Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher, Ralf Holtkamp
Wintersemester 2006/2007

1. Aufgabenblatt zur Linearen Algebra und Geometrie I

Abgabe bis 2. November 2006

1. Aufgabe (5 Punkte):
Zeigen Sie, dass die Kommutativgesetze, die Assoziativgesetze und die Distributivgesetze aus Beispiel 1.14 Tautologien sind.

2. Aufgabe (5 Punkte):
Im folgenden seien A, B und C Aussagen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind:

(a) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (Abtrennungsregel)

(b) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (Syllogismus-Regel)

(c) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

(d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Kontrapositionsgesetz)

(e) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$.

3. Aufgabe (5 Punkte):
Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe logischer Quantoren und geben Sie jeweils die Negation der Aussagen an (in Formalsprache und mit Worten). Klären Sie (ohne genaue Begründung), welche der Aussagen wahr sind.

(a) Es gibt eine reelle Zahl x, so dass für jede reelle Zahl y die Summe $x + y$ positiv ist.

(b) Es gibt eine natürliche Zahl n, die größer als alle anderen natürlichen Zahlen ist.

(c) Zu jeder positiven reellen Zahl x existieren genau zwei reelle Zahlen, die $x = y^2$ lösen.

(d) Zu jedem Paar natürlicher Zahlen n und m mit $m \leq n$ existieren zwei natürliche Zahlen r und s mit $r < m$ und $n = m\,s + r$.

(e) Das Quadrat einer ganzen Zahl n hat bei Division durch 4 entweder den Rest 0 oder den Rest 1.

4. Aufgabe (5 Punkte):

(a) "Steinmeiers werden uns heute abend besuchen", kündigt Herr Merkel an. "Die ganze Familie, also Herr und Frau Steinmeier mit ihren drei Kindern Franz, Peer und Heidemarie?" fragt Frau Merkel entsetzt. Darauf Herr Merkel, der keine Gelegenheit vorübergehen lässt, seine Frau zu logischem Denken anzuregen: "Wenn Herr Steinmeier kommt, dann bringt er auch seine Frau mit. Mindestens eines der beiden Kinder Heidemarie und Peer kommt. Entweder kommt Frau Steinmeier oder Franz, aber nicht beide. Entweder kommen Franz und Peer oder beide nicht.

Bitte wenden

Und wenn Heidemarie kommt, dann auch Peer und Herr Steinmeier. Nun weißt Du, wer uns besuchen wird." Wer kommt und wer kommt nicht?

(b) In der Bibliothek des Grafen Dracula gibt es keine zwei Bücher, deren Inhalt aus gleich vielen Wörtern besteht. Die Anzahl der Bücher ist größer als die Summe der Anzahlen der Wörter jedes einzelnen Buches. Diese Aussagen genügen, um den Inhalt mindestens eines Buches aus Draculas Bibliothek genau zu beschreiben. Was steht in diesem Buch?

5. Aufgabe (Präsenz):
Entscheiden Sie, ob die folgenden Formulierungen Aussagen im Sinne der Definition 1.1 sind:

(a) Affen leben vorwiegend in der Arktis.

(b) Am 2. November 2006 ist Allerseelen.

(c) Wie spät ist es?

(d) Peter Eichelsbacher ist 35 Jahre alt.

(e) Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade.

(f) Es gibt außerirdisches Leben.

(g) Wo ist eigentlich das Buch von Bosch zur Linearen Algebra?

(h) Dieser Satz ist falsch.

6. Aufgabe (Präsenz):
Negieren Sie die folgenden Aussagen und geben Sie deren Bedeutung wörtlich wieder:

(a) $\exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N} : ((\varepsilon > 0) \wedge (n > N)) \Rightarrow (1/n < \varepsilon)$

Für die folgende Aussage sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(b) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : (|x - y| < \delta, x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

(c) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} : x^2 - 17xy + 7y^2 = 0$

(d) $\exists\, y \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 - 17xy + 7y^2 = 0$

(e) $\forall\, x \in \mathbb{N}, \forall\, y \in \mathbb{N}, \exists\, z \in \mathbb{N} : 2x - z = 3y.$

7. Aufgabe (Präsenz):
Im folgenden seien A, B und C Aussagen. Notieren Sie die Wahrheitstafel für die folgenden zusammengesetzten Aussagen:

(a) $\neg(A \wedge \neg A)$

(b) $(A \Rightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow \neg A)$

(c) $(\neg(\neg A \vee B) \wedge B) \Leftrightarrow (\neg(A \vee C) \wedge C)$

(d) $((A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow (\neg C \vee \neg A))$

(e) $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

8. Aufgabe (Präsenz):
Diskutieren Sie das folgende Gleichungssystem algebraisch und geometrisch:

(a) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$

(b) $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

(c) $3x_1 + 2x_3 = 4.$