Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

10. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 21. Juni 2007

1. Aufgabe (7 Punkte):
Nach Satz 20.6 sind im Fall $n = 3$ die darstellenden Matrizen von Isometrien f bezüglich einer orthonormierten Basis im Wesentlichen vom Typ

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A(\varphi, +) \end{pmatrix} \text{ oder } A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & A(\varphi, +) \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0, \pi]$. Machen Sie sich dies zunächst klar. Im Folgenden sei f nicht die Identitätsabbildung. Im Fall $\det(A_f) > 0$ nennt man den Eigenraum $E(1)$ zum Eigenwert 1 *Drehachse* der Isometrie und $\varphi \in [0, \pi]$ in A_f von der obigen Form den *Drehwinkel*. Es gilt weiter in der Notation von Aufgabe 6, Blatt 9:

$$\mathrm{SO}(3) = \{ R_1(\alpha) \cdot R_2(\beta) \cdot R_1(\gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi) \}$$

(ohne Beweis, siehe Diskussion in der Übung). Die Zahlen α, β, γ heißen *Eulersche Winkel* von $A = R_1(\alpha) \cdot R_2(\beta) \cdot R_1(\gamma)$.

(a) Bestimmen Sie den Drehwinkel und die Drehachse der Matrix aus SO(3) in Aufgabe 5, Blatt 9.

(b) Bestimmen Sie Eulersche Winkel für die Matrix in Aufgabe 5, Blatt 9.

2. Aufgabe (7 Punkte): *Quadratwurzelsatz*
Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und φ ein selbstadjungierter Endomorphismus von V ohne negative Eigenwerte. Beweisen Sie, dass ein eindeutig bestimmter selbstadjungierter Endomorphismus ψ von V ohne negative Eigenwerte existiert, so dass $\varphi = \psi \circ \psi$ gilt.

Hinweis zur Eindeutigkeit: Gilt $\varphi(v) = \lambda v$, so betrachten Sie $\psi(u)$ mit $u := \psi(v) - \sqrt{\lambda} v$.

3. Aufgabe (6 Punkte):
Führen Sie die Hauptachsentransformation durch für die reelle symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe (Präsenz):
Führen Sie die Hauptachsentransformation durch für die reelle symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden

5. Aufgabe (Präsenz):
Bestimmen Sie für die Matrix

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 & -2 \\ \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-2 & -2 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

eine Matrix $U \in U(3)$, so dass $U^{-1}\,A\,U$ Diagonalform hat.

6. Aufgabe (Präsenz): *(vergleichen Sie mit Blatt 5)*
Mit H sei die Menge der Hermiteschen 2×2-Matrizen mit Spur 0 bezeichnet:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Dies ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dieser Raum ist aber nicht abgeschlossen unter Multiplikation, denn $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ ist nicht Hermitesch und $\sigma_1^2 = E_2$ hat nicht Spur 0. Zeigen Sie, dass aber

$$\mathcal{H} := \mathbb{R}E_2 + i\,H$$

abgeschlossen ist unter Mulitiplikation. Zeigen Sie weiter, dass die folgende Wahl von Elementen E, I, J, K mit

$$E := \sigma_0 := E_2, \quad I := -i\,\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$J := -i\,\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := -i\,\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathcal{H}$ ist. Es gilt also

$$\mathcal{H} = L[E, I, J, K] = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{w} & -z \\ \bar{z} & w \end{pmatrix}, w, z \in \mathbb{C} \right\}.$$