

# Bis das Getriebe kracht: Statistik ersetzt teure Tests

H. Dette  
Chr. I. Kozub

**Die Lebensdauer eines Getriebes spricht für seine Qualität. Doch auf welchem Prüfstand würde man die Räder im Getriebe schon über 400 000 km „laufen“ lassen? Die mathematische Statistik bietet heute kostengünstigere Alternativen: Ein besseres Schätzverfahren spart jetzt zwei Drittel der Testdurchläufe ein.**



Im globalen Wettbewerb strebt die Automobilindustrie nach immer kürzeren Entwicklungszeiten. Damit steigen zugleich auch die Entwicklungskosten für den Prototyp: Für eine komplette Fahrzeugneuentwicklung fallen Kosten in Höhe von etwa 1 Mrd. US\$ an. Allein

## Wenn a priori - Entscheidungen gefordert sind

für das Getriebe muss mit 10 bis 100 Mio. US\$ gerechnet werden, je nachdem, ob es weiter- oder neu entwickelt wird. Da liegt es auf der Hand, dass sich nicht jede Automobilfirma leisten kann, ihre Produkte vorab als Prototypen unabhängig vom Herstellungsprozess zu entwickeln. Ein Entwicklungs- und Prototypenzentrum, wie das der Ford-Werke AG, ist global vernetzt: Handschaltgetriebe z.B. werden in Köln (D) entwickelt, produziert in Halewood (GB), Bordeaux (F) und Taubaté (BR); weiterverarbeitet werden die Getriebe in Kansas (USA), Chi-

huahua (MEX), Sao Bernardo (BR), Pacheco (RA), Dagenham (GB), Valencia (E) und Sétubal (P).

Bei der Entwicklung von Prototypen müssen zunehmend a priori-Entscheidungen getroffen werden. Doch worauf basieren diese Entscheidungen? Wenn es darum geht, die Lebensdauer eines Getriebes und damit seine Qualität zu prüfen, geraten Testverfahren schnell an die Grenzen dessen, was zeitlich machbar und/oder ökonomisch sinnvoll ist. Auf welchem Prüfstand würde man die Räder im Getriebe schon über 400 000 km „laufen“ lassen? Hier ist die mathematische Statistik herausgefordert; sie muss die Modelle liefern, mit denen sich bereits bei wenigen Testreihen mit möglichst großer Sicherheit vorhersagen lässt, wann ein Getriebe bricht bzw. einzelne Komponenten ausfallen werden. Anhand von Lebensdaueruntersuchungen bei der Entwicklung von Handschaltgetrieben im Entwicklungs- und Prototypenzentrum der Ford-Werke AG wird im Folgenden vorgestellt,

wie sich die Vorhersagesicherheit mit den Mitteln der mathematischen Statistik verbessern lässt.

Vor dem Test des kompletten Powertrains (Motor, Getriebe und Seitenwellen) werden die besonders ausfallgefährdeten Komponenten des Getriebes (erster, zweiter und Rückwärtsgang, Ein- und Abtriebswelle) separat auf Prüfständen untersucht: D. h. beim Getriebe-Prototyp wird jedes Zahnrad und damit jeder einzelne Zahn geprüft. Im sog. Pulsator-test drücken Angriffsbacken zwei benachbarte Zähne des fest fixierten Zahnrades immer wieder gegeneinander - solange, bis einer der beiden Zähne bricht

Prof. Dr. Holger Dette, Dipl.-Math. Christoph I. Kozub, Lehrstuhl für Stochastik, Fakultät für Mathematik



(Dauerbruch, s. Abb. 2). Jede einzelne Belastung (Puls) der Zähne erfolgt mit konstanter Frequenz und einem vorher fest definierten Drehmoment (Maß für die Kraft bei einer Drehbewegung). Aus der Anzahl der Pulse, die ein Zahn letztlich „aushalten“ kann, ergibt sich der Ausfallzeitpunkt. Die Ergebnisse einer solchen Testreihe liefern nach statistischer Analyse einen Richtwert für die Qualitätskontrolle. Während in der Praxis schon der Bruch eines Zahnes das gesamte Getriebe außer Kraft setzt, wird im Test das Zahnrad einfach „weitergedreht“ und mit derselben Last erneut geprüft. An einem Zahnrad können damit unter vergleichbaren Materialbedingungen viele Messungen durchgeführt werden, was der statistischen Aussagekraft zugute kommt.

