Vorwort

Wir legen hiermit den dritten Teil unseres vierbändigen Lehrbuchs der Mathematik für das Mathematik-Grundstudium der Mathematiker, Physiker und Informatiker vor. Er gibt das dritte Semester eines Kurses Mathematik I bis IV für Studenten der Physik und Geophysik an der Ruhr-Universität Bochum wieder. Im Mathematik-Studium entspricht dies der Vorlesung Analysis II und dem ersten Teil der Analysis III. [1]) Darüber hinaus hoffen wir, dass der Band auch für Studierende und Dozenten anderer Fachrichtungen sowie für Lehrer an höheren Schulen nützlich ist.

Einen wesentlichen Gesichtspunkt bei der Auswahl des Stoffes bildeten die Anforderungen der parallel laufenden Mechanik-Vorlesung der Physiker, wobei wir freilich nicht allen Wünschen gerecht werden konnten. Der Grundidee der klassischen Mechanik entsprechend, die zeitliche Entwicklung eines mechanischen Systems als Kurve im Konfigurationsraum zu beschreiben, hat die Untersuchung von Kurven besonderes Gewicht. So haben der Paragraph über Kurvenintegrale und das Kapitel über dynamische Systeme bereits in diesem Band ihren Platz gefunden. Die Grundbereiche liegen immer in Zahlenräumen – der Mannigfaltigkeitsbegriff kommt erst im vierten Band.

Den Kern des vorliegenden Bandes bilden die Kapitel II und IV über Differenziation bzw. Integration bei mehreren Veränderlichen. Zur Beschreibung der Differenzierbarkeit, die wir nur für endlichdimensionale Zahlenräume betrachten, benutzen wir konsequent die in der Linearen Algebra eingeführten Begriffe und Methoden für eine möglichst koordinatenfreie Darstellung. [2]) Gleichzeitig lassen sich auf diese Weise die geometrischen Grundvorstellungen direkter umsetzen. Wo es sinnvoll war – ohne allzu spezielle Fragen der komplexen Analysis zu berühren –, wird die Differenzierbarkeit auch im Komplexen verfolgt. Insbesondere findet man, entgegen unserem ursprünglichen Plan, den Cauchyschen Integralsatz und seine fundamentalen Folgerungen für die Theorie der holomorphen Funktionen bereits in diesem Band als Beispiele zur Theorie der Kurvenintegrale.

Wie die Lineare Algebra stellt auch die Topologie wichtige Sprechweisen und Hilfsmittel für die Analysis zur Verfügung. Neben den Grundlagen der mengentheoretischen Topologie in Kapitel I bringen wir daher in Kapitel II Anfänge der Homotopie- und Homologie-Theorie von Kurven, soweit sie für eine angemessene Behandlung der Kurvenintegrale gebraucht werden.

Die Integrationstheorie wird als Teil der Maßtheorie verstanden. Ein wesentlicher Teil der Darstellung ist natürlich dem Borel-Lebesgue-Maß und dem darauf aufbauenden Lebesgue-Integral gewidmet. Die grundlegenden Sätze über das Lebesgue-Integral sind (verglichen mit dem Riemann-Integral) allgemeiner und übersichtlicher; überdies

---

[1]) Das Sommersemester bietet der Analysis II weniger Raum als das Wintersemester dem dritten Teil der Physikervorlesung.

[2]) Analysis in unendlichdimensionalen Räumen ist anders kaum möglich.

lassen sie sich oft leichter beweisen. Mit der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie ist auch die Grundlage für die Behandlung der Stochastik in Kapitel VI gelegt. Zusammen mit den vorbereitenden Paragraphen über diskrete Wahrscheinlichkeitsräume aus Band 1 gibt dieses Kapitel etwa den Inhalt einer einsemestrigen Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik wieder.

Zu Einzelheiten des Inhalts sei bemerkt:

Kapitel I bringt nach der Einführung metrischer und allgemeiner topologischer Räume die fundamentalen Begriffe des Zusammenhangs und der Kompaktheit. Sie sollten auch Anwendern der Mathematik geläufig sein. Von ähnlicher Bedeutung ist der in § 3 behandelte Begriff der Vollständigkeit, wobei auch Funktionenräume in natürlicher Weise auftreten.

Das umfangreiche Kapitel II beginnt mit der Untersuchung differenzierbarer Kurven in reellen Zahlenräumen, auf die im Weiteren viele Aussagen der Differenzial- und Integralrechnung zurückgeführt werden. Unter anderem werden Wege in klassischen Gruppen studiert, die nicht nur für die Mechanik starrer Körper sondern auch für das Verständnis der infinitesimalen Eigenschaften von Vektorfeldern und ihren Flüssen (vgl. Abschnitt 8.C) grundlegend sind. Ausführlich werden Krümmungen von Kurven einschließlich der Frenetschen Formeln behandelt.

