Abbildung $\varphi_1\colon U_1 \to V_1$ mit $x_0 \in U_1$ und $\varphi_1(U_1 \cap M) = V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ und eine Abbildung $\varphi_2\colon U_2 \to V_2$ mit $x_0 \in U_2$ und $\varphi_2(U_2 \cap M) = V_2 \cap (\mathbb{R}^k_+ \times \{0\})$ und $\varphi_2^k(x_0) = 0$. Es sei $O := U_1 \cap U_2$. Dann ist $\varphi_1(O \cap M) \subset \mathbb{R}^k$ offen und

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(O \cap M) \to \varphi_2(O \cap M) \subset \mathbb{R}^k_+ \subset \mathbb{R}^k$$

ist ein Diffeomorphismus mit $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(x_0)) = \varphi_2(x_0)$. Insbesondere ist $\varphi_2(O \cap M)$ offen in $\mathbb{R}^k$, aber $\varphi_2(O \cap M) \subset \mathbb{R}^k_+$ und $\varphi_2(x_0) \in \partial\mathbb{R}^k_+$, also kann $\varphi_2(O \cap M)$ nicht offen in $\mathbb{R}^k$ sein. $\square$

Definition 41.8 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

$$\partial M := \{x \in M \mid \text{ es gibt ein } \varphi \text{ um } x, \text{ das die Bedingung (ii) in 41.6 erfüllt } \}$$

heißt *Rand* von M und

$$\mathrm{Int}(M) := \{x \in M \mid \text{ es gibt ein } \varphi \text{ um } x, \text{ das die Bedingung (i) in 41.6 erfüllt } \}$$

heißt *Inneres* von M. Es gilt $M = \mathrm{Int}(M) \cup \partial M$.

Satz 41.9 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist* $\mathrm{Int}(M)$ *eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand (Definition 37.1) und ∂M ist entweder leer oder eine $k-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand.*

Beweis: Nach Definition ist $\mathrm{Int}(M)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Es sei $\partial M \neq \emptyset$ und $x_0 \in \partial M$. Es existiert eine Abbildung $\varphi \in \mathrm{Diff}^q(U,V)$ mit $x_0 \in U$ und $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k_+ \times \{0\})$. Für $y \in U \cap \partial M$ folgt $\varphi^k(y) = 0$. Denn wäre $\varphi^k(y) > 0$, so würde man durch Einschränkung des Diffeomorphismus' φ eine Abbildung vom Typ (i) um y erhalten, im Widerspruch zu Satz 41.7. Also gilt

$$\varphi(U \cap \partial M) = V \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}).$$

□

Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. Für $x \in \partial M$ ist $T_x\partial M$ ein $(k-1)$-dimensionaler Unterraum des k-dimensionalen Raumes T_xM.

Definition 41.10 Die Abbildung $x \in \partial M \mapsto \nu(x) \in T_xM \subset \mathbb{R}^n$ mit

(i) $\nu(x) \perp T_x\partial M$ (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^n$)
(ii) $\|\nu(x)\| = 1$
(iii) es existiert $\gamma \in C^1((-\epsilon, 0], M)$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = \nu(x)$

heißt *Vektorfeld der äußeren Normalen* auf dem Rand ∂M.

Definition 41.11 Es sei $(M, \mathcal{O}_M)$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$ und $\nu\colon \partial M \to \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld der äußeren Normalen des Randes. Wir definieren eine Orientierung $\mathcal{O}_{\partial M}$ auf dem Rand durch

$$(v_1, \ldots, v_{k-1}) \in \mathcal{O}_{T_x\partial M} \Leftrightarrow (\nu(x), v_1, \ldots v_{k-1}) \in \mathcal{O}_{T_xM}.$$

Man spricht von der induzierten Orientierung.

Satz 41.12 *Es sei $(M, \mathcal{O}_M)$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ mit $\partial M \neq \emptyset$; $\nu\colon \partial M \to \mathbb{R}^n$ sei das Vektorfeld der äußeren Normalen des Randes und $\mathcal{O}_{\partial M}$ die induzierte Orientierung auf dem Rand ∂M. Dann gilt für die Volumenform*

$$d(\partial M) = i_\nu\, dM|_{\partial M} \quad (k-1 \text{ Form auf } \partial M)$$

mit

$$i_{\nu(x)}\, dM_x(v_1, \ldots, v_{k-1}) := dM_x(\nu(x), v_1, \ldots, v_{k-1}) \qquad \text{(inneres Produkt).}$$

Beweis: Es sei $x \in \partial M$ und $(e_1, \ldots, e_{k-1})$ eine positiv orientierte ONB in $T_x\,\partial M$. Dann ist $(\nu(x), e_1, \ldots, e_{k-1})$ eine positiv orientierte ONB in T_xM und aus der Definition der Volumenform folgt

$$d(\partial M)_x(e_1, \ldots, e_{k-1}) = 1 = (dM)_x(\nu(x), e_1, \ldots, e_{k-1}) = i_{\nu(x)}\, dM_x(e_1, \ldots, e_{k-1}),$$