Im Pulsator-Test werden vor allem der erste Gang und die Achsübersetzung geprüft, da aufgrund des hohen Überset-

## Zahn um Zahn im Pulsatortest

zungsverhältnisses sehr große Drehmomente ausgehalten werden müssen. Nachdem die geeigneten Zahnradpaare gefunden sind (s. Abb. 3), wird ein Getriebe-Prototyp gebaut, der im Pascar-Test (Passenger Car) hinsichtlich des Kundenfahrverhaltens überprüft wird. Neben den Dauerbrüchen, die nach sehr langer Laufzeit eintreten, werden dabei auch Lastspitzen simuliert, die z.B. durch extrem kurze Kuppelzeiten (Kavalierstart) verursacht werden. Die Folgen - sog. Gewaltbrüche (s. Abb. 2, rechts) - sollen durch Material und Konstruktion des Getriebes weitgehend vermieden werden.

Im Pascar-Test durchläuft ein Auto innerhalb kurzer Zeit quasi sein ganzes Leben (Abb. 4). Hier zeigt sich, ob mit

dem Prototyp ein Kompromiss zwischen sportlicher Durchzugskraft und einer möglichst hohen Dauerhaltbarkeit gefunden ist. Entscheidend für die Lebensdauer des Getriebes ist letztlich die Qualität der Zahnräder: Sie müssen möglichst vielen Überrollungen standhalten bis sie brechen.

Ziel der statistischen Untersuchung ist die gesicherte Vorhersage der Überrollungszahl ( $t$ ), bei der das Getriebe bzw. eine seiner Komponenten ausfallen wird. Dabei ist zunächst nur bekannt, dass mit einer zunehmenden Anzahl von Überrollungen auch die Wahrscheinlichkeit ei-

Abb. 2:

Neben den Dauerbrüchen (links) die nach langer Laufzeit des Getriebes auftreten können, hat der sog. Kavalierstart Gewaltbrüche zur Folge (rechts).

nes Getriebebruches zunimmt. Man weiß, dass sich dieser Prozess durch eine Kurve (Funktion) beschreiben lässt, mit der die Wahrscheinlichkeit eines Getriebeausfalls geschätzt werden kann. Doch diese Kurve ist nicht bekannt. Mit den Mitteln der Statistik diese Kurve bzw. die Funktion „zu finden“ bzw. sich ihr anzunähern, ist hier das eigentliche Ziel. Je besser dies gelingt, desto genauer wird eine Vorhersage über die Ausfallwahrscheinlichkeiten getroffen werden können.

Die typische Fragestellung in der Statistik lautet dabei zunächst: „wie gross

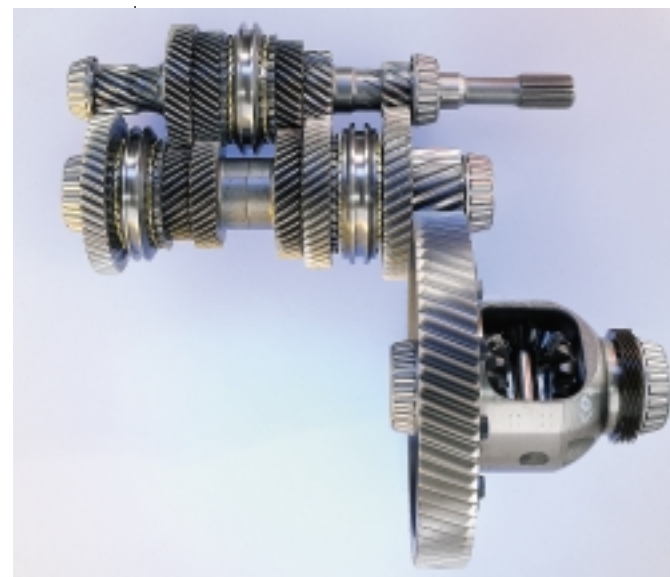


Abb. 3:

