Vorwort

Mit dem vorliegenden vierten Teil schließen wir unser Lehrbuch der Mathematik ab. Er stellt im Kern die Differenzial- und Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten dar und damit insbesondere (und zwar in den Paragraphen 1, 2, 8, 9 und 11) den Stoff des dritten Semesters der Analysis-Vorlesungen für Studierende der Mathematik sowie des dritten und vierten Semesters unserer Mathematik-Vorlesungen für Studierende der Physik und Geophysik. Darüber hinaus enthält er die Inhalte von Ergänzungsvorlesungen, die wir mit wechselnden Schwerpunkten für die Physiker und Geophysiker gehalten haben, und geht daher in manchen Punkten über das Grundstudium hinaus. Das Buch spiegelt auch persönliche Vorlieben der Autoren wider. Wir hoffen aber, dass es durch seine Vielfalt, die sich bereits im Inhaltsverzeichnis ablesen lässt, einen großen Kreis von Interessenten anspricht, darunter auch Studierende der Informatik, der Ingenieur- und Naturwissenschaften sowie Lehrende (und vielleicht auch Lernende) an höheren Schulen.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten stehen im Mittelpunkt dieses Bandes, wobei wir – soweit dies im gesteckten Rahmen möglich ist – auch komplexe Mannigfaltigkeiten betrachten. Bewusst beschränken wir uns nicht nur auf solche Mannigfaltigkeiten, die in Zahlenräumen liegen. Vielmehr folgen wir dem Standpunkt Riemanns, der in seiner programmatischen Göttinger Antrittsvorlesung „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" 1854 als erster das Konzept der abstrakten Mannigfaltigkeit, deren Punkte man nur lokal mit Koordinaten markieren kann, entwickelte und dabei durchaus eine Beschreibung unserer realen Welt im Auge hatte. Auch die moderne Physik, vor allem seit Einstein, erkennt in zunehmendem Maße die große Bedeutung des abstrakten Mannigfaltigkeitsbegriffs. Er zwingt, an Stelle des Kalküls von Anfang an die Geometrie in den Vordergrund zu rücken, und führt unter anderem, ausgehend vom Tangential- bzw. Kotangentialbündel, in natürlicher Weise zum heute zentralen Begriff des Vektorbündels. Im Allgemeinen achten wir (im reellen Fall) auf den Differenzierbarkeitsgrad, was gelegentlich lästig ist und vom Wesentlichen ablenken kann. Ohne großen Verlust kann der Leser sich auf den C^∞-Fall beschränken, sollte aber den analytischen (= C^ω-)Fall, der im Komplexen stets vorliegt, davon trennen.

In den ersten beiden Paragraphen stellen wir Grundbegriffe vor: (parakompakte) differenzierbare reelle und komplexe Mannigfaltigkeiten (auch mit Rand) und differenzierbare Abbildungen, Tangential- und Kotangentialvektoren und deren Bündel, und erläutern sie an zahlreichen Beispielen (etwa Sphären, projektive Räume, Graßmann-Mannigfaltigkeiten, Produkte, Graphen, Unter- und Quotientenmannigfaltigkeiten usw.). Der Leser sollte sich daraus beizeiten einen großen Fundus aneignen, um daran neue Begriffe üben zu können. Zentrale Bedeutung haben die Flüsse als integrierte Vektorfelder und die Lie-Klammer.

Eine Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen und ihrer Lie-Algebren bis zu den Lieschen Hauptsätzen über den Zusammenhang zwischen Gruppen und Algebren auf der Grundlage der Exponentialabbildung findet sich in §3 mit Ergänzungen in §4. Insbesondere beweisen wir die Äquivalenz der Kategorie der Lie-Algebren und der Kategorie der einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen. Dies gibt Gelegenheit, Überlagerungen zu konstruieren und die große Bedeutung der Fundamentalgruppen, die auch später immer wieder zu Tage tritt, herauszustellen. Wir geben die Grundlagen der Darstellungstheorie kompakter reeller (und komplexer reduktiver) Lie-Gruppen und ihrer Algebren unter Benutzung Haarscher Maße, gehen aber auf Einzelheiten nur exemplarisch ein, indem wir die u.a. in der Physik wichtigen Darstellungen der Algebren $\mathfrak{o}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{su}_3(\mathbb{C})$ bzw. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ beschreiben. Standardbeispiele, die immer wieder betrachtet werden, bilden die klassischen Lie-Gruppen und ihre Algebren, wobei allerdings die symplektischen Gruppen etwas zu kurz kommen. Als physikalische Illustration des Mannigfaltigkeitsbegriffs behandeln wir die klassische Mechanik mit dem d'Alembertschen Prinzip sowie das Noethersche Theorem über den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen.

