LOKALE VERZWEIGUNGSTHEORIE

VORLESUNGEN ÜBER KOMMUTATIVE ALGEBRA

VON

PROF. G. SCHEJA

UND

PROF. U. STORCH

WINTERSEMESTER 1973/74

SCHRIFTENREIHE DES MATHEMATISCHEN INSTITUTES
DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. UE.
NR. 5

V O R W O R T

Im Frühjahr 1974 haben wir am Mathematischen Institut der Universität Freiburg i.Ue. im Lehrprogramm des troisième cycle Vorlesungen über Verzweigungstheorie in der Kommutativen Algebra gehalten. Der Stoff dieser Vorlesungen ist in dem vorliegenden Schriftenreiheheft wiedergegeben. Einzelne Dinge sind dabei ausführlicher dargestellt worden als dies im Rahmen der Vorlesungen möglich war. Außerdem erschien es uns angebracht, die Darstellung inhaltlich so zu ergänzen, daß eine gewisse Vollständigkeit erreicht wurde.

Um die Lesbarkeit des Textes zu erhöhen, haben wir uns bemüht, möglichst einfache Beweise zu geben, auch für grundlegende Hilfssätze der Kommutativen Algebra, die vielfach in der Literatur nicht unmittelbar zugänglich sind. Deshalb genügen auch Grundkenntnisse der Algebra und Kommutativen Algebra zum Lesen des Textes.

Unter einem Ring verstehen wir stets einen kommutativen Ring mit Einselement. Endlichkeitsvoraussetzungen - wie beispielsweise "noethersch" - geben wir in jedem Einzelfalle gesondert an. Ist $h : A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen und $\mathfrak{b}$ ein Ideal in B , so bezeichnen wir das Urbild $h^{-1}(\mathfrak{b})$ kurz mit $A \cap \mathfrak{b}$. Das Jacobsonradikal eines Ringes A wird mit $\mathfrak{m}_A$ bezeichnet.

Wir beabsichtigen, diesem Heft ein zweites über vollständige Durchschnitte und Residuentheorie folgen zu lassen.

Unser Dank gilt den Herren Holmann, Kleisli und Schmid für die Einladung nach Freiburg und die Ausrichtung unserer Vorlesungen. Ferner danken wir den Zuhörern für viele Anregungen, und Frau Plänker, Bochum, für das Herstellen der Druckvorlagen.

Bochum, Juni 1974. G.S.,U.S.

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL I: DER BEGRIFF DER VERZWEIGUNG

§1. Der Kählersche Differentialmodul

In diesem Paragraphen geben wir kurz die wichtigsten Eigenschaften des Kählerschen Differentialmoduls an. Eine ausführliche Darstellung findet man in der Ausarbeitung über "Differentialmoduln lokaler analytischer Algebren" in der Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Fribourg, Nr. 2 (1969/70).

Seien B ein Ring - mit Ring meinen wir hier und im folgenden stets einen kommutativen Ring mit einem Einselement - und M ein (unitärer) B-Modul. Eine Derivation von B in M ist eine additive Abbildung $\delta: B \longrightarrow M$, für die die Produktregel $\delta(bc) = c\delta(b) + b\delta(c)$, $b,c \in B$, gilt. Ist $\delta: B \longrightarrow M$ eine Derivation, so ist Kern δ ein Unterring von B. Für einen beliebigen Unterring B' von B ist δ genau dann B'-linear, wenn $B' \subseteq \text{Kern}\,\delta$ ist.

Ist A ein Ring, so verstehen wir unter einer A-Algebra einen Ring B mit einem (unitären) Ringhomomorphismus $\alpha: A \longrightarrow B$. Eine Derivation $\delta: B \longrightarrow M$ der A-Algebra B in einen B-Modul M ist eine A-Derivation, wenn δ A-linear ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha(A) \subseteq \text{Kern}\,\delta$ ist. Die A-Derivationen von B in M bilden einen B-Untermodul von M^B, der mit $\text{Der}_A(B,M)$ bezeichnet wird. Eine universelle A-Derivation von B ist eine A-Derivation

$$B \xrightarrow{d=d_A^B} D_A(B)$$

mit folgender Eigenschaft: Ist $\delta: B \longrightarrow M$ eine beliebige A-Derivation, so gibt es genau einen B-Modulhomomorphismus $h: D_A(B) \longrightarrow M$ mit $\delta = hd_A^B$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d_A^B"] \arrow[dr] & D_A(B) \arrow[d, dashed, "h"] \\ & M \end{tikzcd}$$

ist also kommutativ. Eine universelle A-Derivation von B ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Der universelle Differentialmodul $D_A(B)$ wird als B-Modul von dem A-Untermodul

$d_A^B(B)$ der totalen Differentiale erzeugt: $D_A(B) = Bd_A^B(B)$. Für jeden B-Modul M sind die Moduln $\mathrm{Der}_A(B,M)$ und $\mathrm{Hom}_B(D_A(B),M)$ kanonisch isomorph. Insbesondere ist der Modul der A-Derivation^en von B in sich isomorph zum Dualmodul $\mathrm{Hom}_B(D_A(B),B) = D_A(B)^*$. Ist B eine $\tilde{A}$-Algebra mit dem Strukturhomomorphismus $\beta: \tilde{A} \longrightarrow B$ und gilt $\alpha(A) \subseteq \beta(\tilde{A}) \subseteq \mathrm{Kern}\ d_A^B$, so ist $d_{\tilde{A}}^B = d_A^B$.

Für jede A-Algebra B existiert die universelle A-Derivation. Zunächst gilt:

<u>(1.1) Aussage</u>. Ist $\mathfrak{I}$ ein Ideal der A-Algebra B und existiert d_A^B , so existiert auch $d_A^{B/\mathfrak{I}}$ und es ist $D_A(B/\mathfrak{I}) = D_A(B)/Bd_A^B(\mathfrak{I})$.

Der <u>Beweis</u> ergibt sich aus dem Studium des folgenden kommutativen Diagrammes, in dem M' ein $(B/\mathfrak{I})$-Modul und $\delta': B/\mathfrak{I} \longrightarrow M'$ eine A-Derivation ist:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "d_A^B"] \arrow[d] \arrow[drr, "\delta"'] & & D_A(B) \arrow[d] \arrow[dll, "h"] \\
B/\mathfrak{I} \arrow[rr, dashed, "d_A^{B/\mathfrak{I}}"] \arrow[dr, "\delta'"'] & & D_A(B)/Bd_A^B(\mathfrak{I}) \arrow[dl, dashed, "h'"] \\
& M' &
\end{tikzcd}$$

Dabei hat man zu beachten, daß $D_A(B)/Bd_A^B(\mathfrak{I})$ ein $(B/\mathfrak{I})$-Modul ist. Dies folgt aus der Gleichheit

$$Bd_A^B(\mathfrak{I}) = d_A^B(\mathfrak{I}) + \mathfrak{I}D_A(B) ,$$

die man unmittelbar aus der Produktregel herleitet.

<u>(1.2) Korollar</u>. Die kanonische Sequenz

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \xrightarrow{\bar{d}} D_A(B)/\mathfrak{I}D_A(B) \longrightarrow D_A(B/\mathfrak{I}) \longrightarrow 0$$

von $(B/\mathfrak{I})$-Homomorphismen ist exakt, wobei $\bar{d}$ der von $d_A^B|\mathfrak{I}$ induzierte Homomorphismus ist.