Erst wenn die geeigneten Zahnradpaare gefunden sind wird, die Abtriebswelle (Bild oben) mit den entsprechenden Zahnrädern bestückt. Ob dieser Getriebeprototyp (Bild unten) dem Kundenfahrverhalten wirklich gerecht wird, entscheidet sich im Pascar-Test.

ist bei einer Sicherheit von 95% die Gesamtleistung eines Getriebes, wenn angenommen wird, dass noch 99% der Getriebe fahrtüchtig sind?“. In der Statistik spricht man von einem 95%-Vertrauensbereich, bzw. einem 95%-Konfidenzbereich, für diejenige Überrollungszahl, bei der die Ausfallwahrscheinlichkeit des Getriebes 1% beträgt. Die „fehlenden“ fünf Prozent stellen nicht berechenbare Unsicherheitsfaktoren dar, die bei Schätzungen immer einbezogen werden müssen.

Mit mathematischen Methoden wird diese Frage präzisiert und beantwortet, wobei es für die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit eines Objektes, wie z.B. eines Zahnrades, verschiedene theoretische Modelle gibt. Ein Modell muss das Ausfallverhalten mit wenigen Parametern beschreiben können. Unserer Modellierung des Pascal-Tests wurde die

*Abb. 4: Prüfstands-simulation zum Pascal-Test: Hier durchläuft ein Getriebe in kurzer Zeit sein ganzes Leben - im Blickfeld des Ingenieurs und unter ständiger Kontrolle moderner Computertechnik.*



Annahme der nach Waloddi Weibull benannten Weibullverteilung zugrunde gelegt. Abb. 5 und 6 zeigen diese Verteilungen für zwei verschiedene Testreihen: Dabei werden für die Überrollungszahlen jeweils Abschnitte gebildet, z.B. 0-50 000,

50 000-100 000, 100 000-150 000 Überrollungen usw., wobei die Säulen die Häufigkeit der Ausfälle in diesen Abschnitten wiedergeben. Die Häufigkeitsverteilungen können zunächst nur die Bereiche der Kurve darstellen, die im Test durch entsprechende Überrollungszahlen abgedeckt wurden. Gesucht wird jedoch eine Kurve durch die Häufigkeitsverteilungen mit feiner gegliederten Abschnit-

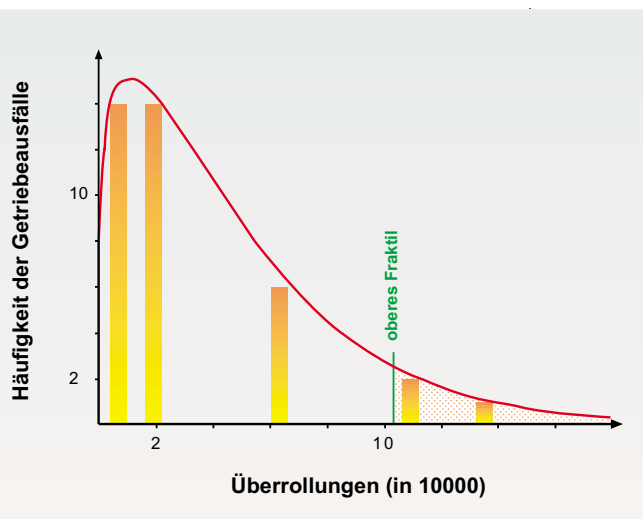
**Funktion beschreibt unendlich viele Messwerte**

ten und unendlich vielen Messwerten beschrieben werden können, insbesondere im Bereich der hohen Überrollungszahlen (Bereich des Getriebebruchs). Nimmt man nun zwei oder mehrere Punkte zwischen den Messwerten an, dann erhält man eine „ausgleichende“ Kurve über den Säulen. Abb. 5 und 6 zeigen diese überlagerten roten Kurven als eine mögliche Funktion, die die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall des Getriebes beschreiben könnte.

