Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

6. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 16. Mai 2007, 16 Uhr

1. Aufgabe (8 Punkte):
Es sei φ eine symmetrische Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Signatur (n_+, n_-, n_0). Die Form φ heißt *negativ definit*, wenn $n_+ = n_0 = 0$, sie heißt *positiv semidefinit*, wenn $n_- = 0$, und *indefinit*, wenn $n_+ > 0$ und $n_- > 0$ gilt. Es sei im folgenden $V = \mathbb{R}^3$ und auf $\mathbb{R}^3$ sei eine Basis wie in Satz 16.9 (Trägheitssatz von Sylvester) gewählt, so dass die 3×3-Grammatrix von φ eine Diagonalmatrix ist. Sei weiter $q = q_\varphi$ die zu φ gehörige quadratische Form. Beschreiben Sie die Menge

$$\{v \in \mathbb{R}^3 : q(v) = 1\}$$

in den Koordinaten der oben erwähnten Basis für eine positiv definite, eine negativ definite, eine indefinite und eine positiv semidefinite symmetrische Bilineraform φ auf $\mathbb{R}^3$. Versuchen Sie sich ein Bild von diesen Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ zu machen (Skizze oder Computer).

2. Aufgabe (6 Punkte):
Gegeben sei der Vektorraum $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[-1,1]$. Betrachten Sie den Untervektorraum der Polynomabbildungen vom Grad kleiner oder gleich 3, und bestimmen Sie zur Basis $(1, x, x^2, x^3)$ eine zugehörige Orthogonalbasis bezüglich der symmetrischen Bilinearform

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt, \qquad f,g \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}).$$

3. Aufgabe (6 Punkte):
Betrachten Sie die symmetrische Bilinearform φ auf $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(v,w) := v^T\,G\,w,$$

wobei die Grammatrix G bezüglich der Standardbasis durch die folgende Matrix gegeben sei:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ positiv definit ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$, welche bezüglich φ orthonormal ist.

Bitte wenden

4. Aufgabe (Präsenz):
Es sei φ die symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^3$, die bezüglich der kanonischen Basis gegeben ist durch die Grammatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich φ via Gram-Schmidt.

5. Aufgabe (Präsenz):
Gegeben sei die folgende Abbildung $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_3x_4.$$

Ist q eine positiv definite quadratische Form auf $\mathbb{R}^4$? Dabei nennen wir q positiv definit, wenn $q(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$ mit $x \neq 0$ gilt.

6. Aufgabe (Präsenz):
Es seien M und M' Mengen und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Eine Abbildung $f : M \to M'$ heißt *Invariante*, falls $m_1 \sim m_2$ impliziert, dass $f(m_1) = f(m_2)$. Mehrere Invarinaten $f_1, f_2, \ldots$ bilden ein *vollständiges Invariantensystem*, falls $f_i(m) = f_i(\widetilde{m})$ für alle i impliziert, dass $m \sim \widetilde{m}$. Ein Beispiel: Es sei K ein Körper und M die Menge der endlichdimensionalen K-Vektorräume. Die Äquivalenzrelation sei gegeben durch $V \sim V'$, falls V isomoroph zu V' ist. Dann ist $\dim(V)$ eine Invariante und bildet ein vollständiges Invariantensystem.

(a) Sei K ein Körper und M die Menge $M(n, m, K)$. Wir setzen $A \sim B$, falls ein $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ und ein $T \in \mathrm{GL}(m, K)$ existieren mit $B = SAT$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{rang}(A)$ eine Invariante ist. Ist dies ein vollständiges Invariantensystem?

(b) Sei K ein Körper und $M = M(n, K)$. Wir setzen $A \sim B$, wenn A ähnlich zu B ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{rang}(A)$, $\det(A)$, $\mathrm{Tr}(A)$ und alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms Invarianten sind. Bilden diese Invarianten ein vollständiges Invariantensystem?