also folgt die Behauptung. □

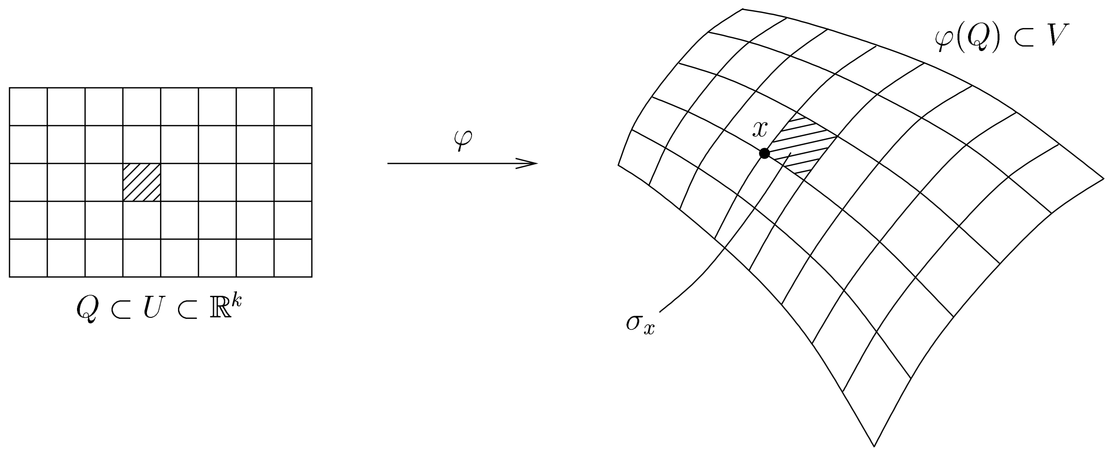
KAPITEL 42

Integration von Formen über orientierten Untermannigfaltigkeiten

Nun wollen wir eine Integrationstheorie auf orientierten Untermannigfaltigkeiten entwickeln. Die Differentialformen dienen zur Konstruktion von Maßen. Es geht in diesem Kapitel grob um das Verständnis der folgenden Beobachtung. Für gewöhnliche Abbildungen $f\colon M \to \mathbb{R}$ auf einer k-dimensionalen orientierten Untermannigfaltigkeit würde der Beitrag eines Kartengebiets $V \subset M$ zum Integral von der Wahl der Karte abhängen, während die Transformationsformel für das Mehrfachintegral im $\mathbb{R}^k$ zeigen wird, dass das Integral über die mittels einer orientierten Karte zurückgezogenen Koeffizientenfunktion (die lokalen Koeffizienten, siehe Definition 40.18 und die Darstellung (*) auf Seite 118) einer k-Form koordinatenunabhängig ist. Unter den Beispielen zu der Theorie sind die Berechnung der *Bogenlänge von Kurven* sowie der *Oberfläche von gekrümmten Flächen*. Bevor wir einen geeigneten Maßraum $(M, \mathcal{B}(M), \mu_\omega)$ (ω ist eine Form) angeben, zunächst etwas zur Anschauung des Integrationsvorgangs:

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit und ω eine k-Form darauf. Jedes $\omega_x \in \Lambda^k(T_xM)$ „antwortet" auf orientierte Spate in T_xM (siehe Definition 41.2). Die Frage ist nun, wie ω eine „Antwort" $\int_M \omega$ auf die ganze Untermannigfaltigkeit gibt. Es sei (U, φ, V) eine positiv orientierte Karte, und in $U \subset \mathbb{R}^k$ sei ein Quader $Q := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset U$ gegeben, den wir uns fein gerastert denken. Die Bilder der Teilquader unter φ nennt man *Maschen* in $V \subset M$. σ_x bezeichne die Masche mit unterem „linken" Eckpunkt $x \in V$. Das Urbild der Masche σ_x unter φ ist dann von der Form

$$\prod_{i=1}^{k} [a_{x,i}, a_{x,i} + \Delta a_{x,i}].$$



Es soll nun gelten:

$$\int_{\varphi(Q)} \omega = \sum_{x \in \text{Gitter}} \int_{\sigma_x} \omega.$$

Hierbei bezeichne die Summe über $x \in$ Gitter die Summe über die endlich vielen Maschen mit den Eckpunkten σ_x.

Wir vergleichen nun die Größe einer jeden Masche σ_x mit dem Volumen des jeweiligen tangentialen Spats s_x in T_xM. Dazu beobachten wir, dass $\Delta a_{x,i} \cdot D_i\varphi(\varphi^{-1}(x))$, $i = 1, \ldots, k$, die Kantenvektoren des Spates sind, also folgt:

$$s_x = \text{Spat } \big(\Delta a_{x,1} D_1\varphi(\varphi^{-1}(x)), \ldots, \Delta a_{x,k} D_k\varphi(\varphi^{-1}(x))\big).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} &\omega_x\big(\Delta a_{x,1} D_1\varphi(\varphi^{-1}(x)), \ldots, \Delta a_{x,k} D_k\varphi(\varphi^{-1}(x))\big) \\ = {}&\omega_x\big(D_1\varphi(\varphi^{-1}(x)), \ldots, D_k\varphi(\varphi^{-1}(x))\big)\, \Delta a_{x,1} \cdots \Delta a_{x,k}. \end{aligned}$$

Die Summe über alle $x \in$ Gitter ist dann die Näherungssumme von $\int_{\varphi(Q)} \omega$. Diese Heuristik setzen wir nun präzise um.

Definition 42.1 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. $A \subset M$ heißt meßbar, wenn für jede Karte (U, φ, V) von M die Menge $\varphi^{-1}(V \cap A) \subset \mathbb{R}^k$ Borel-Lebesgue-meßbar ist, also

$$\varphi^{-1}(V \cap A) \in \mathcal{B}^k.$$

Mit $\mathcal{B}(M)$ bezeichnen wir die Menge aller meßbaren Teilmengen von M.

Unmittelbar aus der Definition folgt:

Satz 42.2 *$\mathcal{B}(M)$ ist eine σ-Algebra auf M.*

Bemerkung 42.3 Man fixiere einen Atlas $\mathcal{A}$ von M. Beim Nachweis der Meßbarkeit einer Teilmenge $A \subset M$ überprüfe man dann $\varphi^{-1}(A \cap V) \in \mathcal{B}^k$ für die Karten in $\mathcal{A}$. Dies reicht aus, um die Meßbarkeit einer Menge A zu überprüfen. Dazu beachte man, dass Elemente in $\mathcal{B}^k$ unter C^q-Diffeomorphismen in $\mathcal{B}^k$ bleiben (Lemma 36.1) und die Kartenwechsel C^q-Diffeomorphismen sind (siehe Satz 37.16).

Es sei fortan ω eine k-Form auf einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A \subset M$ sei eine meßbare Teilmenge. Wir wollen $\int_A \omega$ definieren. Wir erinnern an die lokale Darstellung aus Kapitel 40:

$$\omega|_V(x) = \omega(x)(D_1\varphi(y), \ldots, D_k\varphi(y))\, d(\varphi_1^{-1})_x \wedge \cdots \wedge d(\varphi_k^{-1})_x$$

zu einer Karte (U, φ, V) mit $x \in V$ und $y = \varphi^{-1}(x)$. Jede Funktion $a^\varphi \circ \varphi \colon U \to \mathbb{R}$ mit

$$a^\varphi(x) := a^\varphi_{1,\ldots,k}(x) := \omega(x)(D_1\varphi(y), \ldots, D_k\varphi(y)),\ y = \varphi^{-1}(x),$$

ist eine glatte Funktion (oder eine C^q Funktion mit $q \in \mathbb{N}$), wenn ω eine glatte k-Form (oder eine k-Form vom Typ C^q) ist. Dies hatten wir so definiert. Im weiteren gehen wir von einer glatten k-Form ω aus.

Dann ist jede Funktion $a^\varphi \circ \varphi$ Borel-Lebesgue-meßbar und sie ist Lebesgue-integrierbar, falls zum Beispiel $U \subset \mathbb{R}^k$ eine beschränkte Menge ist oder der *Träger* von a^φ kompakt ist. Dabei ist der Träger definiert als der Abschluß der Menge

$$\{x \in M \mid a^\varphi(x) \neq 0\}.$$

Wir bezeichnen den Träger mit $\operatorname{supp}(\alpha^\varphi)$.