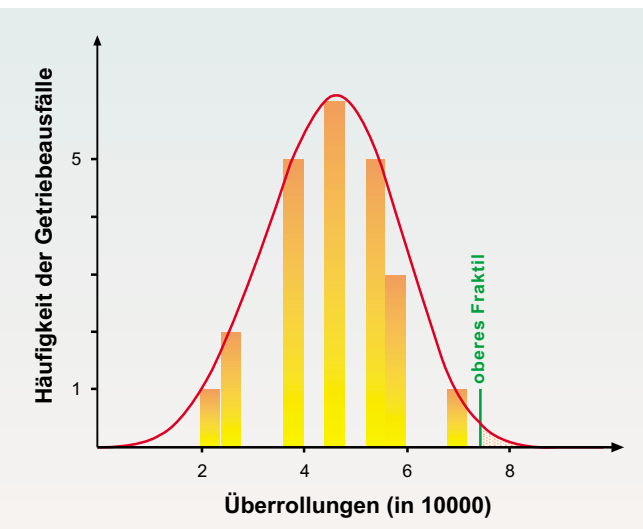
Die Wahrscheinlichkeit  $p$ , dass noch kein Ausfall bei gegebener Überrollungszahl  $t$  aufgetreten ist, lässt sich im Weibull-Modell durch die folgende Gleichung darstellen:

$$p(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\Theta} \right)^b \right]$$

Die Größen  $\varrho$  und  $b$  sind unbekannte Parameter, die als charakteristische Lebensdauer und Weibullsteigung den



*Abb. 5 und 6: Weibullverteilungen für zwei verschiedene Testreihen. Anhand der „ausgleichenden“ Kurven über den Säulen (Funktionen) läßt sich die Zahl der Getriebeumdrehungen (Überrollungen) schätzen, ab der es mit hoher Wahrscheinlichkeit zu einem Getriebebruch kommen kann. In diesem - für die Beurteilung des Getriebes - interessanten Bereich der Kurve (nach dem oberen Fraktile, schraffiert) sind Messungen äußerst zeit- und kostenintensiv.*



konkreten Prototyp charakterisieren sollen. Hohe Überrollungszahlen, die für die Qualitätskontrolle von besonderem Interesse sind, werden in der Weibullverteilung durch die oberen Bereiche der Kurve beschrieben, die durch die Fraktile charakterisiert werden (Abb. 5 u. 6, schraffierte Bereiche). Ein Fraktile kennzeichnet den kritischen Ausfallpunkt und umfasst den Wert (Überrollungszahl), bei dem die Wahrscheinlichkeit, dass noch kein Ausfall stattgefunden hat, einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit entspricht (im Bsp. 99%). Der kritische Ausfallpunkt  $t$  ist der Punkt, der gerade noch durch eine hohe „Überlebenswahrscheinlichkeit“ gekennzeichnet ist; die nächste Überrollung könnte zum Bruch führen.

den der asymptotischen Statistik ein symmetrischer Bereich um die Schätzung für das Fraktile, dessen Größe durch die Streuung der Schätzung bestimmt ist [2]. Die Qualität der Schätzung wird besser, je kleiner die Streuung wird. Dementsprechend verbessert sich auch der Vertrauensbereich. Damit reduziert sich das Problem der Fraktilschätzung und die Berechnung von Vertrauensbereichen für das Fraktile auf die Bestimmung geeigneter Schätzmethoden für die Parameter  $\varrho$  und  $b$  im Weibullmodell. Eine solche Schätzung aus den im Test ermittelten Ausfallzeitpunkten ist nicht unmittelbar möglich.