Daß $d_A^B|\mathfrak{I}$ eine $(B/\mathfrak{I})$-lineare Abbildung $\bar{d} : \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow D_A(B)/\mathfrak{I}D_A(B)$ induziert, erhält man aus den beiden folgenden Tatsachen: Es ist $d_A^B(\mathfrak{I}^2) \subseteq \mathfrak{I}D_A(B)$ wegen der Produktregel; für $b \in B$, $f \in \mathfrak{I}$ ist
$d_A^B(bf) = fd_A^B(b) + bd_A^B(f) \equiv bd_A^B(f)$ modulo $\mathfrak{I}D_A(B)$.

<u>Bemerkung 1</u> . Aus (1.2) folgt: Ist f_j , $j \in J$, ein Erzeugendensystem des Ideals $\mathfrak{I}$, so ist

$$D_A(B/\mathfrak{I}) = (D_A(B)/\mathfrak{I}D_A(B))/\sum_{j \in J} (B/\mathfrak{I})df_j .$$

<u>(1.3) Aussage</u>. Für jede A-Algebra B existiert die universelle A-Derivation d_A^B .

<u>Beweis</u>. Sei b_i , $i\in I$, ein Algebra-Erzeugendensystem von B über A . Dann ist B eine Restklassenalgebra der Polynomalgebra $A[X_i]_{i\in I}$. Wegen (1.1) genügt es, den Fall $B = A[X_i]_{i\in I}$ zu betrachten. Dann setzen wir $D_A(B) := B^{(I)}$ und $d_A^B(f) := \langle \partial_i f \rangle_{i\in I}$, wobei $\partial_i : B \longrightarrow B$ die partielle Ableitung nach der Unbestimmten X_i ist. d_A^B ist eine A-Derivation, und $D_A(B)$ ist ein freier B-Modul mit der Basis dX_i , $i\in I$. Ist $\delta : B \longrightarrow M$ eine beliebige A-Derivation und wird der B-Homomorphismus $h : D_A(B) \longrightarrow M$ durch $h(dX_i) := \delta(X_i)$ definiert, so stimmen die beiden A-Derivationen δ und hd auf dem Algebra-Erzeugendensystem X_i , $i\in I$, überein und sind folglich gleich. Somit ist d_A^B universell.

<u>Bemerkung 2</u> . Aus dem Beweis von (1.3) und der Bemerkung 1 folgt: Für $B := A[X_i]_{i\in I} / \sum_{j\in J} A[X_i] f_j$ ist

$$D_A(B) \cong B^{(I)} / \sum_{j\in J} B \langle \partial_i f_j \rangle_{i\in I} .$$

Ist b_i , $i\in I$, ein A-Algebra-Erzeugendensystem der A-Algebra B, so ist $D_A(B) = \sum_{i\in I} Bd_A^B b_i$. Insbesondere ist $D_A(B)$ ein endlicher B-Modul, wenn B eine A-Algebra endlichen Typs ist, d.h. ein endliches A-Algebra-Erzeugendensystem besitzt.

Mittels der einhüllenden Algebra läßt sich die universelle Derivation auf eine andere Weise beschreiben. Sei wieder B eine A-Algebra. $B^e := B \otimes_A B$ sei die <u>einhüllende Algebra</u> von B über A und $\mu : B^e \longrightarrow B$ die "Multiplikation" $b \otimes c \longmapsto bc$, die ein A-Algebrahomomorphismus ist. Ist b_i , $i\in I$, ein A-Algebra-Erzeugendensystem von B , so wird $I := \text{Kern}\,\mu$ von den Elementen $b_i \otimes 1 - 1 \otimes b_i$, $i\in I$, erzeugt. Bezüglich μ fassen wir B stets als B^e-Algebra auf. Dann ist der B-Modul I/I^2 isomorph zu $B \otimes_{B^e} I$. Die Abbildung

$$d : B \longrightarrow I/I^2 \text{ mit } b \longmapsto [b \otimes 1 - 1 \otimes b]$$

ist eine A-Derivation, wie man unmittelbar verifiziert.

<u>(1.4) Aussage</u>. $d : B \longrightarrow I/I^2$ ist eine universelle A-Derivation von B .

<u>Beweis</u>. Sei $\delta : B \longrightarrow M$ eine beliebige A-Derivation. Die Abbildung $B \times B \longrightarrow M$ mit $(b,c) \longmapsto c\delta(b)$ ist A-linear. Sei $\tilde{h} : B^e \longrightarrow M$

die A-lineare Abbildung mit $\tilde{h}(b \otimes c) = c\delta(b)$. Es wird I^2 additiv von Elementen der Form $(f_1 \otimes f_2)(b \otimes 1 - 1 \otimes b)(c \otimes 1 - 1 \otimes c)$ erzeugt. Offenbar verschwindet $\tilde{h}$ für solche Elemente. Folglich induziert $\tilde{h}$ eine A-lineare Abbildung $h : I/I^2 \longrightarrow M$. Es ist trivialerweise $hd = \delta$. Weiter ist $h([(c \otimes 1)(b \otimes 1 - 1 \otimes b)]) = \delta(bc) - b\delta c = ch([b \otimes 1 - 1 \otimes b])$, so daß h auch B-linear ist. Daß h durch die Gleichung $\delta = hd$ eindeutig bestimmt ist, folgt aus $I/I^2 = Bd(B)$. -

Die Beweise der folgenden allgemeinen Aussagen sind einfach und seien dem Leser überlassen.

<u>(1.5.) Aussage</u>. Seien B eine A-Algebra, C eine $\tilde{A}$-Algebra und $\varphi: B \longrightarrow C$ ein $(A,\tilde{A})$-Homomorphismus. Dann gibt es genau einen B-Homomorphismus $D(\varphi) : D_A(B) \longrightarrow D_{\tilde{A}}(C)$, für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & C \\ {\scriptstyle d_A^B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{\tilde{A}}^C} \\ D_A(B) & \xrightarrow{D(\varphi)} & D_{\tilde{A}}(C) \end{array}$$

kommutativ ist, und eine natürliche exakte Sequenz

$$C \otimes_B D_A(B) \longrightarrow D_{\tilde{A}}(C) \longrightarrow D_B(C) \longrightarrow 0$$

von C-Homomorphismen. Dabei ist der Homomorphismus $C \otimes_B D_A(B) \longrightarrow D_{\tilde{A}}(C)$ durch $c \otimes \omega \longmapsto cD(\varphi)\omega$ gegeben.

<u>(1.6) Direkte Limiten</u>. Seien (A_i, φ_{ij}) ein direktes Sytem von Ringen und Ringhomomorphismen, (B_i, ψ_{ij}) ein direktes System von A_i-Algebren und (A_i, A_j)-Homomorphismen und $A := \varinjlim A_i$, $B := \varinjlim B_i$. Dann ist

$$\varinjlim d_{A_i}^{B_i} : B \longrightarrow \varinjlim D_{A_i}(B_i)$$

die universelle A-Derivation von B .

<u>(1.7) Tensorprodukte</u>. Seien B,C zwei A-Algebren. Dann ist

$$\begin{aligned} (d_A^B \otimes C, B \otimes d_A^C) : B \otimes_A C &\longrightarrow D_A(B) \otimes_A C \oplus B \otimes_A D_A(C) \\ b \otimes c &\longmapsto (d(b) \otimes c \ , \ b \otimes d(c)) \end{aligned}$$

die universelle A-Derivation von $B \otimes_A C$.

<u>(1.8) Direkte Produkte</u>. $B_1, \dots, B_n$ seien A-Algebren. Dann ist

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n d_A^{B_i} : \prod_{i=1}^n B_i &\longrightarrow \prod_{i=1}^n D_A(B_i) \\ (b_1, \dots, b_n) &\longmapsto (d(b_1), \dots, d(b_n)) \end{aligned}$$

die universelle A-Derivation der Produktalgebra $\prod_{i=1}^{n} B_i$.