In jedem der genannten Fälle ist dann

$$\int_{\varphi^{-1}(V \cap A)} a^\varphi \circ \varphi \, d\lambda^k < +\infty.$$

Die Vorgehensweise wird nun die sein: wir zerlegen die meßbare Menge A in solche Teilmengen, die in Kartenbereichen enthalten sind, betrachten in den Kartenbereichen das obige Integral und addieren diese geeignet.

Von nun an betrachten wir eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit oder ohne Rand und k-Formen in einer der drei folgenden Klassen:

$$\begin{aligned}
\Omega_0^k(M) &= \{\omega \text{ ist eine } k\text{-Form auf } M \mid \operatorname{supp}(\omega) \text{ ist kompakt}\} \\[2ex]
\Omega_+^k(M) &= \{\omega \text{ ist eine } k\text{-Form auf } M \mid \omega_x(a_1, \dots, a_k) \geq 0 \text{ für alle} \\
&\qquad (a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{O}_{T_xM}, x \in M\} \quad (\text{positive } k\text{-Formen}) \\[2ex]
\Omega_-^k(M) &= \{\omega \text{ ist eine } k\text{-Form auf } M \mid \omega_x(a_1, \dots, a_k) \leq 0 \text{ für alle} \\
&\qquad (a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{O}_{T_xM}, x \in M\} \quad (\text{negative } k\text{-Formen})\ .
\end{aligned}$$

Ist M kompakt, so ist $dM \in \Omega_0^k(M)$, ist M beliebig, so ist $dM \in \Omega_+^k(M)$.

Definition 42.4 Es seien $\omega \in \Omega_{0,\pm}^k(M)$ eine k-Form auf M, $A \in \mathcal{B}(M)$ mit $A \subset V$ für eine positive orientierte Karte (U, φ, V) und $\omega|_V$ die lokale Darstellung von ω bezüglich der Karte (U, φ, V). Wir definieren das Integral von ω über A durch

$$\int_A \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} a^\varphi \circ \varphi \, d\lambda^k.$$

Satz 42.5 *$\int_A \omega$ ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der positiv orientierten Karte φ.*

Beweis: Es seien $A \subset V$ und (U, φ, V) und (U', ψ, V) zwei positiv orientierte Karten nach V. Wir haben dann die Darstellungen

$$\begin{aligned}
\omega|_V(x) &= a^\varphi(x)\ d(\varphi_1^{-1})_x \wedge \cdots \wedge d(\varphi_k^{-1})_x \\
&= a^\psi(x)\ d(\psi_1^{-1})_x \wedge \cdots \wedge d(\psi_k^{-1})_x
\end{aligned}$$

für jedes $x \in V$. Nach Satz 40.10 gilt für $x \in V$

$$a^\varphi(x) = \det D(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) \cdot a^\psi(x)$$

(für zwei Karten haben wir dies nach der Definition 40.18 aus Satz 40.10 abgeleitet, siehe Seite 117 oben). Nun ist nach Satz 38.6 $\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) > 0$. Es folgt somit

$$(*) \qquad a^\varphi \circ \varphi = |\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)| \, a^\psi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi.$$

Nach der Transformationsformel von Jakobi für Lebesgue-Integrale (Satz 36.2) folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_A \omega &= \int_{\psi^{-1}(A)=\psi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(A)))} a^\psi \circ \psi \, d\lambda^k \\
&= \int_{\varphi^{-1}(A)} a^\psi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi \, |\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)| \, d\lambda^k \\
&= \int_{\varphi^{-1}(A)} a^\varphi \circ \varphi \, d\lambda^k.
\end{aligned}$$

Also ist $\int_A \omega$ wohldefiniert. □

Nun befassen wir uns mit dem Fall, in dem $A \subset M$ nicht in einem Kartenbereich V liegt. Dazu führen wir eine wichtige Zerlegung ein:

Definition 42.6 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein Atlas von M. Eine *Zerlegung der* 1 zum Atlas $\mathcal{A}$ ist eine abzählbare Familie $\{f_n\}_{n \geq 1}$ von nichtnegativen glatten Funktionen $f_n \colon M \to [0,1]$, so dass

(1) $\operatorname{supp}(f_n)$ ist kompakt und in einer Kartenumgebung von $\mathcal{A}$ enthalten für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\{\operatorname{supp}(f_n)\}_{n \geq 1}$ ist *lokal endlich*, d.h. zu jedem $x \in M$ existiert eine Umgebung V_x, so dass $V_x \cap \operatorname{supp}(f_n) \neq \emptyset$ nur für endlich viele n.

(3)

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x) = 1 \quad \text{für alle} \quad x \in M.$$

Eine Zerlegung der 1 ist also die Wahl einer Folge $(f_n)_n$ von Funktionen, die die Funktionen $f \equiv 1$ in eine Summe von Funktionen mit kompaktem Träger, die jeweils in einer Kartenumgebung liegen, zerlegt.

Satz 42.7 *Zu jedem Atlas $\mathcal{A}$ auf M existiert eine Zerlegung der* 1.

Beweis: im Anhang zu diesem Kapitel.

Definition 42.8 Es seien $A \in \mathcal{B}(M)$, $\omega \in \Omega^k_{0,\pm}(M)$ und $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}$ ein Atlas von positiv orientierten Karten und $\{f_\alpha\}_\alpha$ sei eine zugehörige Zerlegung der 1. Dann definieren wir

$$\int_A \omega := \sum_\alpha \int_{A \cap V_\alpha} f_\alpha \, \omega.$$

Satz 42.9 *Die Definition 42.8 ist korrekt, das heißt unabhängig von $\mathcal{A}$ und $\{f_\alpha\}_\alpha$ und stimmt für meßbare Teilmengen, die in einem Kartengebiet liegen, mit Definition 42.4 überein.*

Beweis: Es sei $\tilde{\mathcal{A}} = \{(U_\beta, \varphi_\beta, V_\beta)\}$ ein weiterer Atlas von positiv orientierten Karten von M mit einer zugehöriger Zerlegung der 1, die wir mit $\{g_\beta\}_\beta$ bezeichnen. Wir wollen zeigen:

$$\sum_\alpha \int_{A\cap V_\alpha} f_\alpha\ \omega = \sum_\beta \int_{A\cap V_\beta} g_\beta\ \omega.$$

Es gilt $f_\alpha = \sum_\beta f_\alpha\, g_\beta$ und $g_\beta = \sum_\alpha g_\beta\, f_\alpha$. Weiter ist $\operatorname{supp}(f_\alpha\, g_\beta\, \omega) \subset V_\alpha \cap V_\beta$ und somit gilt

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha \int_{A\cap V_\alpha} f_\alpha\, \omega &= \sum_\alpha \sum_\beta \int_{A\cap V_\alpha} (f_\alpha\, g_\beta)\, \omega \\
&= \sum_\beta \sum_\alpha \int_{A\cap V_\beta} (f_\alpha\, g_\beta)\, \omega \\
&= \sum_\beta \int_{A\cap V_\beta} \sum_\alpha (f_\alpha\, g_\beta)\, \omega \\
&= \sum_\beta \int_{A\cap V_\beta} g_\beta\, \omega,
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile verwenden, dass die Summe endlich ist für ein $\omega \in \Omega^k_0(M)$, während wir für ein $\omega \in \Omega^k_\pm(M)$ den Satz von der monotonen Konvergenz verwenden.

