11. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 28. Juni 2007

1. Aufgabe (6 Punkte):

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum, seien φ, ψ zwei symmetrische Bilinearformen $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, und sei φ zusätzlich positiv definit. Zeigen Sie, dass es eine Basis gibt, bezüglich der φ und ψ gleichzeitig diagonalisierbar sind. Man sagt auch, dass man die beiden Formen simultan diagonalisieren kann.

Hinweis: (V, φ) ist somit ein Euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass es eine Darstellung von ψ der Form $\psi(v, w) = \varphi(f(v), w)$, $v, w \in V$, gibt, wobei f ein symmetrischer Endomorphismus ist (siehe Vorlesung).

2. Aufgabe (7 Punkte):

Bestimmen Sie für die Matrix

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} + 2 & -2 \\ \sqrt{2} + 2 & \sqrt{2} - 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

eine Matrix $S \in O(3)$, so dass $S^{-1} A S$ Normalform hat.

Hinweis: Verwenden Sie die Komplexifizierung wie im Beweis von Lemma 20.9.

3. Aufgabe (7 Punkte):

Es seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ Elemente eines Körpers K . Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom der $(n \times n)$ -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-3} & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

durch $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ gegeben ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für das charakteristische Polynom $\chi_A(x) = (-1)^n f(x)$ mittels Entwicklung nach der letzten Zeile der Matrix $A - xE_n$. Für den Beweis der Minimalität zeigen Sie: ist $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis und fassen wir A als die darstellende Matrix eines Endomorphismus φ bezüglich $\mathcal{V}$ auf, so ist

$$(v_n, \varphi(v_n), \varphi^2(v_n), \dots, \varphi^{n-1}(v_n)) = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1).$$

Bitte wenden

4. Aufgabe (Präsenz):

Zeigen Sie folgende Aussagen für die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Die charakteristischen Polynome von A und B sind verschieden, aber ihre Minimalpolynome sind gleich.
- (b) Die charakteristischen Polynome von B und C sind gleich, aber ihre Minimalpolynome sind verschieden.

5. Aufgabe (Präsenz):

Für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ seien die quadratischen Formen Q_1 , Q_2 , Q_3 und Q_4 auf $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2, & Q_2(x) &= 15x_1^2 + 60x_1x_2, \\ Q_3(x) &= x_1x_2, & Q_4(x) &= x_1^2 - x_2^2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$, in der Q_1 und Q_2 gleichzeitig Diagonalgestalt haben, und zeigen Sie, dass es keine Basis des $\mathbb{R}^2$ gibt, in der Q_3 und Q_4 gleichzeitig Diagonalgestalt haben.

6. Aufgabe (Präsenz): *(vergleichen Sie mit Blatt 5 und mit Blatt 10)*

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H} = L[E, I, J, K]$ in Aufgabe 6, Blatt 10, ein Schiefkörper ist. Es gelten also alle Körperaxiome bis auf die Kommutativität der Multiplikation. $\mathcal{H}$ heißt *Quaternionen-Schiefkörper*.