Bei den Ford-Werken erfolgte die Bestimmung dieser Parameter bisher durch

Standardverfahren der Parameterschätzung in statistischen Modellen, das in vielen Fällen zu optimalen Schätzungen für die unbekannt Parameter führt. Bei dem Schätzverfahren wird davon ausgegan-

## Zwei Schätzmethoden im Vergleich

gen, dass die Test-Daten im Modell mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit auftreten. Tritt z.B. bei 100 Zahnrädern, deren Oberflächen mit einem neuen Verfahren, dem „shot peening“ (Kugelstrahlen), behandelt wurden, in nur drei Fällen eine höhere Lebensdauer auf, so wird man die „Erfolgswahrscheinlichkeit“ für

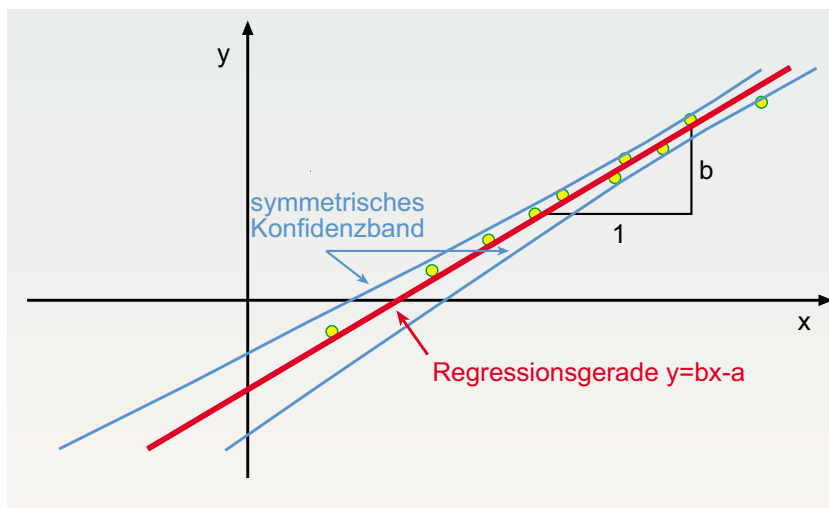


Abb. 7:  
Der kritische Ausfallzeitpunkt des Getriebes wurde bei den Ford-Werken bislang auf der Basis eines linearen Regressionsansatzes geschätzt: Aus der Steigung der Geraden ergibt sich die sog. Weibullsteigung  $b$ . Aus diesem Parameter  $b$  und dem Schnittpunkt der Geraden mit der  $y$ -Achse kann die Lebensdauer des Getriebes berechnet werden.  
(gelbe Punkte: Messwerte)

Formt man nun obige Gleichung nach  $t$  um [2], dann wird das Fraktile beschrieben, das die Überrollungszahl  $t$  liefert, bei der im Mittel noch 99% der Getriebe funktionstüchtig sind. Wünschenswert sind Getriebe oder Komponenten, die möglichst große obere Fraktile liefern, d.h. hohe Überrollungszahlen erreichen (s. Abb. 5). Die für einen gegebenen Prototyp charakterisierenden Parameter Lebensdauer  $\varrho$  und Weibullsteigung  $b$  sind nicht bekannt und müssen aus der Versuchsreihe von Überrollungszahlen mit Methoden der mathematischen Statistik geschätzt werden. Aus diesen Ergebnissen erhält man dann die gesuchten Schätzungen für die Fraktile.

Als der Bereich, in dem der kritische Ausfallpunkt mit einer Sicherheit von 95 % liegt, ergibt sich dann mit den Metho-