Es seien nun (U, φ, V) eine positive orientierte Karte und $A \subset V$. Dann wollen wir zeigen:

$$\sum_\alpha \int_{A\cap V_\alpha} f_\alpha\, \omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} a^\varphi \circ \varphi\, d\lambda^k.$$

Für jedes α ist $A\cap V_\alpha$ meßbar und auch in V enthalten. Nach Satz 42.5 ist $\int_{A\cap V_\alpha} f_\alpha\, \omega$ wohldefiniert und wir können zu seiner Berechnung eine beliebige positiv orientierte Karte φ wählen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha \int_{A\cap V_\alpha} f_\alpha\, \omega &= \sum_\alpha \int_{\varphi^{-1}(A\cap V_\alpha)} (f_\alpha \circ \varphi)(a^\varphi \circ \varphi)\, d\lambda^k \\
&= \sum_\alpha \int_{\varphi^{-1}(A\cap V)} (f_\alpha \circ \varphi)(a^\varphi \circ \varphi)\, d\lambda^k \\
&= \int_{\varphi^{-1}(A\cap V)} \Big(\sum_\alpha f_\alpha\, a^\varphi\Big) \circ \varphi\, d\lambda^k \\
&= \int_{\varphi^{-1}(A)} a^\varphi \circ \varphi\, d\lambda^k.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Satz 42.10 *(Elementare Eigenschaften des Integrals)*

(1) Es seien $\omega \in \Omega^k_{0,\pm}(M)$ und $A \in \mathcal{B}(M)$. Ist $A = A_0 \cup \bigcup_{i=1}^N A_i$, wobei A_0 eine Nullmenge sei und die A_i seien paarweise disjunkt und in $\mathcal{B}(M)$, $N \leq \infty$, so gilt

$$\int_A \omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega.$$

(2) Das Integral ist linear, d.h. für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k_{0,\pm}(M)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_A \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = \lambda_1 \int_A w_1 + \lambda_2 \int_A \omega_2.$$

(3) Ist $\omega \in \Omega^k_+(M)$ und gilt für zwei stetige Funktionen $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ die Relation $f \leq g$, so ist

$$\int_A f\,\omega \leq \int_A g\,\omega.$$

(4) Es seien $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine weitere k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit oder ohne Rand und $F\colon M \to N$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus (vgl. Satz 38.6). Es seien weiter $A \in \mathcal{B}(M)$ und $\omega \in \Omega^k_{0,\pm}(N)$. Dann gilt

$$\int_A F^*\omega = \int_{F(A)} \omega.$$

(5) $-M$ bezeichne die Untermannigfaltigkeit M versehen mit der entgegengesetzten Orientierung. Dann ist

$$\int_{-A} \omega = -\int_A \omega \quad \text{für } A \in \mathcal{B}(M).$$

Beweis: zu (1): Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_A \omega &= \sum_\alpha \int_{A\cap V_\alpha} f_\alpha\,\omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha^{-1}(A\cap V_\alpha)} (f_\alpha\, a^{\varphi_\alpha}) \circ \varphi_\alpha\, d\lambda^k \\
&= \sum_\alpha \sum_{i=0}^N \int_{\varphi_\alpha^{-1}(A_i\cap V_\alpha)} (f_\alpha\, a^{\varphi_\alpha}) \circ \varphi_\alpha\, d\lambda^k \\
&= \sum_\alpha \sum_{i=1}^N \int_{A_i\cap V_\alpha} f_\alpha\,\omega = \sum_{i=1}^N \sum_\alpha \int_{A_i} f_\alpha\,\omega \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \sum_\alpha f_\alpha\,\omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega,
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\varphi_\alpha^{-1}(A \cap V_\alpha) = \varphi_\alpha^{-1}(A_0 \cap V_\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^N \varphi_\alpha^{-1}(A_i \cap V_\alpha)$$

und die Endlichkeit bzw. die Monotonie von $\sum_\alpha$ verwendet haben.

zu (2): Dies folgt aus der Definition.

zu (3): Der Beweis nutzt die entsprechende Eigenschaft des Lebesgue-Integrals.

zu (4): Nach (1) zeigen wir (4) für $A \in \mathcal{B}(M)$ mit $A \subset V$, wobei (U, φ, V) eine Karte in M ist. Weiter sei $F(A) \subset \tilde{V}$, wobei $(\tilde{U}, \psi, \tilde{V})$ eine Karte in N ist. Beide Karten wählen wir positiv orientiert. Es gilt

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{\psi^{-1}(F(A))} a^\psi \circ \psi \, d\lambda^k.$$

Wir betrachten die Abbildung (die *Kartendarstellung* von F im Sinne der Definition 39.3)

$$T := \psi^{-1} \circ F \circ \varphi \colon \varphi^{-1}(V \cap F^{-1}(\tilde{V})) \to \psi^{-1}(\tilde{V}) = \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^k \ .$$

Nach Satz 37.16 ist T ist ein Diffeomorphismus. Die Transformationsformel liefert

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{T(\varphi^{-1}(A))} a^\psi \circ \psi \ d\lambda^k = \int_{\varphi^{-1}(A)} a^\psi \circ \psi \circ T \, |\det DT| \, d\lambda^k.$$

Mit Hilfe von Satz 40.10 (analog zu Seite 117, vergleiche auch mit dem Basiswechsel in Satz 39.8) folgt:

$$(*) \qquad (F^*\omega)^\varphi(x) = \det\big(DT(\varphi^{-1}(x))\big) \cdot a^\psi(F(x)),$$

wobei wir mit $(F^*\omega)^\varphi$ die der Karte φ zugeordnete Koeffizientenfunktion in der lokalen Darstellung dieser Form bzgl. der Karte (U, φ, V) bezeichnen. Da F orientierungserhaltend ist, ist $\det\big(DT(\varphi^{-1}(x))\big) > 0$, und somit ist

$$(F^*\omega)^\varphi \circ \varphi = |\det DT| \, (a^\psi \circ F \circ \varphi) = |\det DT| \, (a^\psi \circ \psi \circ T),$$

also

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} (F^*\omega)^\varphi \circ \varphi \, d\lambda^k = \int_A F^*\omega.$$

zu (5): Es sei (U, φ, V) eine positiv orientierte Karte und es ei Œ$A \subset V$. Dann ist $(U, \tilde{\varphi}, V)$ mit $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \tau$ und

