Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

2. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 19. April 2007

1. Aufgabe (8 Punkte):
Es sei φ ein Endomorphismus des K-Vektorraums V.

(a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren von φ und φ^{-1}, wenn φ ein Isomorphismus ist?

(b) Welche Eigenwerte kann φ haben, wenn $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$ gilt?

(c) Welche Eigenwerte kann φ haben, wenn $\varphi^3 = \varphi$ gilt?

2. Aufgabe (8 Punkte):
Eine reelle Zahlenfolge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $L_1 = a$, $L_2 = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ für $n \geq 2$ gegeben ist, heißt Lucas-Zahlenfolge. Zu $a = 1$ und $b = 1$ ist dann L_n die n-te Fibonacci-Zahl F_n.

(a) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von F_n für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 2.$$

Betrachten Sie dazu die Eigenwerte der obigen Matrix.

(b) Zeigen Sie $L_{n+1} = F_n L_2 + F_{n-1} L_1$ für $n \geq 2$.

(c) Sei Φ die positive reelle Lösung der Gleichung $\Phi^2 = \Phi + 1$. Zeigen Sie: $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $((-\Phi)^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sind Lucas-Zahlenfolgen.

3. Aufgabe (4 Punkte):
Bestimmen Sie alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit Einträgen aus einem Körper K.

4. Aufgabe (Präsenz):
Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}$$

mit $\omega, \mu \in \mathbb{R}_+$.

Bitte wenden

5. Aufgabe (Präsenz):
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

6. Aufgabe (Präsenz):
Gegeben sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie alle ein- und zweidimensionalen (bzgl. A) invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^3$.