Vorwort zur ersten Auflage

Der vorliegende zweite Teil unseres vierbändigen Lehrbuchs der Mathematik über den Stoff des Mathematik-Grundstudiums für Mathematiker, Physiker und Informatiker gibt das zweite Semester eines Kurses Mathematik I bis IV für Studenten der Physik und Geophysik an der Ruhr-Universität Bochum wieder. [1]) Wegen der zahlreichen Ergänzungen lässt sich der Band gleichermaßen für die Vorlesungen Lineare Algebra I und II im Mathematikstudium verwenden. Außerdem ist er wie schon der erste Teil über die Analysis einer reellen Veränderlichen als Nachschlagewerk und zur Weiterbildung für Lehrer und Schüler an höheren Lehranstalten geeignet.

Die Lineare Algebra ist neben der Analysis eine der Grundvorlesungen in der Mathematikausbildung. Im Gegensatz zu der mehr konkreten Betrachtungsweise in der Analysis betont sie stärker den axiomatischen Standpunkt. Sie hat ihre heutige Form erst in den letzten vierzig Jahren gewonnen. Hervorgegangen ist sie aus der Analytischen Geometrie, die vor allem die Geometrie des Anschauungsraumes und seiner projektiven Erweiterung mit linearen algebraischen Mitteln untersucht. Aus elementargeometrischen und physikalischen Vorstellungen entwickelte sich dabei langsam der abstrakte Vektorraumbegriff, wie man ihn zum Beispiel bei H. Weyl in seiner heute noch lesenswerten Monographie [25] findet. [2]) Diese geometrische Sicht der Linearen Algebra ist etwa in dem Lehrbuch „Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra“ von E. Schreier und E. Sperner (1931, 1935) dargestellt. Sie motiviert fast alle Bezeichnungen der Linearen Algebra, tritt jedoch heute mehr und mehr in den Hintergrund. Seit dem Aufkommen der Funktionalanalysis im ersten Viertel dieses Jahrhunderts bilden Funktionenräume ein weit größeres Anwendungsgebiet für lineare Methoden. Dabei kommen - selbst im endlichdimensionalen Fall – zu den algebraischen auch topologische Überlegungen hinzu. Heute lässt sich die Analysis (mehrerer Veränderlicher) ohne Lineare Algebra nicht mehr angemessen beschreiben.

Seit etwa 1940 hat schließlich N. Bourbaki in [1] die fundamentale Rolle der Linearen Algebra für die gesamte Algebra aufgezeigt und mit seinem konsequent axiomatischen Aufbau einen ungeheuren Einfluss auf die weitere Entwicklung ausgeübt.

---

[1]) Das letzte Kapitel wurde allerdings erst im darauffolgenden Semester vorgetragen.

[2]) Vektorräume wurden wohl zum ersten Mal 1888 von G. Peano definiert, der auf Vorarbeiten von H. Graßmann aufbaute, vgl. J. Dieudonné (Hg.): Geschichte der Mathematik 1700-1900, Braunschweig 1985.

Das vorliegende Buch versucht einen Kompromiss. Durch den Kreis der Adressaten bedingt, werden die beiden ersten der drei oben genannten Aspekte betont. Im Zentrum steht die Theorie der Vektorräume und ihrer Homomorphismen, wobei wir von Anfang an auch auf den unendlichdimensionalen Fall eingehen. [3]) Ferner wird die Theorie der linearen Differenzialgleichungssysteme als Beispiel für die algebraischen und auch die elementaren topologischen Methoden abgehandelt.

Im ersten und zweiten Kapitel stellen wir die Grundbegriffe aus der Theorie der Vektorräume und ihrer Homomorphismen zusammen. Wo es sich anbietet, gehen wir gleichzeitig auf entsprechende Begriffe aus der Gruppentheorie und vereinzelt der Theorie der Ringe und Algebren ein. Weitere Themen dieser Kapitel sind unter anderem die affine Geometrie, Restklassenbildung und Gruppenoperationen.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit Matrizen und Determinanten. Hier werden die fundamentalen Kalküle der Linearen Algebra entwickelt. Mit den Determinantenfunktionen werden außerdem die Orientierungen reeller Vektorräume sowie elementare Volumenformeln gewonnen.

Nach einem kurzen Abriss über Polynome betrachten wir im vierten Kapitel lineare Operatoren auf endlichdimensionalen Vektorräumen sowie deren Normalformen. Zentrale Begriffe dabei sind das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom eines Operators.