$$\tau \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \tau(y_1, \ldots, y_k) := (y_1, \ldots, y_{k-1}, -y_k),$$

eine positiv orientierte Karte auf $-M$. Es gilt dann $a^\varphi = -a^{\tilde{\varphi}}$, denn $a^\varphi(x) = \omega(x)(D_1\varphi(y), \ldots, D_k\varphi(y))$ und $a^{\tilde{\varphi}}(x) = \omega(x)(D_1\varphi(y), \ldots, D_{k-1}\varphi(y), -D_k\varphi(y))$. Es gilt $\det(D\tau) = -1$ und somit

$$\begin{aligned} \int_A \omega &= \int_{\varphi^{-1}(A)} a^\varphi \circ \varphi \, d\lambda^k = \int_{\tau(\tilde{\varphi}^{-1}(A))} a^\varphi \circ \varphi \, d\lambda^k \\ &= \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} a^\varphi \circ \varphi \circ \tau \ |\det D\tau| \ d\lambda^k = -\int_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} a^{\tilde{\varphi}} \circ \tilde{\varphi} \, d\lambda^k \ . \end{aligned}$$

Damit folgt $\int_{-A} \omega = \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} a^{\tilde{\varphi}} \circ \tilde{\varphi} \, d\lambda^k = -\int_A \omega$. Somit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkungen 42.11 Aus (1) in Satz 42.10 folgt zum einen, dass man Nullmengen weglassen kann. Weiter folgt: Man zerlegt eine meßbare Menge $A \in \mathcal{B}(M)$ in eine disjunkte Vereinigung meßbarer Mengen, die jeweils in einem Kartenbereich enthalten sind: $A = \bigcup_{i=1}^N A_i$, $N \leq \infty$. Dann ist

$$\int_A \omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega,$$

und dies berechnet man dann mittels Definition 42.4.

Bemerkung 42.12 Sei $\omega \in \Omega^k_+(M)$. Dann ist $\mu_\omega \colon \mathcal{B}(M) \to [0,\infty]$ mit $A \mapsto \int_A \omega$ ein Maß auf $\mathcal{B}(M)$ und das wie in Kapitel 31 definierte Integral für den Maßraum $(M, \mathcal{B}(M), \mu_\omega)$ erfüllt

$$\int_A f\, d\mu_\omega = \int_A f\,\omega.$$

Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit und dM die Volumenform aus Kapitel 41. Es sei $A \in \mathcal{B}(M)$ und $f \colon M \to \mathbb{R}$ sei eine meßbare Abbildung auf M.

Definition 42.13 Das Integral $\int_A f\, dM$ heißt *Oberflächenintegral* von f über $A \subset M$. Die Zahl

$$\mathrm{Vol}\,(A) := \int_A dM$$

nennt man das *Volumen* von A.

Es seien (U, φ, V) eine positiv orientierte Karte in M und $A \subset V$, $A \in \mathcal{B}(M)$. Weiter sei $(g_{ij})_{i,j}$ die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik bezüglich dieser Karte (siehe Definition 39.14). Dann gilt mit Hilfe der lokalen Darstellung der Volumenform (Satz 41.4):

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(A) &= \int_A \sqrt{\det\big((g_{ij})_{i,j}\big)}\; d\varphi_1^{-1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_k^{-1} \\ &= \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det\big((g_{ij})_{i,j}\big)}\; \circ \varphi\, d\lambda^k\ .\end{aligned}$$

Beispiele 42.14 (1) $A \subset M = \mathbb{R}^k$ sei eine meßbare Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{R}^k$. Es gilt $d\mathbb{R}^k = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ (siehe Beispiel 41.5 (i)). Wir erhalten

$$\mathrm{Vol}\,(A) = \int_A dM = \int_A d\lambda^k = \lambda^k(A).$$

(Volumen von Teilmengen des $\mathbb{R}^k$)

(2) Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ wie in Beispiel 41.5 (ii), also eine 1-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, sprich eine Kurve $\gamma \colon (a,b) \to \Gamma$. Für die Volumenform gilt

$$d\Gamma\ |_{\gamma\left((a,b)\right)} = \|\gamma'(\gamma^{-1}(x))\| d(\gamma^{-1})_x$$

mit $x \in \gamma\big((a,b)\big)$. Das Volumen ist die *Bogenlänge*:

$$\mathrm{Vol}\,(\gamma(a,b)) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

(Volumen von Kurven (Bogenlänge))

(3) Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ und (U, φ, V) eine Karte. Mit Beispiel 41.5 (iii) gilt für eine meßbare Teilmenge A von V mit $A = \varphi(W)$

$$\text{Vol }(A) = \int_W \|D_1\varphi(x) \times D_2\varphi(y)\| \, dx \, dy.$$

(Volumen von Flächen im $\mathbb{R}^3$)

(4) *Das Volumen der Sphäre* $S^2 \subset \mathbb{R}^3$: Mit der Karte Φ aus Beispiel 39.15 ist $\det\big((g_{ij}(x))_{i,j}\big) = \cos^2\vartheta$, und somit folgt

$$\text{Vol}(S^2) = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\sin\vartheta|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) d\varphi = 4\pi.$$

Für eine Abbildung $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ folgt dann

$$\int_{S^2} f \, dS^2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f \circ \Phi(\varphi, \vartheta) \cos\vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi,$$

sobald das Integral existiert.

(5) *Flächeninhalt eines Graphen*: Es seien $h\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und U eine offene Menge. $M :=$ graph $(h) = \{x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$ ist eine Fläche in $\mathbb{R}^3$. Eine Karte ist $\varphi\colon U \to M$ mit $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$. Es gilt

$$D\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 h & \partial_2 h \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 h(x, y) & \partial_2 h(x, y) \end{pmatrix}.$$

Nun wenden wir Beispiel (3) an:

$$\text{Vol}(M) = \int_U \sqrt{1 + (\partial_1 h(x, y))^2 + (\partial_2 h(x, y))^2} \; dx \, dy.$$

Allgemein gilt: ist $h\colon U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und U eine offene Teilmenge, so erhalten wir

$$\text{Vol}(M) = \int_U \sqrt{1 + \|\text{grad } h(t)\|^2} \, d\lambda^{n-1}(t).$$

Dies ist eine Übung.

Anhang:

Beweis zu Satz 42.7: Wir zeigen diesen Satz in einer schwächeren Form: wir konstruieren eine Zerlegung der 1 mittels *stetiger* Abbildungen $\{f_n\}_{n\geq 1}$. Die „glatte Variante“ findet man zum Beispiel in *Jänich, Vektoranalysis,* oder *Bröcker, Analysis III.* Für die Definition 42.8 genügte es, integrierbare $\{f_n\}_{n\geq 1}$ zu haben, was erfüllt sein wird, da wir stetige $\{f_n\}_{n\geq 1}$ mit kompaktem Träger konstruieren werden. Wir stellen ein Lemma voran:

Lemma 42.15 *Eine Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt eine kompakte Ausschöpfung: dies ist eine Folge $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von M mit*

(i) $K_i \subset K^o_{i+1}$ *(offen relativ M)*
(ii) $\bigcup_{i\geq 1} K_i = M$.