Gegenstand von §5 sind Beweise der folgenden drei Sätze: Zerlegung der Eins, Satz von Sard und Existenz von Quotientenmannigfaltigkeiten. Vor allem die Zerlegung der Eins ist ein für das ganze Buch unentbehrliches Hilfsmittel. Die Quotientensätze werden bei der Konstruktion von Bahnenräumen benutzt.

Die Paragraphen 6 und 7 bilden einen Einschub über Multilineare Algebra. Wie in der Linearen Algebra des zweiten Bandes beschränken wir uns auf Vektorräume. In §6 konstruieren wir zunächst über beliebigen Grundkörpern Tensorprodukte und Tensoralgebren, gehen aber auch auf Tensorprodukte normierter $\mathbb{K}$-Vektorräume ein und demonstrieren am Beispiel der nuklearen und der Hilbert-Schmidt-Operatoren auf Hilbert-Räumen die Probleme, die sich aus dem Vergleich verschiedener Normen ergeben können. Der wesentliche Inhalt von §7 ist der Graßmann-Kalkül. Er ist für die Analysis auf Mannigfaltigkeiten unverzichtbar, braucht aber nicht in allen Einzelheiten ständig gegenwärtig zu sein. Wichtig sind ein Verständnis der Graßmann-Algebren endlichdimensionaler Vektorräume und die Fortsetzung der Dualität zwischen solchen Vektorräumen auf ihre Graßmann-Algebren. Ergänzend behandeln wir symmetrische Algebren und Clifford-Algebren. Letztere gewinnen auch in der Physik immer größere Bedeutung und liefern u.a. konkrete Darstellungen der Spin-Gruppen. Leser, die Grundkenntnisse über Tensorprodukte und äußere Produkte endlichdimensionaler Vektorräume besitzen, können die §§6,7 ohne weiteres überschlagen.

Paragraph 8 dient als Vorbereitung für den folgenden Paragraphen und bringt die elementaren Aspekte der Theorie der Vektorbündel, u.a. ihre Klassifikation durch Kohomologiemengen bzw. -gruppen, den Basiswechsel sowie die Standardbegriffe und -operationen der Linearen Algebra für Vektorbündel.

Der in voller Allgemeinheit erst von E. Cartan entwickelte Differenzialformenkalkül mit der äußeren Ableitung sowie der de Rham-Komplex stehen im Zentrum von §9. Wir behandeln den Satz von Poincaré über das Verschwinden der de Rham-Kohomologie für kontrahierbare Mannigfaltigkeiten und geben einen elementaren Beweis des Satzes von de Rham, soweit er die erste Homologie bzw. Kohomologie betrifft. Beim Berechnen einfacher Beispiele führen wir die Mayer-Vietoris-Sequenz ein und nehmen dies zum Anlass, allgemein die langen exakten Homologie- bzw. Kohomologiesequenzen der Homologischen Algebra herzuleiten. Außerdem gehen wir ausführlich auf den anfangs oft als schwierig empfundenen Begriff der Orientierung ein und diskutieren Besonderheiten für komplexe Mannigfaltigkeiten.

Der Begriff des Zusammenhangs geht auf T. Levi-Civita zurück, der ihn für das Tangentialbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit entwickelte. Die Beschränkung auf diese spezielle Situation hat den Nachteil, dass die Grundideen über vertikale Ableitungen und horizontale Liftungen und auch der Kalkül weniger durchsichtig sind. Eine natürliche Verallgemeinerung bieten die linearen Zusammenhänge auf Vektorbündeln, die bereits Basiswechsel gestatten, aber die Hauptzusammenhänge ausschließen, die ihrerseits zum Verständnis der linearen Zusammenhänge wichtig sind. An den Anfang setzen wir daher – entgegen der historischen Entwicklung – den allgemeinen Zusammenhangsbegriff für Submersionen (nach Ch. Ehresmann), der an Anschaulichkeit, Einfachheit und Anwendbarkeit nichts zu wünschen übrig lässt. Nach Darstellung des Kalküls in Abschnitt 10.A (u.a. Christoffel-Symbole, Horizontaltransport) wird der Krümmungstensor eingeführt, der sich in natürlicher Weise aus dem Begriff der lokalen Integrabilität ergibt und sich als zentraler Begriff der ganzen Theorie erweist. Zum Beispiel lässt sich die Integrabilititätsbedingung im Satz von Frobenius aus der Theorie der partiellen Differenzialgleichungen als Verschwinden des Krümmungstensors interpretieren, wodurch sich dieser Satz fast von selbst versteht. In den übrigen beiden Abschnitten von §10 wird der Reihe nach auf lineare, affine und schließlich auf Levi-Civita-Zusammenhänge spezialisiert. Dabei gehen wir auf Geodätische, Jacobi-Felder und die Exponentialabbildung ein. Nur noch in §14 werden Teile von §10 vorausgesetzt.