(1.9) Grundringerweiterung. Seien A',B zwei A-Algebren. Dann ist

$$A' \otimes d_A^B : A' \otimes_A B \longrightarrow A' \otimes_A D_A(B)$$

die universelle A'-Derivation von $A' \otimes_A B$.

(1.10) Nenneraufnahme. Seien B eine A-Algebra, S ein multiplikatives System in B und $\delta : B \longrightarrow M$ eine A-Derivation. Dann ist $\delta_{(S)} : B_S \longrightarrow M_S$ mit

$$\delta_{(S)}(b/s) := (s\delta b - b\delta s)/s^2$$

eine A-Derivation von B_S in M_S . Es ist

$$d_A^{B_S} = d_{A_{A\cap S}}^{B_S} = (d_A^B)_{(S)} \quad .$$

Bemerkung 3 . Als wichtigen Spezialfall von (1.10) hat man die folgende Aussage: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in B und $\mathfrak{q}$ das Urbild in A , so ist

$$D_A(B)_{\mathfrak{p}} = D_A(B_{\mathfrak{p}}) = D_{A_{\mathfrak{q}}}(B_{\mathfrak{p}}) \quad .$$

Daraus ergibt sich beispielsweise: Ist $K := k(X_1,\ldots,X_n)$ der Funktionenkörper in n Variablen über dem Körper k , so ist $dX_1,\ldots,dX_n$ eine K-Basis von $D_k(K)$. Ist $K = k(x_1,\ldots,x_n)$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung des Körpers k mit den erzeugenden Elementen $x_1,\ldots,x_n$, so ist $dx_1,\ldots,dx_n$ ein K-Erzeugendensystem von $D_k(K)$.

Bemerkung 4 . Für gewisse Klassen von A-Algebren B läßt sich $D_A(B)$ in einfacher Weise über einen universell-endlichen Differentialmodul berechnen. Wir skizzieren dies hier nur und verweisen zu den Einzelheiten auf das eingangs erwähnte Schriftenreihe-Heft.

Sei B eine A-Algebra. Eine A-Derivation $d^e : B \longrightarrow D_A^e(B)$ mit Werten in einem endlichen B-Modul $D_A^e(B)$ heißt universell-endlich, wenn es zu jeder A-Derivation $\delta : B \longrightarrow M$ mit Werten in einem endlichen B-Modul M genau einen B-Homomorphismus $h : D_A^e(B) \longrightarrow M$ gibt mit $\delta = hd^e$. Die meisten der Bemerkungen über $D_A(B)$, die wir in diesem Paragraphen gemacht haben, treffen m.m. auch für $D_A^e(B)$ zu, z.B. (1.1) , (1.2) , Bemerkung 1 . Hingegen existiert $D_A^e(B)$ nicht immer. Bei analytischen k-Algebren über bewerteten Körpern k , die per def. endlich über

Ringen konvergenter oder formaler Potenzreihen $k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ über k sind, existiert $D_k^e(B)$ stets; man sieht dies mit einer Überlegung wie in (1.3) unter zusätzlichen Konvergenz-Untersuchungen.

Ist $D_A(B)$ endlicher B-Modul, so ist offenbar $D_A(B) = D_A^e(B)$. Der Modul $D_A^e(B)$ läßt sich nun oft einfach berechnen! Betrachten wir beispielsweise analytische k-Algebren A , B , wobei B eine A-Algebra ist. Die Berechnung von $D_k^e(B)$ ist ein endliches Problem. Dann ist weiter $D_A^e(B) = D_k^e(B)/Bd^eA$, und auch diese Berechnung von $D_A^e(B)$ aus $D_k^e(B)$ ist ein endliches Problem. Man kann hingegen die ganze Prozedur nicht konkret mit $D_k(B)$ durchführen, da $D_k(B)$ i.a. kein endlicher B-Modul ist.

§2. Der Begriff der Verzweigung

Definition. Eine A-Algebra B heißt unverzweigt (über A), wenn $D_A(B) = 0$ ist. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ der A-Algebra B heißt unverzweigt (über A), wenn $B_{\mathfrak{p}}$ über A unverzweigt ist.

Eine A-Algebra B ist genau dann unverzweigt, wenn $Der_A(B,M)=0$ für jeden B-Modul M ist. Ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq B$ ist wegen $D_A(B_{\mathfrak{p}}) = D_A(B)_{\mathfrak{p}}$ genau dann verzweigt (d.h. nicht unverzweigt), wenn $\mathfrak{p}$ im Träger $Tr(D_A(B))$ des B-Moduls $D_A(B)$ liegt. Die Menge der Primideale $\mathfrak{p} \subseteq B$, die über A verzweigt sind, heißt der Verzweigungort von B über A . Er wird mit Vzw_A^B bezeichnet. Es ist

$$Vzw_A^B = Tr_B(D_A(B)) .$$

Ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal in A , so ist $D_{A_{\mathfrak{q}}}(B_{\mathfrak{q}}) = D_A(B_{\mathfrak{q}}) = D_A(B)_{\mathfrak{q}}$. Die Menge der Primideale $\mathfrak{q} \subseteq A$, für die $B_{\mathfrak{q}}$ über $A_{\mathfrak{q}}$ verzweigt ist bezeichnen wir mit vzw_A^B . Es ist dann

$$vzw_A^B = Tr_A(D_A(B)) .$$

Genau dann ist $\mathfrak{q} \in vzw_A^B$, wenn es ein $\mathfrak{p} \in Vzw_A^B$ mit $\mathfrak{p} \cap A \subseteq \mathfrak{q}$ gibt. Da ein Modul genau dann der Nullmodul ist, wenn sein Träger verschwindet, sind die folgenden Aussagen äquivalent: (1) B ist über A unverzweigt. (2) Es ist $Vzw_A^B = \emptyset$. (3) Es ist $vzw_A^B = \emptyset$. Die Bedingungen (2) und (3) lassen sich noch etwas abschwächen. B ist bereits dann über A unverzweigt, wenn Vzw_A^B bzw. vzw_A^B kein maximales Ideal von B bzw. kein maximales Ideal von A enthält.

Sei C ein Ring. Die Menge der Primideale von C ist das Spektrum Spek C von C . Spek C ist ein topologischer Raum bezüglich der Zariski-Topologie, deren abgeschlossene Mengen die Mengen der Form $V(E) := \{\mathfrak{r} \in \text{Spek } C : E \subseteq \mathfrak{r}\}$ sind, wobei E eine Teilmenge von C ist. Sei nun wieder B eine A-Algebra. Es ist $Vzw_A^B \subseteq$ Spek B und $vzw_A^B \subseteq$ Spek A . Zu dem Ringhomomorphismus $A \longrightarrow B$ gehört die stetige Abbildung Spek B $\longrightarrow$ Spek A , die jedem Primideal $\mathfrak{p} \subseteq B$ den Durchschnitt mit A(genauer: das Urbild von $\mathfrak{p}$ in A) zuordnet. Unter dieser Abbildung wird Vzw_A^B in vzw_A^B abgebildet. Ist B ganz über A , so ist diese Abbildung $Vzw_A^B \longrightarrow vzw_A^B$ wegen des going-up-Theorems sogar surjektiv.

