Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und Geometrie I “

Ruhr-Universität Bochum
Prof. Dr. Peter Eichelsbacher

3. April 2007, 9.00-13.00 Uhr, 240 Minuten

Name und Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Hinweise:

- Überprüfen Sie, dass Sie eine Klausur mit 10 Aufgaben erhalten haben. Tragen Sie am besten sofort Ihre persönlichen Daten auf diesem Deckblatt ein.
- Die Lösungen der Aufgaben sind auf den dafür vorgesehenen Seiten (ggf. unter Verwendung der Rückseiten) zu notieren. Weiteres Papier steht bei der Aufsicht zur Verfügung. **Geben Sie bitte auf jedem Blatt Ihren Namen an!**
- In **jeder Aufgabe** können Sie maximal **8 Punkte** erreichen, insgesamt also maximal 80 Punkte.

Viel Erfolg!

Name: **Vorname:**

Aufgabe 1:

Es sei $M(n, K)$ die Menge der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus dem Körper K.

(a) Wann ist $A \in M(n, K)$ *regulär*?

(b) Wann ist $A \in M(n, K)$ *invertierbar*?

(c) Was ist der *Rang* $\operatorname{rang}(A)$ der Matrix $A \in M(n, K)$?

(d) Bringen Sie die drei Begriffe unter (a)-(c) in einen Zusammenhang und skizzieren Sie einen Beweis für den Zusammenhang.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 1:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 2:

Es seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit $\dim V = n$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung in einen K-Vektorraum W. Formulieren Sie die *Dimensionsformel* und beweisen Sie diese.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 2:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 3:

Gegeben seien die Mengen X, Y sowie eine Abbildung $f : X \to Y$. Wir definieren auf X die Relation $\sim$ durch

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; f(x) = f(y).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ die zugehörige Äquivalenzklasse $[x]$ gegeben ist durch

$$[x] = f^{-1}\big(\{f(x)\}\big).$$

Hierbei bezeichnet f^{-1} das Urbild.

(c) Sei zusätzlich f injektiv. Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in X$ gilt:

$$[x] = \{x\}.$$

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 3:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 4:

Wir betrachten den Raum $M(2,K)$ der 2×2-Matrizen über dem Körper K.

(a) Zeigen Sie, dass
$$U := \{A \in M(2,K) : \operatorname{spur}(A) = 0\}$$
ein Unterraum von $M(2,K)$ ist. Erinnerung: die Spur einer Matrix ist die Summe der Diagonalelemente.

(b) Zeigen Sie, dass die Familie
$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
linear unabhängig ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis für U ist.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 4:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 5:

(a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $A \in GL(3, \mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 2 & i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie zur Sicherheit Ihr Resultat, indem Sie $A\,A^{-1}$ bestimmen.

(b) Seien V und W zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume mit $\dim(V) = \dim(W) = 3$. Sei (v_1, v_2, v_3) eine Basis von V und (w_1, w_2, w_3) eine Basis von W. Die lineare Abbildung $f : V \to W$ sei gegeben durch

$$f(v_1) = i\,w_1 + 2w_2 + w_3,\;\; f(v_2) = i\,w_2,\;\; f(v_3) = 2w_1 + w_2 + i\,w_3.$$

Zeigen Sie: f ist ein Isomorphismus.

(c) Sei $g : W \to V$ die Umkehrabbildung zu f. Geben Sie $g(w_j)$, $j = 1, 2, 3$, an.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 5:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 6:

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und den Unterraum U, welcher durch folgende Gleichungen definiert wird:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_2 - x_4 = 0.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von U.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ der Endomorphismus von $\mathbb{R}^4$, welcher alle Elemente von U fixiert (d.h. $f(u) = u$ für alle $u \in U$), den Vektor $(1, 0, 0, 0)$ auf sein additiv Inverses und den Vektor $(0, 1, 0, 0)$ auf den Nullvektor abbildet. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich einer geeigneten Basis und geben Sie diese Basis auch an.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 6:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 7:

Sei V der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten und Grad kleiner gleich 4. Sei $D : V \to V$ gegeben durch $D(p) = p''$, wobei p'' die zweite Ableitung des Polynoms p bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass D eine lineare Abbildung ist.

(b) Geben Sie die darstellende Matrix von D bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_5)$ mit

$$v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3, v_5 = x^4$$

von V an.

(c) Bestimmen Sie $\ker(D)$ und $\operatorname{im}(D)$.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 7:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 8:

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge der *Fibonacci*-Zahlen mit dem Bildungsgesetz

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

für $n \in \mathbb{N}$ und den Startwerten $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$. Weiter seien gegeben die Matrizen A_n mit

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & i & & & 0 \\ i & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & i \\ 0 & & & i & 1 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{C}) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: $\det(A_n) = f_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage durch vollständige Induktion. Entwickeln Sie $\det(A_{n+1})$ zunächst nach der $(n+1)$-ten Zeile.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 8:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 9:

Es seien V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $f \circ f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.

(b) $f \circ f = f \quad \Longrightarrow \quad V = \ker(f) \bigoplus \mathrm{im}(f)$ (also $V = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$ und $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\}$.)

Hinweis: Für $v \in V$ gilt $v = (v - f(v)) + f(v)$.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 9:**

Name: **Vorname:**

Aufgabe 10:

Es sei $f : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^m$ eine Abbildung mit

$$f(v + w) = f(v) + f(w)$$

für alle $v, w \in \mathbb{Q}^n$. Zeigen Sie, dass f eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst Skalare aus $\mathbb{N}$, dann aus $\mathbb{Z}$ und dann aus $\mathbb{Q}$.

Lösung:

Name: **Vorname:**

Fortsetzung der Lösung von **Aufgabe 10:**