: Man betrachte offene Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ mit rationalen Eckpunkten und so, dass $\overline{Q}_i \cap M$ kompakt ist. Wir setzen $V_i := Q_i \cap M$. Dann wählen wir $K_1 := \overline{V}_1$ und bestimmen induktiv eine Folge von Indizes $1 = n_1 < n_2 < \cdots$ so, dass

$$K_i := \bigcup_{k=1}^{n_i} \overline{V}_k \subset \bigcup_{k=1}^{n_{i+1}} V_k.$$

Dies liefert eine kompakte Ausschöpfung. □

Korollar 42.16 *Jede Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt einen abzählbaren Atlas (hatten wir schon gesehen).*

Der Atlas $\mathcal{A}$ gibt uns eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ der Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir zeigen nun, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von M eine Zerlegung der 1 im Sinne der Definition 42.6 gibt, wobei die dortigen Kartenumgebungen ersetzt werden durch die Überdeckungselemente. Zunächst zeigen wir:

(*) Zu jeder Umgebung $V \subset M$ eines Punktes $x \in M$ gibt es eine stetige Funktion $\varphi\colon M \to [0,\infty)$ mit $\varphi(x) > 0$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subset V$.

Dazu wähle eine Kugel $B_R(x) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{B_R(x)} \cap M \subset V$. Wir setzen $\varphi := f|_M$ mit

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ f(\eta) := \begin{cases} (R - \|\eta\|)^2\,, & \eta \in B_R(x), \\ 0\,, & \eta \in \mathbb{R}^n \setminus B_R(x). \end{cases}$$

Dann hat φ die gewünschte Eigenschaft.

Es sei $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von M. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ wählen wir endlich viele Funktionen

$$\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,r}\colon M \to [0,\infty)$$

mit

(i) Der Träger jeder dieser Funktionen liegt in einer Menge der Überdeckung $\mathcal{U}$ und in

$$K^o_{i+1} \setminus K_{i-2} \qquad (\text{wir setzen } \ K_{-1}, K_0 := \emptyset).$$

(ii) In jedem Punkt $x \in K_i \setminus K_{i-1}^o$ hat wenigstens eine dieser Funktionen einen positiven Wert.

Dazu wählen wir zu jedem $x \in K_i \setminus K_{i-1}^o$ eine stetige Funktion $\varphi_{i,x} \colon M \to [0, \infty)$, deren Träger in einer Menge der Überdeckung $\mathcal{U}$ und in $K_{i+1}^o \setminus K_{i-2}$ liegt, und für die $\varphi_{i,x}(x) > 0$ gilt. Dies geht nach (*). Die Mengen

$$W(x) := \{\xi \in M | \varphi_{i,x}(\xi) > 0\}$$

bilden dann eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K_i \setminus K_{i-1}^o$. Gewisse endlich viele $W(x_1), \ldots, W(x_{r_i})$ überdecken dann $K_i \setminus K_{i-1}^o$. Die Funktionen

$$\varphi_{i,j} := \varphi_{i,x_j}, \ j = 1, \ldots, r_i,$$

erfüllen dann (i) und (ii).

Die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_{i,j}, \ i \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, r_i,$$

ist dann nach Konstruktion lokal endlich. Nun setzt man

$$\varphi := \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_i} \varphi_{i,j} \ .$$

Dies ist eine positive stetige Funktion auf M. Nun bilden die Funktionen

$$f_{i,j} := \frac{\varphi_{i,j}}{\varphi}$$

eine der Überdeckung $\mathcal{U}$ zugeordnete Zerlegung der 1. $\square$

Tatsächlich liefert die obige Konstruktion C^1-Funktionen. Ihre Träger sind kompakt.

KAPITEL 43

Äußere Ableitung und der Satz von Stokes

Wir dehnen die Operation d, die jeder differenzierbaren Funktion ihr Differential zuordnet, auf k-Formen aus. Ziel ist es, den Satz von Stokes herzuleiten. Für das Cauchy-Riemann Integral haben wir

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

gesehen. Gewisse Bedingungen an den Integranden ermöglichen es, das Integral durch Werte auf dem Rand des Integrationsbereichs auszudrücken. Dies wollen wir auf Untermannigfaltigkeiten mit Rand ausdehnen.

Satz 43.1 *Es gibt genau eine Möglichkeit, jeder differenzierbaren k-Form ω ($\omega(x) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$) in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine $(k+1)$-Form $d\omega$ zuzuordnen, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass die folgenden Forderungen erfüllt sind.*

(i) *d ist linear: $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.*
(ii) *Für jede Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$ ist df das Differential.*
(iii) *(Produktregel) Für jede differenzierbare k-Form ω und jede weitere differenzierbare Form η ist*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(iv) *Für jede 2-mal stetig differenzierbare Form ω gilt*

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0.$$

Definition 43.2 $d\omega$ in Satz 43.1 heißt das Differential bzw. die *äußere Ableitung* von ω.

Beweis von Satz 43.1: Wir nehmen an, eine Operation d mit den vier Eigenschaften existiert. Wir leiten eine explizite Darstellung her. Aus (iii) und (iv) folgt per Induktion

$$(*) \qquad d(dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}) = 0, \ k \geq 1.$$

Zusammen mit (i), (ii) und (iii) folgt dann für eine beliebige differenzierbare Form $\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} a_{j_1,\ldots,j_k} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$:

$$(**) \qquad d\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} da_{j_1 \ldots j_k} \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}).$$

Somit ist $d\omega$ für jede differenzierbare k-Form eindeutig bestimmt. Die durch $(**)$ definierte Operation erfüllt nun umgekehrt die Eigenschaften (i)-(iv): (i) und (ii) folgen unmittelbar. Wir zeigen (iii) für $\omega = a\,dx_I := a\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ und $\eta = b\,dx_J$, was wegen der Linearität reicht. Es ist

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(ab) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (da)b \wedge dx_I \wedge dx_J + a(db) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (da) \wedge dx_I \wedge b\,dx_J + (-1)^k a\,dx_I \wedge db \wedge dx_J \end{aligned}$$

nach (ii) und der Regel $\eta \wedge \omega = (-1)^{k\ell}\omega \wedge \eta$ für $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^\ell(V)$. Also haben wir $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