(2.1) Aussage. Sei $D_A(B)$ ein endlicher B-Modul. Dann ist

$$Vzw_A^B = V(\text{Ann}_B D_A(B)) = V(\mathfrak{f}_o^B(D_A(B))) \ .$$

Mit $\mathfrak{f}_o^B(D_A(B))$ ist dabei das o-te Fittingideal des B-Moduls $D_A(B)$ bezeichnet. Wir erinnern an die Konstruktion des i-ten Fittingideals $\mathfrak{f}_i^B(M)$, $i \geq 0$, eines beliebigen endlichen B-Moduls M : Man wähle ein endliches Erzeugendensystem $x_1,\dots,x_n$ von M . Mit $U \subseteq B^n$ sei der B-Modul der Relationen dieser Elemente bezeichnet. Ist $f_j = \langle b_{ij} \rangle_{1 \leq i \leq n}$, $j \in J$, ein Erzeugendensystem von U , so wird $\mathfrak{f}_i^B(M)$ erzeugt von den Determinanten der(n-i)-reihigen quadratischen Untermatrizen von $\langle b_{ij} \rangle_{1 \leq i \leq n, j \in J}$. Die so gewonnenen Ideale sind unabhängig von der Wahl der f_j (das ist leicht zu sehen), aber auch unabhängig von der Wahl des Erzeugendensystems $x_1,\dots,x_n$ von M (was etwas schwieriger zu beweisen ist).

Beweis von (2.1). Da $D_A(B)$ voraussetzungsgemäß endlich ist, gilt für ein $\mathfrak{p} \in$ Spek B die Gleichheit $\text{Ann}_{B_\mathfrak{p}}(D_A(B)_\mathfrak{p}) = (\text{Ann}_B D_A(B))_\mathfrak{p}$. Ferner ist $D_A(B)_\mathfrak{p} \neq 0$ genau dann, wenn $\text{Ann}_{B_\mathfrak{p}}(D_A(B)_\mathfrak{p}) \neq B_\mathfrak{p}$ ist, wenn also $(\text{Ann}_B D_A(B))_\mathfrak{p} \neq B_\mathfrak{p}$ ist. Dies ist aber äquivalent mit $\text{Ann}_B D_A(B) \subseteq \mathfrak{p}$. Dies beweist die erste Gleichung von (2.1). Die zweite Gleichung ergibt sich aus dem folgenden bekannten Hilfssatz: Ist M ein B-Modul mit einem Erzeugendensystem aus n Elementen, so ist

$$(\text{Ann}_B M)^n \subseteq \mathfrak{f}_o^B(M) \subseteq \text{Ann}_B M \ .$$

Hierbei ist die erste Inklusion trivial, und die zweite beweist man mit der Cramerschen Regel.

Bemerkung 1. Unter den Voraussetzungen von (2.1) gilt auch:

$$\mathrm{vzw}_A^B = V(\mathrm{Ann}_A D_A(B)) \ .$$

Ist nämlich $\omega_1,\ldots,\omega_n$ ein Erzeugendensystem von $D_A(B)$ als B-Modul und ist $D' := \sum_{i=1}^{n} A\omega_i \subseteq D_A(B)$, so ist offenbar $\mathrm{Tr}_A D_A(B) = \mathrm{Tr}_A D'$ und $\mathrm{Ann}_A D_A(B) = \mathrm{Ann}_A D'$.

(2.2) Aussage. Sei $D_A(B)$ ein endlicher B-Modul. Genau dann ist B über A unverzweigt, wenn folgendes gilt: Ist $\mathfrak{M}$ ein maximales Ideal in B und ist $\mathfrak{m} := A \cap \mathfrak{M}$, so ist $B_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{M}}$ unverzweigt über $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$.

Beweis. Nach dem Lemma von Krull-Nakayama ist $D_A(B)$ genau dann gleich dem Nullmodul, wenn für alle maximalen Ideale $\mathfrak{M} \subseteq B$ die $(B_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{M}})$-Moduln $D_A(B)_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{m}D_A(B)_{\mathfrak{M}}$ gleich 0 sind. Nach (1.10) und (1.9) ist aber $D_A(B)_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{m}D_A(B)_{\mathfrak{M}} = D_{A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(B_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{M}})$.

(2.3) Korollar. Sei B eine endliche A-Algebra (d.h. B sei als A-Modul endlich erzeugt). Dann ist B über A genau dann unverzweigt, wenn $B/\mathfrak{m}B$ über $A/\mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$ unverzweigt ist.

Beweis. Weil B ganz über A ist, ist $\mathfrak{m} := A \cap \mathfrak{M}$ ein maximales Ideal in A , wenn $\mathfrak{M}$ ein maximales Ideal in B ist. Nun folgt die Behauptung aus (2.2).-

Aus (1.4) folgt, daß eine A-Algebra B genau dann unverzweigt ist, wenn $I = I^2$ ist, wobei I der Kern der Multiplikation $\mu: B \otimes_A B \longrightarrow B$ ist. Ist I ein endlich erzeugtes Ideal, so ist $I = I^2$ äquivalent damit, daß I ein direkter Summand von $B \otimes_A B$ ist, d.h. von einem (eindeutig bestimmten) idempotenten Element erzeugt wird. Um dies einzusehen, betrachte man etwa das Fittingideal $\mathfrak{f}_0^{B^e}(I)$. Wegen $I = I^2$ ist $B = \mathfrak{f}_0^{B}(I/I^2) = \mu(\mathfrak{f}_0^{B^e}(I))$, also $I + \mathfrak{f}_0^{B^e}(I) = B^e$, woraus wegen $\mathfrak{f}_0^{B^e}(I) \subseteq \mathrm{Ann}_{B^e} I$ sogar die direkte Summenzerlegung $B^e = I \oplus \mathfrak{f}_0^{B^e}(I)$ folgt (und übrigens $\mathfrak{f}_0^{B^e}(I) = \mathrm{Ann}_{B^e} I)$.
Daß I direkter Summand von B^e ist, läßt sich auch dadurch ausdrücken, daß B ein projektiver B^e-Modul ist. Damit ist bewiesen:

(2.4) Aussage. Seien B eine A-Algebra und I der Kern der Multiplikation $B \otimes_A B \longrightarrow B$. Ist I endlich erzeugt, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) B ist unverzweigt über A .
(2) B ist ein projektiver B^e-Modul.
(3) I ist ein direkter Summand von B^e (als B^e-Modul).

Im folgenden geben wir einige Vererbungsgesetze für die Unverzweigtheit an.

(2.5) Grundringerweiterung. Ist B über A unverzweigt, so ist $A' \otimes_A B$ über A' unverzweigt für jede A-Algebra A' . Ist umgekehrt $A' \otimes_A B$ unverzweigt über A' und ist A' eine treu-flache A-Algebra, so ist B über A unverzweigt.

Beweis. Nach (1.9) ist $D_{A'}(A' \otimes_A B) = A' \otimes_A D_A(B)$, woraus die Behauptung folgt. Es sei daran erinnert, daß eine A-Algebra A' treu-flach ist, wenn A' als A-Modul flach ist und für einen A-Modul M genau dann $A' \otimes_A M = 0$ ist, wenn $M = 0$ ist.

(2.6) Transitivität der Unverzweigtheit. Seien B eine A-Algebra und C eine B-Algebra. Ist B über A unverzweigt und C über B unverzweigt, so ist C über A unverzweigt.

Beweis. Nach (1.5) hat man die exakte Sequenz

$$C \otimes_B D_A(B) \longrightarrow D_A(C) \longrightarrow D_B(C) \longrightarrow 0 .$$

Nach Voraussetzung sind $D_B(C)$ und $C \otimes_B D_A(B)$ Nullmoduln. Dann ist auch $D_A(C) = 0$.

(2.7) Aussage. Seien B_i Unteralgebren der A-Algebra B und $B = A[B_i; i \in I]$. Sind die B_i , $i \in I$, unverzweigt über A , so auch B .