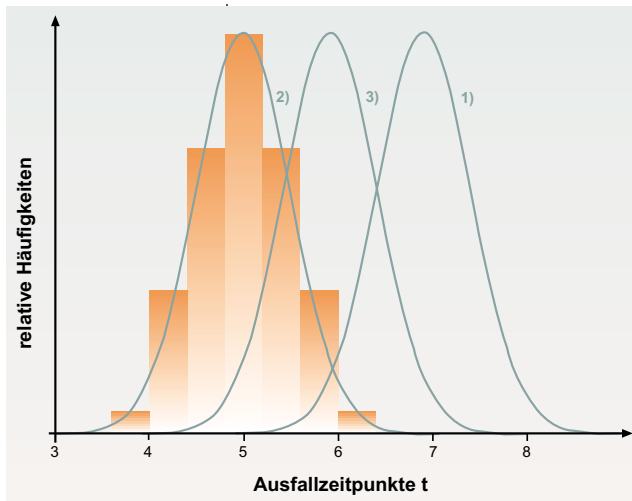
den einen linearen Regressionsansatz: Aus der Gleichung auf Seite 46 erhält man durch zweifaches Logarithmieren eine Geradengleichung der Form  $y = bx - a$  (s. Abb. 7). Die Steigung der Geraden ergibt dann der Parameter  $b$  - die Weibullsteigung. Der zweite gesuchte Parameter (Lebensdauer  $\varrho$ ) wird aus der Weibullsteigung und dem Schnittpunkt der Geraden mit der  $y$ -Achse berechnet. Die eher zufällig gewählte Schätzmethode mit einem linearen Regressionsansatz liefert dennoch bei wachsendem Stichprobenumfang eine beliebig genaue Vorhersage für die beiden gesuchten Parameter  $\varrho$  und  $b$  [2].

Eine andere Möglichkeit zur Schätzung der Parameter ist die Maximum-Likelihood-Methode (Methode der maximalen Wahrscheinlichkeit): Sie ist ein Stan-

die neue Behandlungsmethode relativ gering einschätzen. Liegen dagegen 97 erfolgreiche Testresultate vor, wird man den Erfolg der Behandlungsmethode höher einschätzen. Eine einfache Rechnung liefert in diesem Fall den Prozentsatz der Behandlungserfolge als Maximum-Likelihood-Schätzung für die Erfolgswahrscheinlichkeit.

Im Gegensatz zu diesem einfachen Beispiel, bei dem die optimale Schätzung auch ohne mathematische Theorie erfolgen kann, ergeben sich bei der Analyse der Getriebe-Lebensdauer mit Hilfe des Maximum-Likelihood-Verfahrens nicht ohne Weiteres Schätzungen für die Parameter  $b$  und  $\varrho$ . Voraussetzung für eine Vorhersage des kritischen Ausfallzeitpunktes sind zunächst numerische Berechnungen für die Bestimmung der Pa-

Abb. 8:  
Die „Alternativ-  
Methode“:  
Ihr Prinzip  
heißt maximale  
Annäherung  
der Glocken-  
kurven an das  
Histogramm.



parameter  $b$  und  $\alpha$  auf die hier im Einzelnen nicht eingegangen werden soll. Abb. 8 gibt dennoch einen Einblick in die Vorgehensweise, man erkennt das Prinzip dieser Schätzmethode: Gesucht ist eine möglichst „gute“ Annäherung an das Histogramm durch eine Glockenkurve (Normalverteilung). Verschiedene Parameter liefern verschiedene Glockenkurven. Die Maximalstelle der besten Näherung ergibt die Maximum-Likelihood-Schätzung für den Lageparameter (Erwartungswert) der Verteilung.

Bei wachsendem Stichprobenumfang liefert auch die Maximum-Likelihood-Methode eine beliebig genaue Schätzung für die unbekannt Parameter der Weibullverteilung [2].

Bei umfangreichen Testreihen führt sowohl der von der Ford Werke AG benutzte Regressionsansatz als auch die

Maximum-Likelihood-Methode zu präzisen Schätzungen für die oberen Fraktile. Ist dennoch ein Verfahren dem anderen vorzuziehen? Als Vergleichsmaß beider Schätzmethode bietet sich hier die Streuung an, denn die Quadratwurzel der Streuung bestimmt im Wesentlichen die Größe des Bereichs für den kritischen Ausfallpunkt. Je kleiner die Streuung, desto genauer ist die Schätzung.