Das umfangreiche fünfte Kapitel behandelt vor allem reell-symmetrische und komplex-hermitesche Formen. Sie bilden die Grundlage für die Dualität, bei der Linearformen auf einem Vektorraum mit den Vektoren eben dieses Vektorraums dargestellt werden. Wichtige Spezialfälle sind die Skalarprodukte, die zusätzlich einen Abstand definieren. Wir beschreiben die orthogonalen und unitären Gruppen, im affinen Fall auch die Bewegungsgruppen. Weitere Stichworte sind Spektralsatz und Hauptachsentransformation. Als ein Beispiel für indefinite Formen besprechen wir ausführlicher die Lorentz-Formen und legen damit das Fundament für die Spezielle Relativitätstheorie.

Im letzten Kapitel über normierte Vektorräume treten topologische Hilfsmittel hinzu. [4]) Wir gehen nur auf die einfachsten Begriffe der Funktionalanalysis ein und behandeln Banach- und Hilbert-Räume, stetige lineare Abbildungen, die natürliche Topologie endlichdimensionaler Räume und den Spektralsatz für kompakte Operatoren. [5]) Als Anwendungen betrachten wir unter anderem die Theorie der Fourier-Reihen (einer Veränderlichen), die Exponentialabbildung, klassische Gruppen und ihre Lie-Algebren, aber auch einige wichtige numerische Verfahren der Linearen Algebra und zum Schluss lineare Differenzialgleichungssysteme (mit nicht notwendig konstanten Koeffizienten).

---

[3]) Interessante Vektorräume sind oft unendlichdimensional; endlichdimensionale Vektorräume treten dann als Unterräume oder Restklassenräume auf.

[4]) Sie sind im Anhang zusammengefasst und werden gründlicher im ersten Kapitel des dritten Bandes besprochen.

[5]) Im vierten Band wird die Funktionalanalysis fortgesetzt.

Den einzelnen Abschnitten sind zahlreiche Aufgaben beigefügt. Außerdem versuchen wir, den Stoff durch umfangreiches Beispielmaterial zu illustrieren. Wir erwähnen die Ausführungen über Elementarmatrizen und den Elementarteilersatz, die Pólyasche Abzählformel, die elektrischen Netzwerke (die immer wieder aufgegriffen werden) , kleine Schwingungen, endliche Bewegungsgruppen, kristallographische Gruppen und Lorentz-Gruppen jeweils für kleine Dimensionen, symplektische Formen und stochastische Matrizen.

Frau Chr. Maaßen hat das ursprüngliche Schreibmaschinenmanuskript angefertigt, und die Herren stud. math. T. Liedtke und P. Scherer haben mit ihr zusammen die Druckvorlagen im TEX-System erstellt. Außerdem hat uns Herr Dipl. Math. H.G. Rentzsch bei den Korrekturen geholfen. Ihnen allen gilt unser besonderer Dank für ihre außerordentlich geduldige und sorgfältige Arbeit. Schließlich danken wir dem BI-Wissenschaftsverlag und insbesondere Herrn H. Engesser für die Unterstützung und das Entgegenkommen bei der Herausgabe des Werkes.

Bochum, im Oktober 1989 Uwe Storch, Hartmut Wiebe

Vorwort zur zweiten Auflage

Die vorliegende zweite, nunmehr bei Spektrum Akademischer Verlag erscheinende Auflage unseres Lehrbuchs der Linearen Algebra ist gegenüber der ersten, im BI-Wissenschaftsverlag erschienenen, berichtigt und in mehreren Punkten erweitert worden. Hinzugefügt wurden ein kurzer Abschnitt über Projektive Räume sowie zwei längere Abschnitte über (reguläre) Randwertprobleme einer Veränderlichen, von denen der erste (Abschnitt 20.D) die allgemeine Theorie und der zweite (Abschnitt 20.E) Beispiele behandelt. Diese Probleme sind (von der Benutzung des Satzes von Arzelà-Ascoli einmal abgesehen) im Wesentlichen Probleme der Linearen Algebra und bilden überdies eine schöne Anwendung der Theorie der kompakten Operatoren.

Wie schon beim ersten Band haben wir bei der Neuauflage darauf geachtet, dass durch Beibehaltung der Nummerierungen beide Auflagen nebeneinander benutzt werden können. Allerdings haben sich am Schluss des Abschnitts 19.A einige Änderungen dadurch ergeben, dass bereits in Abschnitt 17.B der Satz von Hahn-Banach über die Existenz stetiger Linearformen neu aufgenommen wurde. Generell haben wir transfinite Schlüsse mit dem Zornschen Lemma freizügiger als bisher verwandt.

Bochum, im September 1997 Uwe Storch, Hartmut Wiebe

Inhaltsverzeichnis