Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

10. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 18. Januar 2007, 14 Uhr

1. Aufgabe (7 Punkte):
Von einer linearen Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei folgendes bekannt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Begründen Sie, dass diese Angaben ϕ eindeutig festlegen.

(b) Bestimmen Sie die Bilder der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie $\ker(\phi)$.

2. Aufgabe (7 Punkte):
Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass aus $\ker(F) = \operatorname{im}(F)$ folgt, dass n gerade ist.

(b) Geben Sie für jedes gerade $n \in \mathbb{N}$ eine lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, für die $\operatorname{im}(F) = \ker(F)$ gilt.

3. Aufgabe (6 Punkte):
Es seien V und W zwei K-Vektorräume, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $v_1, \ldots, v_n \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass aus der linearen Unabhängigkeit von $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ die lineare Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$ folgt.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (a) nicht gilt, das heißt, dass aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$ im allgemeinen nicht folgt, dass $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig sind.

4. Aufgabe (Präsenz):
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$,

(b) $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + \sqrt{2}\, y$ (über $\mathbb{Q}$),

(c) $\{f : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildung}\} =: \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$.

Bitte wenden

5. Aufgabe (Präsenz):
Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ ist die Menge der *Fixpunkte* von f definiert durch

$$\operatorname{Fix} f := \{ v \in V : f(v) = v \}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Fix} f \subset V$ ein Unterraum ist.

(b) Es sei der Endomorphismus f gegeben durch $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Fix} f$.

6. Aufgabe (Präsenz):
Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(2,0) = (0,1),\ \ f(1,1) = (5,2),\ \ f(1,2) = (2,3)\ ?$$

7. Aufgabe (Präsenz):
Es sei K ein Körper. Es bezeichne $p_i : K^n \to K$ für $i = 1, \ldots, n$ jeweils die Projektion auf die i-te Komponente: $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ für $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen p_i linear sind.

(b) Überlegen Sie sich zu der folgenden Aussage einen Beweis: Eine Abbildung $f : V \to K^n$ von einem K-Vektorraum V nach K^n ist genau dann linear, wenn alle Kompositionen $p_i \circ f$ linear sind.

Das LA-Team wünscht ein erfolgreiches neues Jahr 2007 !