Beweis. Es ist $B = \varinjlim B_j$, wobei B_j die Unteralgebren von B durchläuft, die von jeweils endlich vielen der B_i erzeugt werden. Dann ist $D_A(B) = \varinjlim D_A(B_j)$ nach (1.6). Wir können also annehmen, daß I endlich ist. Dann ist B homomorphes Bild von $\tilde{B} := \bigotimes_{i \in I} B_i$. Wegen (1.7) ist $\tilde{B}$ unverzweigt über A , und wegen (1.1) ist dann auch B über A unverzweigt.

Bemerkung 2. Aus (2.7) folgt sofort: Ist B eine A-Algebra, so gibt es eine größte A-Unteralgebra B' von B , die unverzweigt über A ist. Sei B_i , $i \in I$, die Familie der unverzweigten Unteralgebren von B . Dann ist wegen (2.7) auch $\bigcup_{i \in I} B_i$ eine Unteralgebra und zwar ebenfalls eine unverzweigte. Diese ist dann B'. B' heißt die unverzweigte Hülle von A in B . Es ist $B' \subseteq \mathrm{Kern}(d_A^B)$, im allgemeinen ist diese Inklusion echt. Analog zeigt man, daß zu jeder Familie $\mathfrak{P}_j$, $j \in J$, von Primidealen in A eine größte A-Unteralgebra B" in B existiert, für die $D_A(B''\mathfrak{q}_j) = 0$ ist für alle $j \in J$.

Betrachten wir schließlich noch einige einfache Beispiele:

(1) Ist $k \subseteq K$ eine separabel algebraische Körpererweiterung, so ist K über k unverzweigt.

Nach (2.7) können wir zum Beweis annehmen, daß $K = k[x] \cong k[X]/(\alpha)$ ist, wobei α das Minimalpolynom von x ist. Dann ist $D_k(K) = K/K\alpha'(x)$ nach §1 , Bemerkung 1 . Weil x separabel über k ist, ist $\alpha'(x) \neq 0$, also $D_k(K) = 0$. Es ist $K = k[x]$ sogar genau dann separabel über k , wenn $D_k(K) = 0$ ist; dieser Schluß liefert noch das folgende:

(2) Ist $k \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung, so ist K genau dann unverzweigt über k , wenn K separabel über k ist (vgl. §3, (3.1)).

Ist nämlich K nicht separabel über k , so gibt es einen Körper k' mit $k \subseteq k' \subsetneq K$ und $K = k'[y]$, wobei y über k' inseparabel ist. Dann ist aber $D_{k'}(K)$ und somit auch $D_k(K)$ von 0 verschieden.

(3) Ist k ein Körper und $\bar{k}$ der algebraische Abschluß von k , so ist $\bar{k}$ über k unverzweigt.

Im Fall char k = 0 folgt dies aus (1). Ist char $k = p > 0$ und ist $x \in \bar{k}$, so ist $x = y^p$ mit $y \in \bar{k}$ und somit $dx = dy^p = pdy^{p-1} = 0$, woraus $D_k(\bar{k}) = 0$ folgt. Eine algebraische Körpererweiterung kann also unverzweigt sein, ohne separabel zu sein.

(4) Ist $k \subseteq K$ eine nicht endliche, separabel algebraische Körpererweiterung, so ist K über k nach Beispiel (1) unverzweigt. Jedoch ist K in diesem Falle kein projektiver Modul über $K^e := K \otimes_k K$. Man kann also in (2.4) auf die endliche Erzeugbarkeit von I nicht ohne weiteres verzichten!

Zum Beweis nehmen wir an, daß K über K^e projektiv ist. Dann ist der Kern I der Multiplikation $\mu: K^e \longrightarrow K$ direkter Summand von K^e als K^e-Modul und wird somit von einem (idempotenten) Element z erzeugt. Es gibt einen über K endlichen Körper $\tilde{K}$ mit $k \subseteq \tilde{K} \subseteq K$ derart, daß z zum kanonischen Bild von $\tilde{K}^e \longrightarrow K^e$ gehört, wobei $\tilde{K}^e := \tilde{K} \otimes_k \tilde{K}$ ist. Bezeichne $\tilde{I}$ den Kern der Multiplikation $\tilde{\mu}: \tilde{K}^e \longrightarrow \tilde{K}$. Da $\mu \circ (\tilde{K}^e \longrightarrow K^e) = \tilde{\mu}$ ist, hat man $\tilde{I}K^e \subseteq I$; außerdem gehört z zum Bild von $\tilde{I}$. Insgesamt folgt $\tilde{I}K^e = I$. Das bedeutet nun, daß $K^e/\tilde{I}K^e = K^e/I = K$ ein Körper ist.

Andererseits ist $\tilde{I}K^e$ das von den $b \otimes 1 - 1 \otimes b$, $b \in \tilde{K}$, in K^e erzeugte Ideal, woraus $K^e/\tilde{I}K^e = K \otimes_{\tilde{K}} K$ folgt. Nach Voraussetzung ist $K \neq \tilde{K}$. Wie man mit einer $\tilde{K}$-Basis von K leicht bestätigt, besitzt die Multiplikation $K \otimes_{\tilde{K}} K \longrightarrow K$ einen Kern $\neq 0$. Daher kann $K \otimes_{\tilde{K}} K$ kein Körper sein. Widerspruch!

§3. Klassische Beschreibung der Unverzweigtheit

Wir beginnen mit zwei Lemmata über Algebren über einem Körper.

(3.1) Lemma. Sei B eine endliche Algebra über dem Körper k . Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) B ist unverzweigt über k .

(2) B ist reduziert (d.h. B hat keine von 0 verschiedenen nilpotenten Elemente), und die Restekörper von B sind separabel über k .

(3) Für jede Körpererweiterung k' von k ist $k' \otimes_k B$ reduziert.

Beweis. Wir erinnern zunächst an folgende Aussage: Ist C eine endliche Algebra über einem Körper K , so besitzt C nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{M}_1,..,\mathfrak{M}_n$ und die kanonische Abbildung $C \longrightarrow \prod_{i=1}^n C_{\mathfrak{M}_i}$ ist bijektiv. Daß C nur endlich viele maximale Ideale hat, ist klar. Sind $\mathfrak{M}_1,..,\mathfrak{M}_n$ diese maximalen Ideale, so ist $\mathfrak{M}_1 \cap ... \cap \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_1 ... \mathfrak{M}_n$ nilpotent und endlich erzeugt, also $\mathfrak{M}_1^r .. \mathfrak{M}_n^r = 0$ für ein $r \geq 1$. Dann ist nach dem Chinesischen Restsatz $C \longrightarrow \prod_{i=1}^n C/\mathfrak{M}_i^r$ bijektiv. Es ist aber

$$C_{\mathfrak{M}_i} = C_{\mathfrak{M}_i}/\mathfrak{M}_1^r..\mathfrak{M}_1^r C_{\mathfrak{M}_i} = C_{\mathfrak{M}_i}/\mathfrak{M}_i^r C_{\mathfrak{M}_i} = C/\mathfrak{M}_i^r .$$

Wir beweisen die Implikationen $(1) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (1)$. Sei (1) erfüllt. Dann gilt für jede Körpererweiterung k' von k , daß $k' \otimes_k B$ eine unverzweigte k'-Algebra ist (vgl. (1.9)). Zum Beweis von $(1) \Longrightarrow (3)$ genügt es somit zu zeigen: Jede unverzweigte endliche k-Algebra B ist reduziert. Sei k' ein Erweiterungskörper von k , der ein Zerfällungskörper von k ist und sämtliche Restekörper von B enthält (z.B. sei k' ein algebraischer Abschluß von k). Dann sind die Restekörper von $B' := k' \otimes_k B$ isomorph zu k' . (Beweis: Sei $\mathfrak{M}'$ maximales