Im Mittelpunkt von § 5 steht das totale Differenzial als *der* Differenziationsbegriff. Der Hauptsatz des Kapitels ist der Satz über implizite Funktionen mit seinen Folgerungen für lokale und globale Diffeomorphismen. Die Untersuchung differenzierbarer Koordinatensysteme bereitet das Rechnen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in Band 4 vor. Auch der analytische Fall wird durchgehend berücksichtigt.

Mit den Differenzialformen behandeln wir einen derjenigen Begriffe, in denen sich die zentrale Idee der Infinitesimalrechnung, von lokalen Gegebenheiten auf globales Verhalten zu schließen, besonders prägnant ausdrückt. In diesem Band besprechen wir nur Formen ersten Grades und Kurvenintegrale. Eingehend diskutiert wird das Grundproblem der Theorie, welche Differenzialformen exakt sind, d.h. eine Stammfunktion besitzen, oder anders gesagt, welche Vektorfelder Potenzialfelder sind. Lokal kann dies (mit den so genannten Integrabilitätsbedingungen) leicht beantwortet werden. Die Hindernisse für die Existenz globaler Stammfunktionen sind dann topologischer Natur. In natürlicher Weise treten dabei Fundamental- und (erste) Homologie-Gruppen sowie topologische Überlagerungen auf. Diese werden unabhängig vom Ausgangsproblem in den Abschnitten 7.C und 7.D untersucht, wobei letzterer eine Fülle klassischer Beispiele enthält, die wichtige „Mannigfaltigkeiten" zumindest topologisch vorstellen. Weitere Themen sind die Funktionentheorie bis einschließlich des Satzes von Montel und ein allgemeiner Residuensatz für geschlossene Formen auf ebenen Gebieten. Der Zusammenhang zwischen Vektorfeldern und 1−Formen in euklidischen Vektorräumen ist der Inhalt von Abschnitt 7.H, wo neben den Gradientenfeldern und den Zirkulationsformen auch die Wirbelform curl L und – in der Dimension 3 – das Rotationsfeld rot L zu einem Vektorfeld L beschrieben werden.

In Kapitel III beschäftigen wir uns mit dynamischen Systemen, d.h. Systemen gewöhnlicher Differenzialgleichungen erster Ordnung, wobei wir den geometrischen Gesichtspunkt mit der Diskussion der Flüsse zu Vektorfeldern betonen. Die Geometrie eines solchen Flusses wird wesentlich durch die Variationsgleichungen beschrieben, die zu den bereits in Band 2 untersuchten linearen Differenzialgleichungen gehören. Sie liefern ferner eine wichtige Methode zur Behandlung von kleinen Störungen dynamischer Systeme. Außerdem gehen wir kurz auf die numerische Behandlung von Differenzialgleichungssystemen ein und bringen das Verfahren von Runge-Kutta. In § 9 geben wir eine Einführung in die Ljapunow-Stabilität dynamischer Systeme. Die Euler-Lagrangeschen Differenzialgleichungen der Variationsrechnung behandeln wir in § 10. Bei Benutzung so genannter kanonischer Koordinaten ergeben sich die kanonischen Gleichungen der Hamiltonschen Mechanik als erste Beispiele zur symplektischen Geometrie.

Das Thema von Kapitel IV ist die Maß- und Integrationstheorie. Den Ausgangspunkt bildet das Problem, Mengen in reellen Zahlenräumen ein Volumen zuzuordnen. Man kommt so in natürlicher Weise zum Begriff des Maßraums. Gleich zu Beginn werden die grundlegenden Sätze über die Eindeutigkeit und die Fortsetzung von Maßen (im Anschluss an C. Carathéodory) sowie die Existenz des Produktmaßes bewiesen. Die Borel-Lebesgue-Maße bilden die zentralen Beispiele der Theorie. Das Integral über eine (positive) Funktion auf einem Maßraum wird in § 14 wie im Elementarunterricht als Volumen unter dem Graphen definiert. Wir führen sodann die L^p-Räume und insbesondere den Hilbert-Raum L^2 der quadratintegrierbaren Funktionen auf einem Maßraum ein.

Kapitel V ist eine Ergänzung zur Integrationstheorie und behandelt Fourier-Transformationen von Maßen und Funktionen auf Zahlenräumen als Grundlage für die Harmonische Analyse. Insbesondere werden Konvergenzaussagen für Maße und ihre Fourier-Transformierten (etwa über schwache und vage Konvergenz von Maßen) bewiesen, die u.a. in der Wahrscheinlichkeitstheorie von Bedeutung sind. Die Erweiterung der Fourier-Transformation auf quadrat-integrierbare Funktionen und der Satz von Plancherel werden ausführlich diskutiert. Als Variante der Fourier-Transformation besprechen wir die Laplace-Transformation.