Ein entscheidender Vorteil der Maximum-Likelihood-Methode ist ihre universelle Anwendbarkeit in der Statistik und die hieraus resultierenden breiten praktischen Einsatzmöglichkeiten. Während der vorgestellte Regressionsansatz in dieser Form nur für die Modellierung mit der Weibullverteilung anwendbar ist – er müsste jedes Mal neu formuliert werden, falls man eine andere statistische Verteilung nutzen wollte –, ist die

Maximum-Likelihood-Methode universell einsetzbar und daher auch leichter programmierbar.

Mit Methoden der asymptotischen Statistik konnte außerdem gezeigt werden [2], dass Schätzungen nach der Maximum-Likelihood-Methode eine wesentlich geringere Streuung aufweisen, als dies bei Zugrundelegung des Regressionsansatzes der Fall ist. Einen Vergleich beider Methoden zeigt Abb. 8: Zum Beispiel sind auf der Grundlage des Regressionsansatzes 11 Messungen nötig, um den kritischen Ausfallzeitpunkt mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, während nach der Maximum-Likelihood-Methode lediglich 3 Messungen durchgeführt werden müssen. Bei einer Wahrscheinlichkeit von 99 % zeigt

### Mit „ML-Methode“ nur noch ein Drittel des Versuchsaufwands

sich der Vorteil der ML-Methode noch deutlicher: lediglich 9 Messungen sind erforderlich, im Gegensatz zu 31 Messungen nach dem Regressionsansatz.

Bei den hohen Entwicklungskosten für einen Prototyp oder ein Getriebe ist es keine Frage mehr, dass die Datenauswertung für den Pascal-Test bei der Ford Werke AG inzwischen vom Regressionsverfahren auf die Maximum-Likelihood Methode umgestellt wurde.

Das in diesem Aufsatz vorgestellte Maximum-Likelihood-Verfahren zur Parameterschätzung der Weibullverteilung kann für eine Anwendung mit MS Excel VBA bei den Autoren angefordert werden.

Kontakt: holger.dette@ruhr-uni-bochum.de

#### Literatur:

- [1] D.R. Cox, D.V. Hinkley (1974): Theoretical Statistics; Chapman Hall, London.
- [2] C. Kozub (2000): Statistische Untersuchung von Lebensdauerversuchen eines Hand-schaltgetriebes bzw. einige seiner Komponenten auf verschiedenen Lastniveaus; Fakultät für Mathematik, Institut für Statistik.
- [3] H. Pruscha (1989): Angewandte Methoden der Mathematischen Statistik; B.G. Teubner, Stuttgart.
- [4] K.V. Bury (1975): Statistical Models in Applied Science; Wiley Series.

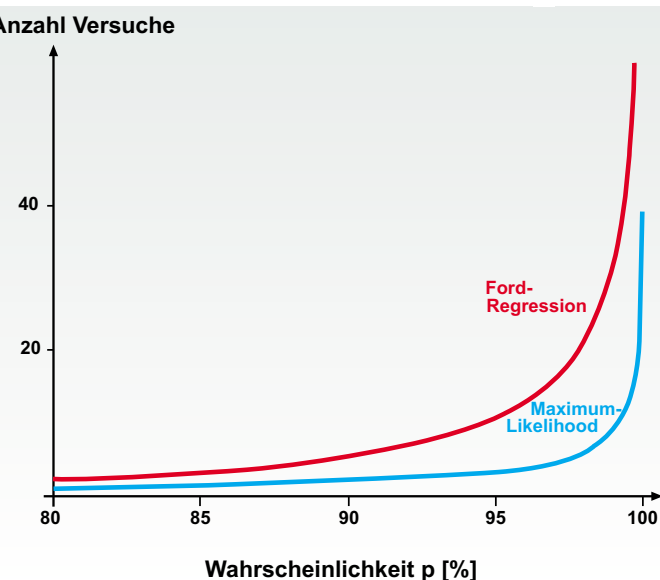


Abb. 9:  
Der Vergleich beider statistischer Verfahren spricht für sich: Je sicherer der Ausfallzeitpunkt vorhergesagt werden kann, desto weniger Messungen sind bei der ML-Methode (im Vergleich zur Ford-Regression) für die Vorhersage erforderlich.