Ideal von B' und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal $\mathfrak{m}' \cap B$. Es genügt zu zeigen, daß Elemente der Form $x' = 1 \otimes b$ mit $b \in B$ eine Restklasse in $B'/\mathfrak{m}'$ haben, die zum Bild von k' gehört. Es gibt zunächst ein irreduzibles Polynom α in $k[X]$ mit $\alpha(b) \in \mathfrak{m}$. Nach der Wahl von k' hat α aber eine Nullstelle in k' und zerfällt sogar in Linearfaktoren: $\alpha = \prod_i (X-a_i')$ mit $a_i' \in k'$. Dann ist $\mathfrak{m}' \ni 1 \otimes \alpha(b) = \alpha(x') = \prod_i (x'-a_i')$. Da $\mathfrak{m}'$ ein Primideal ist, gibt es ein i mit $x'-a_i' \in \mathfrak{m}'$, was zu zeigen war.) Da B ein Unterring von B' ist, genügt es zu zeigen, daß B' reduziert ist. B' ist unverzweigt über k' . Nach der Vorbemerkung ist $B' = B_1' \times \ldots \times B_n'$ mit endlichen lokalen k'-Algebren B_i' , die ebenfalls unverzweigt über k' sind. Wir können also weiter annehmen, daß B' lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}'$ ist. Mit B' ist auch $B'' := B'/\mathfrak{m}'^2$ unverzweigt über k' . Da der Restekörper von B'' gleich k' ist, ist B'' eine Algebra der Form $k'[X_1,\ldots,X_m]/(X_1,\ldots,X_m)^2$, wobei $m = \dim_{k'} \mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2$ die Minimalanzahl von Erzeugenden von $\mathfrak{m}'$ ist. Es ist offenbar $D_{k'}(B'')/\mathfrak{m}' D_{k'}(B'') \cong (B''/\mathfrak{m}' B'')^m = k'^m$, so daß $m = 0$ ist, was $\mathfrak{m}' = 0$ bedeutet, wie gewünscht.

Aus (3) folgt (2). Sei (3) erfüllt. Zunächst ist B reduziert, also $B = K_1 \times \ldots \times K_n$ mit endlichen Erweiterungskörpern K_i von k . Für jede Körpererweiterung k' von k ist $k' \otimes_k K_i$ reduziert. Angenommen K_i ist nicht separabel über k . Sei $x \in K_i$ nicht separabel. Dann gibt es eine Körpererweiterung k' von k derart, daß $k' \otimes_k k[x] \subseteq k' \otimes_k K_i$ nicht reduziert ist. Widerspruch.

Sei schließlich (2) erfüllt. Dann ist $B = K_1 \times \ldots \times K_n$ mit separablen Körpererweiterungen K_i von k , und es ist $D_k(B) = \prod_{i=1}^n D_k(K_i) = 0$ (vgl. Beispiel (1), Ende §2). -

<u>Bemerkung 1</u> . Ohne Endlichkeitsvoraussetzungen können unverzweigte Algebren über einem Körper sogar nilpotente Elemente besitzen. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel: Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und L der algebraische Abschluß von $K(X)$. Es sei $B := L[Y]/(Y^2) = L \oplus Ly$ mit $y \neq 0$, $y^2 = 0$, wo y die Restklasse von Y ist. Die Restklassenabbildung $B \longrightarrow B/By = L$ bildet $K[X+y]$ bijektiv auf $K[X]$ ab, so daß der Quotientenkörper $k := K(X+y)$ von $K[X+y]$ in B liegt. $D_k(B)$ ist 0 . Es ist nämlich $d_k^B(L) = 0$, weil jedes Element von L eine p-te Potenz ist. Weiter ist

$d_k^B(y) = d_k^B(y-(X+y)) = -d_k^B(X) = 0$; folglich ist
$d_k^B(B) = d_k^B(L[y]) = 0$.

(3.2) Lemma. Sei K eine endlich erzeugte Körpererweiterung des Körpers k . Dann ist $\dim_K D_k(K) \geqq \operatorname{trgrad}_k K$. Genau dann ist K unverzweigt über k , wenn K separabel algebraisch über k ist.

Beweis. Sei $r := \dim_K D_k(K)$. $x_1,\ldots,x_r$ seien Elemente aus K mit $D_k(K) = \sum_{i=1}^r K dx_i$. Für $k' := k(x_1,\ldots,x_r)$ gilt: $\operatorname{trgrad}_k k' \leqq r$ und $D_{k'}(K) = 0$. Es genügt zu zeigen $\operatorname{trgrad}_{k'} K = 0$. Wir können also ohne Beschränkung annehmen, daß $D_k(K) = 0$. Sei $y_1,\ldots,y_s$ eine Transzendenzbasis von K über k . Wegen $D_{k(y_1,\ldots,y_s)}(K) = 0$ ist K separabel algebraisch über $k(y_1,\ldots,y_s)$ (Lemma (3.1)). Ferner ist $\dim D_k(k(y_1,\ldots,y_s)) = s$ (vgl. §1, Bem. 3). Um $s = 0$ zu erhalten, genügt es, folgende Aussage zu beweisen: Ist $k \subseteq L \subsetneq K$ eine Körperkette mit $K = L[x]$, x separabel algebraisch über L , und ist $D_k(L) \neq 0$, so ist auch $D_k(K) \neq 0$. Zum Beweis sei $\delta : L \longrightarrow L$ eine von 0 verschiedene k-Derivation von L . Es gibt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung von δ zu einer Derivation von $L[X]$ in sich mit $X \longmapsto 0$, die wieder mit δ bezeichnet sei. $\alpha \in L[X]$ sei das Minimalpolynom von x . Es gibt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\tilde{\delta}$ von δ zu einer Derivation von $L[X]$ in K mit $\tilde{\delta}(X) = -(\delta(\alpha))(x)/\alpha'(x)$, $\alpha' := \partial\alpha/\partial X$. Wegen

$$\tilde{\delta}(\alpha) = (\delta(\alpha)(x) + \alpha'(x)(-\delta(\alpha)(x)/\alpha'(x)) = 0$$

induziert $\tilde{\delta}$ eine von 0 verschiedene k-Derivation $K \longrightarrow K$, so daß $D_k(K) \neq 0$ ist, wie behauptet.-

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, den folgenden Satz zu beweisen. Bei der Formulierung benutzen wir folgende Bezeichnung: Ist $\mathfrak{r}$ ein Primideal in einem Ring C , so sei $\varkappa(\mathfrak{r}) = C_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{r}C_{\mathfrak{r}}$ der Restekörper von $C_{\mathfrak{r}}$, das ist der Quotientenkörper von $C/\mathfrak{r}$.

(3.3) Satz. Seien B eine A-Algebra, $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spek} B$ und $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{P}$. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

(a) $D_A(B)_{\mathfrak{P}}$ ist ein endlicher $B_{\mathfrak{P}}$-Modul.
(b) $\mathfrak{P}B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$ ist ein endlicher $(B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}})$-Modul.
(c) $\varkappa(\mathfrak{P})$ ist endlich erzeugt über $\varkappa(\mathfrak{p})$.

Dann ist $\mathfrak{P}$ genau dann über A unverzweigt, wenn $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}B_{\mathfrak{P}}$ und

$\varkappa(\mathfrak{P})$ über $\varkappa(\mathfrak{p})$ separabel algebraisch ist.

<u>Bemerkung 2</u>. Die Voraussetzungen (a), (b), (c) in (3.3) sind für jedes Primideal $\mathfrak{P} \subseteq B$ erfüllt, wenn B eine endlich erzeugte A-Algebra ist. Für (a) ist das klar. Für (b) und (c) folgt dies daraus, daß dann $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ eine endlich erzeugte Algebra über dem Körper $\varkappa(\mathfrak{p})$ ist.