Das abschließende Kapitel VI ist der Stochastik gewidmet. In § 19 über Wahrscheinlichkeitstheorie werden nach Einführung der Grundbegriffe zunächst charakteristische Beispiele, insbesondere (auch ausgeartete) Normalverteilungen in beliebigen endlichen Dimensionen behandelt. Der Paragraph schließt mit dem Zentralen Grenzwertsatz, der die Ubiquität der Normalverteilungen aufzeigt. Im weniger theoretischen Paragraphen 20 gehen wir auf einige statistische Verfahren ein. Wir behandeln Konfidenzbereiche, grundlegende Tests (u.a. Chi-Quadrat-Test, F-Test) und die Regression als Anwendung der Gaußschen Idee der kleinsten Fehlerquadrate.

Wir haben versucht, die dargestellte Theorie überall durch mehr oder weniger umfangreiche, teilweise bis zu den numerischen Einzelheiten ausgeführte Beispiele zu ergänzen. Diese dienen nicht nur zur Einübung und Illustration, sondern sollen ein Interesse für Fragestellungen erwecken, die über den eigentlichen Lehrstoff hinausgehen. Sie erfordern gelegentlich eine etwas intensivere Mitarbeit des Lesers; viele davon eignen sich für Proseminarvorträge. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang etwa die

Passagen über Hausdorff-Abstand, Winkelgeschwindigkeit, Weltlinien im Minkowski-Raum, harmonische Funktionen, orthogonale und konforme Koordinaten, Fundamentalgruppen klassischer topologischer Räume, Windungszahlen und den Residuensatz in ebenen Gebieten, Verschlingungszahlen, den Deformationstensor, Bewegungen auf der rotierenden Erde, Störungen harmonischer Schwingungen, Volterra-Systeme und Lorenz-Systeme, Brachystochrone und Kettenlinie, Geodätische und Fermatsches Prinzip, das Banach-Tarski-Paradoxon, Hausdorff-Dimension, die isodiametrische Ungleichung, den Brouwerschen Fixpunktsatz, die Irrationalität von $\zeta(3)$, orthogonale Polynome, Gaußsche Quadraturformeln, Gravitationspotenziale, Hankel-Transformation und Bessel-Funktionen, das Abtasttheorem, Fehlerfortpflanzung, . . . Den einzelnen Abschnitten sind in der Regel zahlreiche Aufgaben beigefügt, die umfangreiches Material etwa für Tafelübungen bereitstellen und gelegentlich den Stoff auch inhaltlich ergänzen.

Wir danken Frau Chr. Maaßen für die Anfertigung des ursprünglichen Schreibmaschinenmanuskripts und Herrn Dr. H. G. Rentzsch für seine Hilfe bei dessen Korrektur, ferner Tobias Storch und vor allem Herrn cand. phys. Hagen Storch für die außerordentlich sorgfältige und mühevolle Herstellung der Druckvorlagen im TEX-System; letzterem gilt auch unser Dank für kritische Bemerkungen zum Inhalt. Von großem Wert waren Diskussionen mit den Physikern Prof. Dr. K. Schindler und Prof. Dr. D. Wagner an unserer Universität. Dem B.I.-Wissenschaftsverlag, insbesondere Frau S. Bartels und seinem Leiter Herrn H. Engesser sind wir für die technische Unterstützung bei der Anfertigung der Zeichnungen, vor allem aber für das Interesse an unserer Arbeit und die stets bewiesene, fast grenzenlose Geduld zu besonderem Dank verpflichtet.

Bochum, im Juli 1993 Uwe Storch, Hartmut Wiebe

Nachtrag zum Vorwort

Der vorliegende korrigierte Nachdruck des dritten Bandes unseres Lehrbuchs der Mathematik ist eine berichtigte und erweiterte Fassung. Größere Änderungen gibt es in Abschnitt 6.C, wo jetzt Untermannigfaltigkeiten in Zahlenräumen eingeführt werden, in Abschnitt 7.C, in dem der Fundamentalgruppenkalkül ausführlicher behandelt und insbesondere der Satz von Seifert und van Kampen nun vollständig bewiesen wird, und schließlich in Abschnitt 7.G, der u. a. einen recht einfachen Beweis des Primzahlsatzes bringt. Wir haben aber darauf geachtet, dass die Nummerierungen weitgehend beibehalten worden sind. Herrn Dr. A. Rüdinger von Spektrum Akademischer Verlag gilt unser besonderer Dank für seine Bemühungen, auch den dritten Band unseres Lehrbuchs im neuen Gewand erscheinen zu lassen.

Bochum, im Juli 2010 Uwe Storch, Hartmut Wiebe

Uwe.Storch@ruhr-uni-bochum.de
Hartmut.Wiebe@ruhr-uni-bochum.de
http://www.rub.de/ffm/Lehrstuehle/Storch/Storch_Wiebe_LdM.html

Inhaltsverzeichnis