Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

2. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 9. November 2006, 14 Uhr

1. Aufgabe (5 Punkte):
Es seien A, B, C Teilmengen einer Menge M. Die symmetrische Differenz zweier Mengen ist durch $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ definiert. Zeigen Sie:

(a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

(b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

(c) Für Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ von M (mit $n \geq 3$) sei $A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n$ rekursiv durch $A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n = (A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_{n-1}) \triangle A_n$ definiert. Dann gilt $x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n$ genau dann, wenn die Anzahl der $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in A_i$ ungerade ist. (Dabei wird 0 als gerade betrachtet.)

Bemerkung: Teil (c) ist freiwillig, geht also nicht in die Punktzahl ein.

2. Aufgabe (5 Punkte):
Der Graph $\operatorname{graph}(f) \subset A \times B$ einer Abbildung $f : A \to B$ ist definiert als

$$\operatorname{graph}(f) := \{(a, b) \in A \times B \ : \ f(a) = b\}.$$

Es seien $A := \{1, 2, 3\}$ und $B := \{4, 5, 6\}$. Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen der Produktmenge $A \times B$ der Graph einer Funktion $f : A \to B$ sind, und wenn ja, ob diese Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(a) $\{(1, 4), (1, 5), (2, 6), (2, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

(b) $\{(2, 4), (3, 5)\}$

(c) $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$

(d) $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$

3. Aufgabe (5 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass durch $x \sim y$ für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $xy > 0$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert wird.

(b) Es seien A und B zwei Mengen sowie $f : A \to B$ eine Abbildung. Auf B sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben. Zeigen Sie, dass durch

$$x \approx y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \sim f(y)$$

für $x, y \in A$ eine Äquivalenzrelation $\approx$ auf A definiert wird.

Bitte wenden

4. Aufgabe (5 Punkte):
Die Relation R auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei gegeben durch

$$R = \{\, (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{Es existiert ein } a \in \mathbb{N} \text{ mit } pa = q \,\}.$$

Wir sagen, p teilt q, wenn $(p, q) \in R$ gilt.

(a) Ist R eine Ordnungsrelation?

(b) Ist R eine Totalordnung?

(c) Ist R eine Äquivalenzrelation?

(d) Besitzt $\mathbb{N}$ bezüglich R minimale oder maximale Elemente? Hierbei heißt $x \in \mathbb{N}$ minimal genau dann, wenn für alle $p \in \mathbb{N}$ aus pRx die Gleichheit $p = x$ folgt. Weiterhin heißt $y \in \mathbb{N}$ maximal genau dann, wenn für alle $p \in \mathbb{N}$ aus yRp die Gleichheit $p = y$ folgt. Bestimmen Sie minimale Elemente in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ bezüglich R.

5. Aufgabe (Präsenz):
Zeigen Sie:

(a) Ist $f : A \to B$ bijektiv, so gibt es eine Umkehrabbildung f^{-1}, die eindeutig definiert ist durch die Festsetzung

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x.$$

(b) f^{-1} erfüllt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$.

(c) $f : A \to B$ sei eine Abbildung und es existiere eine Abbildung $g : B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist f bijektiv und g ist die Umkehrabbildung von f.

6. Aufgabe (Präsenz):
Es seien G eine Menge und $A(x)$, $x \in G$ eine Aussageform. Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen:

$$\neg(\forall x \in G : A(x)) \iff \exists x \in G : \neg A(x).$$
$$\neg(\exists x \in G : A(x)) \iff \forall x \in G : \neg A(x).$$

7. Aufgabe (Präsenz):
Es seien A und B Teilmengen einer Menge M. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden vier Aussagen:

(a) $A \subset B$, (b) $A \cap B = A$, (c) $A \cup B = B$, (d) $B^c \subset A^c$.

8. Aufgabe (Präsenz):
Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Das Bild einer Teilmenge $A \subset X$ unter f ist gegeben durch

$$f(A) := \{ f(x) : x \in A \}.$$

Zeigen Sie für Teilmengen $A, B \subset X$ die folgende Identität:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Zeigen Sie mithilfe von Gegenbeispielen, dass die folgenden Identitäten im allgemeinen falsch sind:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$
$$f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A).$$