<u>Beweis von (3.3)</u>. Nach (2.2) ist $\mathfrak{P}$ über A genau dann unverzweigt, wenn $B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$ über $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \varkappa(\mathfrak{p})$ unverzweigt ist. Wir können also gleich annehmen, daß A ein Körper und B ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ ist. Sei B unverzweigt über A . Dann ist erst recht $B/\mathfrak{P} = \varkappa(\mathfrak{P})$ unverzweigt über A . Nach (3.2) ist $\varkappa(\mathfrak{P})$ separabel algebraisch über $A = \varkappa(\mathfrak{p})$. Ferner ist auch $B/\mathfrak{P}^2$ unverzweigt über A . Da $\mathfrak{P}$ endlicher B-Modul ist, ist $B/\mathfrak{P}^2$ eine endliche A-Algebra und damit nach (3.1) reduziert. Das bedeutet $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^2$, woraus $\mathfrak{P} = 0$ folgt nach dem Lemma von Krull-Nakayama, wie gewünscht. Ist umgekehrt $\mathfrak{P} = 0$ und $\varkappa(\mathfrak{P})$ separabel algebraisch über A , so ist B unverzweigt über A nach (3.1).

<u>§4. Endliche Algebren über lokalen Ringen</u>

Wir beweisen in diesem Paragraphen einige Aussagen über endliche Algebren über lokalen Ringen, die wir im weiteren häufiger benutzen werden. Ist B ein Ring, so bezeichne $\mathfrak{m}_B$ stets das <u>Jacobson-Radikal</u> von B , das ist der Durchschnitt der maximalen Ideale von B .

<u>(4.1) Lemma</u>. Sei B eine endliche Algebra über dem Körper k . Dann gibt es eine k-Unteralgebra k' von B , die bei der Restklassenabbildung $B \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B$ bijektiv auf die unverzweigte Hülle von k in $B/\mathfrak{m}_B$ abgebildet wird.

<u>Beweis</u>. B ist direktes Produkt lokaler k-Algebren $B_1, \dots, B_n$. Es ist $B/\mathfrak{m}_B = \prod_{i=1}^n B_i/\mathfrak{m}_{B_i}$. Die unverzweigte Hülle von k in $B/\mathfrak{m}_B$ ist offenbar $\prod_{i=1}^n K_i$, wobei K_i die separable Hülle von k in $B_i/\mathfrak{m}_{B_i}$ ist. Es genügt also, (4.1) für lokale Algebren B zu beweisen. Sei K die separable Hülle von k in $B/\mathfrak{m}_B$ und $K = k[\bar{x}]$, wobei $\bar{x}$ die Restklasse von $x \in B$ in $B/\mathfrak{m}_B$ ist. $\alpha \in k[X]$ sei das Minimalpolynom von $\bar{x}$. Es ist $\alpha'(\bar{x}) \neq 0$, so daß $\alpha'(x)$ eine Einheit in B ist. Ferner ist $\alpha(\bar{x}) = 0$, d.h. $\alpha(x) \in \mathfrak{m}_B$. Durch

$$x_o := x\ ,\ x_{i+1} := x_i - (\alpha(x_i)/\alpha'(x_i))\ ,\ i \geq 0\ ,$$

(Newton sche Approximation) wird eine Folge von Elementen $x_i \in B$ mit $x_i \equiv x$ modulo $\mathfrak{m}_B$ und $\alpha(x_i) \in \mathfrak{m}_B^{i+1}$ definiert. Da $\mathfrak{m}_B^{i+1} = 0$ ist für genügend große i, gibt es somit ein $y \in B$ mit $y \equiv x$ modulo $\mathfrak{m}_B$ und $\alpha(y) = 0$. Dann ist $k' := k[y]$ die gesuchte Unteralgebra.

<u>(4.2) Lemma</u>. Seien A ein lokaler Ring und B eine endliche A-Algebra. Sei r die Minimalanzahl von Erzeugenden des (endlichen) B-Moduls $D_A(B)$. Dann gilt: Ist B lokal oder ist der Restekörper von A unendlich, so besitzt B ein A-Algebra-Erzeugendensystem von $\max\{1,r\}$ Elementen.

<u>Beweis</u>. Wegen $\mathfrak{m}_A B \subseteq \mathfrak{m}_B$ besitzen $D_A(B)$ und $D_{A/\mathfrak{m}_A}(B/\mathfrak{m}_A B) = D_A(B)/\mathfrak{m}_A D_A(B)$ dieselbe Minimalanzahl von Erzeugenden (Lemma von Krull-Nakayama). Ebenso bilden die Elemente $x_1,\ldots,x_m \in B$ ein A-Algebra-Erzeugendensystem von B, wenn ihre Restklassen in $B/\mathfrak{m}_A B$ ein $(A/\mathfrak{m}_A)$-Algebra-Erzeugendensystem von $B/\mathfrak{m}_A B$ bilden. Wir können deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß A ein Körper k ist.

Zunächst betrachten wir den Fall, daß B lokal ist und $D_k(B)$ von einem Element erzeugt wird. Wir haben zu zeigen, daß B eine einfache k-Algebra ist. Sei weiter $B/\mathfrak{m}_B$ separabel über k. Nach (4.1) gibt es einen Körper $K \subseteq B$ mit $k \subseteq K$, so daß $K \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B$ bijektiv ist. Wegen $D_k(K) = 0$ ist $D_k(B) = D_K(B)$. Es gibt ein $y \in \mathfrak{m}_B$ mit $D_K(B) = Bdy$. Sei $K = k[x]$. Dann ist $d(x+y) = dy$. Sei $B' := k[x+y]$. Die lokale k-Algebra B' hat denselben Restekörper wie B. Außerdem ist $D_{B'}(B) = 0$. Nach (3.3) ist $\mathfrak{m}_{B'}B = \mathfrak{m}_B$. Nach dem Lemma von Krull-Nakayama ist somit $B = B'$. Mit diesem Beweisschritt ist insbesondere der Fall erledigt, daß k endlich ist.

Sei nun k überdies unendlich. Mit $D_k(B)$ ist auch $D_k(B/\mathfrak{m}_B)$ zyklisch. Sei k' die separable Hülle von k in $B/\mathfrak{m}_B$. Wieder nach (4.1) gibt es einen Körper $K \subseteq B$, $k \subseteq K$, so daß K bijektiv auf k' abgebildet wird. Sei $y \in B$ mit $D_K(B) = D_k(B) = Bdy$. Dann ist $B' := K[y] \subseteq B$ eine k-Unteralgebra mit $D_{B'}(B) = 0$. Also ist $\mathfrak{m}_{B'}B = \mathfrak{m}_B$. Da außerdem die Restekörpererweiterung $B'/\mathfrak{m}_{B'} \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B$ sowohl separabel als auch rein inseparabel ist, ist $B'/\mathfrak{m}_{B'} = B/\mathfrak{m}_B$. Nach dem Lemma von Krull-Nakayama ist also $B' = B$. Sei $K = k[x]$. Es ist x separabel über k.

Nach dem Satz vom primitiven Element ist $B/\mathfrak{m}_B = K[\bar{y}] = k[x,\bar{y}]$ einfach über k. Da k außerdem unendlich viele Elemente enthält, gibt es dann ein $a \in k$ mit $B/\mathfrak{m}_B = k[ax+\bar{y}]$. Wegen $d(ax+y) = dy$ ist B über $k[ax+y]$ unverzweigt. Da $k[ax+y]$ überdies denselben Restekörper wie B hat, muß $B = k[ax+y]$ sein.