Paragraph 11 enthält die Integrationstheorie auf reellen Mannigfaltigkeiten mit den klassischen Integralsätzen von Gauß und Stokes. Die Integration über (messbare) Dichten, also Schnitte im Maßbündel (das sich im Fall orientierter Mannigfaltigkeiten mit dem Determinantenbündel des Kotangentialbündels identifiziert) wird in einfacher Weise auf die Lebesgue-Integration in reellen Zahlenräumen gemäß Band 3 zurückgeführt. Den Satz von Stokes sehen wir als Spezialfall des evidenten Gaußschen Divergenzsatzes, wobei als Ergänzung auch der Fall singulärer Ränder betrachtet wird. Erste Anwendungen in Abschnitt 11.C beziehen sich auf die de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger. Wir definieren Fundamentalklasse und Abbildungsgrad.

Mit dem Beweis der Poincaré-Dualität und der Künneth-Formeln führen wir das Studium der de Rham-Kohomologie in §12 fort. Der Hauptsatz dieses Paragraphen ist der allgemeine Satz von de Rham über die Gleichheit von de Rham- und singulärer Kohomologie. Er steht an der Wiege der Differenzialtopologie oder – wie heute vielfach gesagt wird – der Geometrischen Analysis, in der sich topologische und analytische Methoden verbinden. Wir beweisen dazu die Grundtatsachen der Algebraischen Topologie über die singuläre (Ko-)Homologie, wobei der Leser hier erstmals intensiv mit Methoden der Homologischen Algebra konfrontiert wird. Die Berechnung der singulären als simpliziale (Ko-)Homologie für triangulierte Räume und die topologische Klassifikation der kompakten Flächen schließen den Paragraphen ab.

In §13 werden verschiedenartige Dinge behandelt: zunächst ausführlich die klassische Theorie der harmonischen Funktionen, sodann – ebenfalls recht ausführlich – die (für die Tensorrechnung namengebende) Elastizitätstheorie, die Grundgleichungen der Hydrodynamik und die Maxwellschen Gleichungen. Letztere werden auch im relativistischen Rahmen mit Hilfe des elektromagnetischen Feldstärketensors diskutiert. Die Theorie der Lie-Gruppen wird durch die Beschreibung Haarscher Maße und allgemeiner invarianter Volumenformen auf homogenen Mannigfaltigkeiten ergänzt.

Paragraph 14 gibt eine Einführung in die Differenzialgeometrie, wobei der Levi-Civita-Zusammenhang von Beginn an benutzt wird und auch indefinite metrische Tensoren zugelassen werden. In der Hauptsache geht es um ein Verständnis des Krümmungstensors und der Schnittkrümmung, die immer wieder neue und überraschende Aspekte offenbaren. Wir bringen dazu den Satz von Gauß-Bonnet, berechnen die Krümmung eingebetteter Mannigfaltigkeiten (Theorema egregium), diskutieren ausführlich die klassischen Modelle der Räume konstanter Krümmung und gehen auf konforme Abbildungen und Gruppen ein (u.a. Satz von Liouville). Der Paragraph schließt mit dem Satz von Hopf-Rinow und der Klassifikation der vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung, die eines der schönsten Ergebnisse der Grundlagen der Geometrie ist und überdies von hohem erkenntnistheoretischen Interesse.

