Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

5. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 10. Mai 2007

1. Aufgabe (8 Punkte):
Es sei φ eine symmetrische Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Signatur (n_+, n_-, n_0). Die Form φ heißt *negativ definit*, wenn $n_+ = n_0 = 0$, sie heißt *positiv semidefinit*, wenn $n_- = 0$, und *indefinit*, wenn $n_+ > 0$ und $n_- > 0$ gilt. Es sei im folgenden $V = \mathbb{R}^2$ und auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Basis wie in Satz 16.9 (Trägheitssatz von Sylvester) gewählt, so dass die 2×2-Grammatrix von φ eine Diagonalmatrix ist. Sei weiter $q = q_\varphi$ die zu φ gehörige quadratische Form. Beschreiben und zeichnen Sie die Menge

$$\{v \in \mathbb{R}^2 : q(v) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

in den Koordinaten der oben erwähnten Basis für eine negativ definite, eine indefinite und eine positiv semidefinite symmetrische Bilineraform φ auf $\mathbb{R}^2$.

2. Aufgabe (6 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass eine (nicht notwendigerweise Hermitesche) Sesquilinearform φ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V vollständig durch ihre Werte auf der „Diagonalen" beschrieben wird, indem Sie zeigen, dass für alle $x, y \in V$ und ein beliebiges $w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq \overline{w}$ die folgenden Darstellungen gelten:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \frac{1}{w-\overline{w}}\Big(\varphi(wx+y,wx+y) - \overline{w}\varphi(x+y,x+y) \\ &\qquad - \overline{w}(w-1)\varphi(x,x) - (1-\overline{w})\varphi(y,y)\Big) \\ \varphi(y,x) &= \frac{1}{\overline{w}-w}\Big(\varphi(wx+y,wx+y) - w\varphi(x+y,x+y) \\ &\qquad - w(\overline{w}-1)\varphi(x,x) - (1-w)\varphi(y,y)\Big).\end{aligned}$$

(b) Seien φ und ψ Sesqulinearformen auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Zeigen Sie: Falls $\varphi(v,v) = \psi(v,v)$ für alle $v \in V$ gilt, so ist $\varphi = \psi$. Zeigen Sie ferner, dass die entsprechende Aussage für Bilinearformen falsch ist.

3. Aufgabe (6 Punkte):
Mit H sei die Menge der Hermiteschen 2×2-Matrizen mit Spur 0 bezeichnet:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Dies ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Bitte wenden

(a) Zeigen Sie, dass die drei Matrizen

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von H bilden.

(b) Für $A, B \in H$ ist durch

$$\langle A, B \rangle_H := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(AB)$$

eine positiv definite symmetrische Bilinearform gegeben. Zeigen Sie $\langle A, B \rangle_H = 0$ gilt genau dann, wenn $AB + BA = 0$ ist.

(c) Zeigen Sie: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ erfüllen $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle_H = \delta_{ij}$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

4. Aufgabe (Präsenz):
Für alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sei

$$q(x) := 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Zeigen Sie, dass q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie ihre Signatur.

5. Aufgabe (Präsenz):
Diskutieren Sie den positiv definiten Fall der Aufgabe 1 gemeinsam.

6. Aufgabe (Präsenz):
Es sei V ein K-Vektorraum. Dann wissen wir schon, dass die Menge der linearen Abbildungen $f : V \to K$ ein K-Vektorraum ist. Wir bezeichnen diesen Raum mit V^*, also $V^* = \hom(V, K)$. Weiter wissen wir, dass jede dieser linearen Abbildungen durch die Vorgabe der Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt ist. Sei im folgenden V endlichdimensional und $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. So gibt es zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau eine lineare Abbildung v_i^* mit

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}, \ j = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ eine Basis von V^* ist.