Zu (iv): Es sei ω zunächst eine 0-Form, also $\omega = a$ in obiger Notation. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(da) &= d\Bigl(\sum_{i=1}^n \partial_i a\,dx_i\Bigr) \qquad \text{(siehe 40.12(i))} \\ &= \sum_{i=1}^n d(\partial_i a) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \Bigl(\sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i a\,dx_j\Bigr) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i<j} (\partial_j \partial_i a - \partial_i \partial_j a)\,dx_j \wedge dx_i = 0, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von Schwarz, Korollar 24.17, verwendet haben. Für eine k-Form $\omega = a\,dx_I$ folgt mit (iii) und $(**)$

$$dd\omega = d(da \wedge dx_I) = d^2 a \wedge dx_I - da \wedge d(dx_I) = 0.$$

Mit Hilfe der Linearität folgt dann (iv) allgemein. Damit ist der Satz bewiesen. □

Für ein $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n), U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist die *Divergenz* von f definiert durch

$$\triangledown \cdot f := \operatorname{div} f := \sum_{i=1}^n \partial_i f^i.$$

Mit Hilfe des Vektorprodukts im $\mathbb{R}^3$ heißt dann für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot} f := \triangledown \times f := (\partial_2 f^3 - \partial_3 f^2, \partial_3 f^1 - \partial_1 f^3, \partial_1 f^2 - \partial_2 f^1)$$

die *Rotation* von f.

Beispiele 43.3 (i) $d(xdy - ydx) = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2dx \wedge dy$

(ii) In der Notation von Beispiel 40.14 (iv) mit $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ und $u \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}
df = d\omega_{0,f} &= \sum_{i=1}^n \partial_i f\, dx_i = \omega_{1,\operatorname{grad} f}\\
d\omega_{n-1,u} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} du_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n\\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \Big(\sum_{j=1}^n \partial_j u_i dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n\Big)\\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\, \partial_i u_i\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n\\
&= \Big(\sum_{i=1}^n \partial_i u_i\Big)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\\
&= \omega_{n,\operatorname{div} u}.
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt $d\omega_{1,u} = \omega_{2,\operatorname{rot} u}$ für $n = 3$ (Übung).

Satz 43.4 *(Satz von Stokes) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit und der Rand ∂M von M sei versehen mit der induzierten Orientierung (siehe Definition 41.11). Weiter sei ω eine $(k-1)$-Form mit kompaktem Träger auf M. Dann gilt*

$$(*) \qquad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweis: Sei $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}$ ein Atlas auf M. Jede Karte (U,φ,V) ist dabei gemäß Definition 41.6 gewählt, d.h. für $x \in \operatorname{Int}(M)$ gilt $U \subset \mathbb{R}^k$, $x \in V \subset \operatorname{Int}(M)$, V relativ offen in M und für $x \in \partial M$ gilt $U \subset \mathbb{R}^k_+$, $x \in V \subset M$, V relativ offen in M. Sei $\{f_\alpha\}_\alpha$ eine Zerlegung der 1 zu $\mathcal{A}$, dann ist $\omega = \sum_\alpha f_\alpha \omega$ und diese Summe ist endlich, denn der Träger von ω ist kompakt. Da beide Seiten in $(*)$ linear in ω sind, genügt es

$$\int_M d(f_\alpha\omega) = \int_{\partial M} f_\alpha \omega$$

zu zeigen. Also können wir für den Beweis von $(*)$ ohne Einschränkung annehmen, dass der Träger der Form ω in einem Kartenbereich V einer Karte $(U,\varphi,V) \in \mathcal{A}$ von M liegt. In beiden für die Karte möglichen Fällen berechnen wir beide Seiten von $(*)$ getrennt.

Sei zunächst $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \operatorname{Int}(M)$: Wir wählen Œ $U = \mathbb{R}^k$. Bezüglich dieser Karte hat ω die lokale Darstellung

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^k \omega_i^\varphi\, d\varphi_1^{-1} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\varphi_i^{-1}} \wedge \cdots \wedge d\varphi_k^{-1}.$$

Dabei verwenden wir die lokale Darstellung $(*)$ auf Seite 117 und die Bezeichung

$$\omega_i^\varphi(x) := \omega(x)(D_1\varphi(y), \ldots, \widehat{D_i\varphi(y)}, \ldots, D_k\varphi(y)),\ \ y \in U, y = \varphi^{-1}(x), x \in V.$$

Also folgt für die äußere Ableitung

$$d\omega|_V = \sum_{i=1}^{k} d\omega_i^\varphi \wedge d\varphi_1^{-1} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\varphi_i^{-1}} \wedge \cdots \wedge d\varphi_k^{-1} .$$

Nach Satz 39.17 ist

$$\begin{aligned} d\omega_i^\varphi &= \sum_{l=1}^{k} (D_l(\omega_i^\varphi \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} \cdot \Big(\sum_{m=1}^{k} g^{lm} \cdot (D_m\varphi) \circ \varphi^{-1} \Big) \\ &= \sum_{l=1}^{k} (D_l(\omega_i^\varphi \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} d\varphi_l^{-1} , \end{aligned}$$

denn

$$\Big(\sum_{m=1}^{k} g^{lm}(x) D_m\varphi(y) \Big) D_r\varphi(y) = \sum_{m=1}^{k} g^{lm}(x) g_{mr}(x) = \delta_{lr}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} d\omega|_V &= \sum_{i,l=1}^{k} (D_l(\omega_i^\varphi \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} d\varphi_l^{-1} \wedge d\varphi_1^{-1} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\varphi_i^{-1}} \wedge \cdots \wedge d\varphi_k^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (D_i(\omega_i^\varphi \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} \, d\varphi_1^{-1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_k^{-1} \\ &=: (d\omega)^\varphi \, d\varphi_1^{-1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_k^{-1}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_V d\omega = \int_{\varphi^{-1}(V)} (d\omega)^\varphi \circ \varphi \, d\lambda^k \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^k} D_i(\omega_i^\varphi \circ \varphi) \, d\lambda^k \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} D_i\big(\omega_i^\varphi \circ \varphi\big)(x) \, dx_i \Big) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem Satz von Fubini (Satz 35.13) folgt (wir verwenden $x = (x_1, \ldots, x_k)$). Für $i = 1, \ldots, k$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} D_i\big(\omega_i^\varphi \circ \varphi\big)(x) \, dx_i = \omega_i^\varphi \circ \varphi|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

denn der Träger von ω_i^φ ist kompakt in $V \subset \mathrm{Int}(M)$. Also ist $\int_M d\omega = 0$.

