Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

12. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 5. Juli 2007

1. Aufgabe (8 Punkte):
Es sei $K[x]$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten aus dem Körper K. Seien $f_1, f_2 \in K[x]$ beide nicht Null und $\mathrm{grad}(f_2) \leq \mathrm{grad}(f_1)$. Der *Euklidische Algorithmus* ist die Sequenz von Divisionen mit Rest: $f_1 = q_1\, f_2 + f_3$, $\mathrm{grad}(f_3) < \mathrm{grad}(f_2)$, $f_2 = q_2 f_3 + f_4$, $\cdots$, $f_k = q_k\, f_{k+1} + f_{k+2}$, $\mathrm{grad}(f_{k+2}) < \mathrm{grad}(f_{k+1})$, endend mit $f_{n-1} = q_{n-1} f_n + 0$, denn die Grade nehmen ab. Beweisen Sie:

(a) Seien $f_1, f_2, d := f_n$ wie im Euklidischen Algorithmus. Dann teilt d sowohl f_1 als auch f_2. Angenommen $g \in K[x]$ teilt ebenfalls f_1 und f_2, dann folgt, dass g das Polynom d teilt. Also: d ist der *größte gemeinsame Teiler* von f_1 und f_2.

(b) Es gibt Polynome $p, q \in K[x]$, so dass gilt:

$$d = p\, f_1 + q\, f_2.$$

(c) Haben die nichtverschwindenden Polynome f, g nur konstante gemeinsame Teiler, so gibt es Polynome p, q, so dass

$$p\, f + q\, g = 1$$

gilt.

2. Aufgabe (6 Punkte):
Aus wie vielen Ähnlichkeitsklassen besteht die Menge

$$\{\, A \in M(6, \mathbb{R}) \mid \chi_A(x) = (x-1)^3 (x-2)^2 (x-3) \,\}?$$

Geben Sie für jede dieser Ähnlichkeitsklassen eine Jordanmatrix als Repräsentanten an.

3. Aufgabe (6 Punkte):
Bestimmen Sie für einen Jordanblock $J_k(\lambda)$ die Jordansche Normalform von $J_k(\lambda)^2$.

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat, dass die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes die Anzahl der Jordanblöcke zu diesem Eigenwert angibt. In der Vorlesung wird dies in Lemma 23.13 formuliert und bewiesen.

Anregung: Überlegen Sie sich außerdem, wie für $m \in \mathbb{N}$ die Jordansche Normalform von $J_k(\lambda)^m$ und A^m für eine beliebige Jordanmatrix A aussieht.

4. Aufgabe (Präsenz):
Es sei $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Einträgen in einem Körper K, wobei A und B quadratische Matrizen seien. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von C das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome von A und B ist.

Bitte wenden

5. Aufgabe (Präsenz):
Geben Sie eine Matrix A an, deren Minimalpolynom lautet:

(a) $M_A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 8$

(b) $M_A(x) = x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x + 4$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3, Blatt 11.

6. Aufgabe (Präsenz):
Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen für eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, deren charakteristisches Polynom durch $\chi_f(x) = (x-2)^3(x-5)^2$ gegeben ist.

Das Team der Linearen Algebra wünscht Ihnen schon heute viel Erfolg bei den anstehenden Prüfungen und eine gute vorlesungsfreie Zeit.