Das Kapitel V mit den Paragraphen 15,16 und 17 führt die Theorie der holomorphen Funktionen auf Riemannschen Flächen fort, die bereits in Band 3 begonnen wurde. Themen sind unter anderem: isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen (Laurent-Entwicklung), der allgemeine Residuensatz, der Begriff der meromorphen Funktion, der Zusammenhang zwischen Divisoren und holomorphen Geradenbündeln und verzweigte Überlagerungen. Wir formulieren den Satz von Riemann-Roch und bringen seinen Beweis in §16 unter der Voraussetzung, dass die betrachteten kompakten Riemannschen Flächen und Vektorbündel genügend viele meromorphe Funktionen bzw. Schnitte besitzen, also algebraisch sind. Diese Bedingung ist stets erfüllt, was wir allerdings nicht beweisen. In konkreten Situationen liegen Riemannsche Flächen ohnehin meist als (komplex-projektive) algebraische Kurven vor. Wir geben dazu eine Fülle von Beispielen. Der Beweis des Satzes von Riemann-Roch für algebraische Kurven und Bündel ist unter Benutzung der Theorie der verzweigten holomorphen Überlagerungen aus Abschnitt 15.C und des (in der Dimension 1) sehr einfachen Cousin-Komplexes wieder eine Übung in Homologischer Algebra. Der Serresche Dualitätssatz liefert die klassische Formulierung. Ausführlich wird das Geschlecht g als fundamentale Invariante kompakter Riemannscher Fläche diskutiert. Im Fall $g=1$, der heute wieder sehr aktuell ist, handelt es sich um die 1-dimensionalen kompakten Tori oder elliptischen Kurven, in deren Theorie wir bis hin zur Klassifikation mit der j-Invarianten einführen. Man versteht damit auch die klassischen elliptischen Integrale viel besser. Die Klassifikation aller Riemannschen Flächen mit Hilfe des Großen Uniformisierungssatzes wird in §17 beschrieben; bewiesen und an einer Reihe von Beispielen illustriert wird jedoch nur der Kleine Uniformisierungssatz für ebene Gebiete.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Funktionalanalysis. In §18 behandeln wir lokal konvexe Räume, insbesondere Fréchet-Räume, und ihre Dualitätstheorie. Als Beispiele zur Dualität beweisen wir den Rieszschen Darstellungssatz für Maße (der in der Operatorentheorie benutzt wird) und schließen einen Grundkurs über Distributionen mit einem Blick auf die moderne Theorie der partiellen Differenzialgleichungen an. §19 ist der Theorie der Operatoren in Banach- und Hilbert-Räumen (u.a. Fredholm-Operatoren) gewidmet und gipfelt in den Spektralsätzen für beschränkte und unbeschränkte normale Operatoren.

Wie in den ersten drei Bänden ergänzen zahlreiche (allerdings nicht ganz gleichmäßig verteilte) Beispiele und Aufgaben den Text.

Mit den vier Bänden unseres Lehrbuchs hoffen wir, den Studierenden nicht nur eine tragfähige Basis für ihr Studium sondern in den Ergebnissen und Ausblicken auch Anregungen für eine anschließende vertiefte Beschäftigung mit einzelnen Themen gegeben zu haben und darüber hinaus den Lehrenden eine Hilfe bei der Gestaltung ihrer Vorlesungen.

Wir haben nachträglich das größtenteils bereits fertige Manuskript auf die Regeln der neuen Rechtschreibung umgestellt und bitten um Nachsicht, wenn dies nicht immer vollständig gelungen ist. Frau Chr. Maaßen danken wir für die Hilfe bei der Erstellung eines Teils der Druckvorlagen. Die Herren Dr. H. Brenner, Dr. Th. Gawlick und Dr. A. Kaiser haben uns beim Lesen der Korrekturen unterstützt. Ihnen gilt unser besonderer Dank. Herrn Kaiser verdanken wir auch diejenigen Abbildungen, die mit Hilfe des Programms geomview angefertigt wurden. Schließlich danken wir dem Spektrum-Verlag für seine Geduld.

Bochum, im Juli 2000 Uwe Storch, Hartmut Wiebe

Uwe.Storch@ruhr-uni-bochum.de
Hartmut.Wiebe@ruhr-uni-bochum.de

Inhaltsverzeichnis

V Funktionentheorie

§15 Isolierte Singularitäten

§16 Beispiele und Ergänzungen

§17 Uniformisierung

VI Funktionalanalysis

§18 Lokal konvexe Räume

§19 Spektraltheorie