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^k_+$, $V \subset M$: Sei Œ $U = \mathbb{R}^k_+$. Ersetzt man in obiger Rechnung $D_k\varphi(y)$ durch $D_k^+\varphi(y)$ (rechtsseitige partielle Ableitung in k–ter Koordinate), so ergibt sich

$$\int_M d\omega = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^k_+} D_i(\omega_i^\varphi \circ \varphi) \, d\lambda^k + (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^k_+} D_k^+(\omega_k^\varphi \circ \varphi) \, d\lambda^k .$$

Für $1 \leq i \leq k-1$ ist wieder jeder Summand gleich 0 und für $i = k$ ist

$$\int_0^\infty D_k^+\big(\omega_k^\varphi \circ \varphi\big)(x)\, dx_k = -\omega_k^\varphi(\varphi(x_1,\ldots,x_{k-1},0)).$$

Also folgt hier

$$\int_M d\omega = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \omega_k^\varphi(\varphi(x_1,\ldots,x_{k-1},0))\, d\lambda^{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}) \ .$$

Nun berechnen wir $\int_{\partial M}\omega$: Da der Träger von ω eine Teilmenge von V ist, folgt für eine Karte mit $V \subset \operatorname{Int}(M)$ sofort $\int_{\partial M}\omega = 0$ und somit auch $(*)$. Sei also wieder $U = \mathbb{R}_+^k$, $V \subset M$. Es sei $\nu\colon \partial M \to TM$ das Vektorfeld der äußeren Normalen des Randes (siehe Definition 41.10). Die folgenden Basen von T_xM in einem Punkt $x \in \partial M$ sind gleich orientiert:

$$\begin{aligned}(\nu(x), D_1\varphi(y),\ldots,D_{k-1}\varphi(y)) &\sim (D_1\varphi(y),\ldots,D_{k-1}\varphi(y),(-1)^{k-1}\nu(x))\\ &\sim (D_1\varphi(y),\ldots,D_{k-1}\varphi(y),(-1)^k D_k^+\varphi(y)),\end{aligned}$$

denn die Vektoren $D_k^+\varphi(y)$ und $\nu(x)$ zeigen nach Definition in verschiedene Richtungen bzgl. $T_x\partial M$: $\nu(x)$ nach außen, $D_k^+\varphi(y)$ nach innen. Somit ist unsere Karte (U,φ,V) positiv orientiert, wenn k gerade ist, negativ orientiert, falls k ungerade ist. Die lokale Darstellung von $\omega|_{V\cap\partial M}$ bezüglich dieser Karte hat die Gestalt

$$\omega|_{V\cap\partial M} = \sum_{i=1}^k \omega_i^\varphi\, d\varphi_1^{-1}\wedge\cdots\wedge \widehat{d\varphi_i^{-1}}\wedge\cdots\wedge d\varphi_k^{-1} = \omega_k^\varphi\, d\varphi_1^{-1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{k-1}^{-1},$$

denn für jeden Tangentialvektor $D_j\varphi(y) \in T_x\partial M$, $j = 1,\ldots,k-1$, ist

$$(d\varphi_k^{-1})_x(D_j\varphi(y)) = 0.$$

Für k gerade ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial M}\omega &= \int_{V\cap\partial M}\omega_k^\varphi\, d\varphi_1^{-1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{k-1}^{-1}\\ &= \int_{\varphi^{-1}(V\cap\partial M)}\omega_k^\varphi\circ\varphi\, d\lambda^{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1})\\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}}\omega_k^\varphi(\varphi(x_1,\ldots,x_{k-1},0))\, d\lambda^{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}).\end{aligned}$$

Für k ungerade liefert Satz 42.10 (5):

$$\int_{\partial M}\omega = -\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\omega_k^\varphi(\varphi(x_1,\ldots,x_{k-1},0))\, d\lambda^{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}).$$

Somit ist der Satz bewiesen. □

Beispiel 43.5 (Das Volumen der Sphäre)

Im Beispiel 35.10 wurde $\lambda^p(B_R^p(0))$ konkret bestimmt und es gilt $\operatorname{Vol}(B_R^p(0)) = \lambda^p(B_R^p(0))$. Es sei nun $S_R^{p-1} := \{x \in \mathbb{R}^p : |x| = R\}$. Dann gilt

$$\operatorname{Vol}(S_R^{p-1}) = \frac{p}{R}\operatorname{Vol}(B_R^p(0)).$$

Dazu beachte, dass $\partial B_R^p(0) = S_R^{p-1}$ ist und $\mathrm{Vol}(S_R^{p-1}) = \int_{S_R^{p-1}} dS_R^{p-1}$. Auf $B_R^p(0)$ betrachten wir die euklidischen Koordinaten $\varphi(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p)$. Dann ist $dB_R^p(0) = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$. Das Vektorfeld der äußeren Normalen auf dem Rand S_R^{p-1} von $B_R^p(0)$ ist

$$\nu(x) = \frac{x}{R} = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{p} x_j D_j \varphi(\varphi^{-1}(x)) \quad \text{(siehe 39.11 (ii))}.$$

Nach Satz 41.12 ist dann

$$\begin{aligned}
(dS_R^{p-1})_x &= i_{\nu(x)}(dB_R^p(0))_x \\
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{x_j}{R}\, i_{D_j\varphi(\varphi^{-1}(x))}(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) \\
&= \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} x_j \underbrace{dx_j(D_j\varphi(\varphi^{-1}(x)))}_{1} dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_p \\
&= \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} x_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_p \\
&=: \frac{1}{R}\omega
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_p \\
&= \sum_{j=1}^{p} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = p\, dB_R^p(0).
\end{aligned}$$

Der Satz von Stokes liefert dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(S_R^{p-1}) &= \int_{S_R^{p-1}} dS_R^{p-1} = \frac{1}{R} \int_{S_R^{p-1}} \omega = \frac{1}{R} \int_{B_R^p(0)} d\omega \\
&= \frac{p}{R} \int_{B_R^p(0)} dB_R^p(0) = \frac{p}{R} \mathrm{Vol}(B_R^p(0)).
\end{aligned}$$

$\square$

Der Satz von Stokes hat sehr vielfältige Anwendungen in der Geometrie, der Analysis und der mathematischen Physik. Im Hauptstudium wird man vermutlich auf viele Anwendungen treffen.

Literaturverzeichnis

- H. Amann, J. Escher. *Analysis I–III*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998–2001
- M. Barner, F. Flohr. *Analysis I, II*. W. de Gruyter, Berlin, 1987
- Ch. Blatter. *Analysis I–III*. Springer Verlag, Berlin, 1991, 1992.
- J. Dugundji. *Topology*. Allyn & Bacon, Boston, 1966.
- J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Verlag, Berlin, 1995.
- M. Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- K. Königsberger. *Analysis 1, 2*. Springer Verlag, Berlin, 1992, 1993.
- S. Lang. *Differential and Riemann Manifolds*. Springer Verlag, New York, 1995.
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1983.
- U. Storch, H. Wiebe. *Lehrbuch der Mathematik, 4 Bände*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.
- W. Walter. *Analysis 1, 2*. Springer Verlag, Berlin 1992.

Index