Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2007

1. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie II

Abgabe bis 12. April 2007

1. Aufgabe (6 Punkte):
Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

$$V = \mathrm{im}(f) \oplus \ker(f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}.$$

2. Aufgabe (8 Punkte):
Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ Elemente eines Körpers K. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

Bemerkung: Diese Determinante wird als Vandermondesche Determinante bezeichnet.

3. Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ und für jeden Eigenraum von φ eine Basis.

(b) Fertigen Sie eine Zeichnung an, die die Lage dieser Basisvektoren und deren Bilder im $\mathbb{R}^3$ zeigt.

(c) Ist φ diagonalisierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis an, bezüglich der die darstellende Matrix D von φ Diagonalgestalt hat, sowie die zugehörige Matrix S des Basiswechsels, und verifizieren Sie $A = S^{-1}DS$.

4. Aufgabe (Präsenz):
Diskutieren Sie Eigenwerte und Eigenvektoren einer Drehung um einen Winkel α und einer Spiegelung an einer Geraden mit dem Winkel $\alpha/2$ im $\mathbb{R}^2$. Erinnerung: Drehmatrizen haben die Form

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

Spiegelungsmatrizen die Form

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden

5. Aufgabe (Präsenz):
Gegeben sei ein K-Vektorraum V und $f, g \in \hom(V)$. Beweisen Sie:

(a) Ist $v \in V$ Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, und ist $g(v) \neq 0$, so ist $g(v)$ Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ.

(b) Ist V endlichdimensional, so haben $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Eigenwerte.

6. Aufgabe (Präsenz):
Es sei $f : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^m$ eine Abbildung mit

$$f(v + w) = f(v) + f(w)$$

für alle $v, w \in \mathbb{Q}^n$. Zeigen Sie, dass f eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.