Sei weiter B lokal, aber $r > 1$. Es gibt Elemente $x_1,\ldots,x_r \in B$ mit $D_k(B) = Bdx_1+\ldots+Bdx_r$. Sei $B' = k[x_1,\ldots,x_{r-1}] \subseteq B$. Es ist B' lokal und $D_{B'}(B) = Bd^B_{B'}(x_r)$. Nach dem Bewiesenen gibt es ein Element $y_r \in B$ mit $B = B'[y_r]$. Es ist $B = k[x_1,\ldots,x_{r-1},y_r]$, wie behauptet.

Sei jetzt k unendlich, B nicht notwendig lokal. B ist Produkt lokaler k-Algebren $B_1,\ldots,B_n$. Da auch $D_k(B_i)$ von höchstens r Elementen erzeugt wird, gibt es Ideale $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ in $k[X_1,\ldots,X_m]$, $m := \max\{1,r\}$, mit $B_i \cong k[X_1,\ldots,X_m]/\mathfrak{q}_i$. Die $\mathfrak{q}_i$ sind primär zu maximalen Idealen $\mathfrak{m}_i$. Da k unendlich viele Elemente besitzt, gibt es Subtitutionsautomorphismen φ_i von $k[X_1,\ldots,X_m]$ mit $X_1 \longmapsto X_1+a_i$, $X_j \longrightarrow X_j$, $j \geq 2$, $a_i \in k$, derart, daß die Ideale $\varphi_i(\mathfrak{m}_i)$ paarweise verschieden sind. Dann ist $B = \prod B_i = \prod k[X_1,\ldots,X_m]/\mathfrak{q}_i \cong \prod k[X_1,\ldots,X_m]/\varphi_i(\mathfrak{q}_i) \cong k[X_1,\ldots,X_m]/\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} := \varphi_1(\mathfrak{q}_1) \cap \ldots \cap \varphi_n(\mathfrak{q}_n)$. Die letzte Isomorphie ergibt sich daraus, daß die Ideale $\varphi_i(\mathfrak{q}_i)$ paarweise komaximal sind. Damit ist (4.2) vollständig bewiesen.

<u>(4.3) Korollar</u>. Sei A ein lokaler Ring mit einem unendlichen Restekörper. Ist B eine endliche unverzweigte A-Algebra, so ist B einfach. Ist B darüber hinaus frei, so ist $B \cong A[X]/(\alpha)$ mit einem normierten Polynom $\alpha \in A[X]$.

<u>Beweis</u>. Der erste Teil folgt direkt aus (4.2). Für den zweiten Teil sei $x \in B$ ein erzeugendes Element und $\bar{\alpha} \in (A/\mathfrak{m}_A)[X]$ das Minimalpolynom der Restklasse $\bar{x}$ von x in $B/\mathfrak{m}_A B$ über $A/\mathfrak{m}_A$. Ist $m := \operatorname{grad}\bar{\alpha}$, so erzeugen die Elemente $1,\bar{x},\ldots,\bar{x}^{m-1}$ die Algebra $B/\mathfrak{m}_A B$, und folglich erzeugen $1,x,\ldots,x^{m-1}$ die Algebra B. Ist $x^m = a_o+a_1x+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}$, so ist $\alpha := X^m-a_{m-1}X^{m-1}-\ldots-a_o$ ein normiertes Polynom im Kern des kanonischen Homomorphismus $A[X] \longrightarrow B$ mit $X \longmapsto x$. Da $1,\ldots,x^{m-1}$ linear unabhängig sind, liegt kein Polynom vom Grad $< m$ in diesem Kern. Folglich wird der Kern von α erzeugt.

<u>Bemerkung 1</u>. Der Beweis des zweiten Teils von (4.3) zeigt die Gültigkeit der folgenden Aussage: Ist B eine einfache

endliche freie Algebra über einem lokalen Ring A , so ist B von der Form $A[X]/(\alpha)$ mit einem normierten Polynom α.

(4.4) Korollar. Sei B eine endliche lokale Algebra über einem Körper k und K der Restekörper $B/\mathfrak{m}_B$ von B . Dann gilt

$$\operatorname{Dim} B + \dim_K D_k(K) \geq \mu(D_k(B)) \geq \operatorname{Dim} B .$$

Dabei ist $\operatorname{Dim} B = \dim_K \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ die Minimalanzahl von Erzeugenden von $\mathfrak{m}_B$ und $\mu(D_k(B)) = \dim_K D_k(B)/\mathfrak{m}_B D_k(B)$ die Minimalanzahl von Erzeugenden von $D_k(B)$.

Beweis. Die erste Ungleichung ergibt sich direkt aus der exakten Sequenz

$$\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2 \longrightarrow D_k(B)/\mathfrak{m}_B D_k(B) \longrightarrow D_k(K) \longrightarrow 0$$

(vgl. (1.2)).

Zum Beweis der zweiten Ungleichung sei $r := \mu(D_k(B))$. Ist $r = 0$, so ist B eine separable Körpererweiterung und folglich $\operatorname{Dim} B = 0$. Ist $r > 0$, so ist B nach (4.2) Restklassenalgebra einer Polynomalgebra $P := k[X_1,\ldots,X_r]$. Da bekanntlich jedes maximale Ideal in P von r Elementen erzeugt wird, wird auch das maximale Ideal von B von r Elementen erzeugt. Dies zeigt $\operatorname{Dim} B \leq r$.

Bemerkung 2 . Einen weniger elementaren Beweis von (4.4) findet man in [12], Satz (5.1).

(4.5) Lemma. Sei B eine Algebra über dem lokalen Ring A . Es gebe eine natürliche Zahl m mit folgenden Eigenschaften:

(a) Jedes Element in B erfüllt eine Ganzheitsgleichung vom Grade $\leq m$ über A .

(b) Es ist $\sum_{\mathfrak{M}} d_{\mathfrak{M}} \geq m$, wobei $d_{\mathfrak{M}}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{M} \subseteq B$ der Grad der separabel algebraischen Hülle von $A/\mathfrak{m}_A$ in $B/\mathfrak{M}$ ist.

Ferner sei der Restekörper von A unendlich, oder es sei $B/\mathfrak{m}_B$ eine einfache $(A/\mathfrak{m}_A)$-Algebra.

Dann ist B endlich, unverzweigt und einfach über A , und es ist $m = \dim_{A/\mathfrak{m}_A} B/\mathfrak{m}_A B$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{m}_A B \subseteq \mathfrak{m}_B$. Sei $B/\mathfrak{m}_B$ einfach über $k := A/\mathfrak{m}_A$. Ist dann x ein Element in B , dessen Restklasse $B/\mathfrak{m}_B$ erzeugt, so erfüllt x eine Ganzheitsgleichung vom Grad $\leq m$. Folglich ist $\dim_k B/\mathfrak{m}_B \leq m$. Da wegen (b) sicherlich

$\dim_k B/\mathfrak{m}_B \geq m$ ist, hat man die Gleichheit $\dim_k B/\mathfrak{m}_B = m$. Folglich hat B nur endlich viele maximale Ideale, und $B/\mathfrak{m}_B$ ist (wiederum wegen (b)) ein direktes Produkt endlicher separabler Erweiterungen von k , also unverzweigt über k .

Wir zeigen, daß $B/\mathfrak{m}_B$ in jedem Fall einfach ist. Dazu können wir annehmen, daß k unendlich ist. Seien $\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_n$ endlich viele maximale Ideale in B mit $\sum_i d_{\mathfrak{M}_i} \geq m$. Weiter seien $K_1,\dots,K_n$ die separabel algebraischen Hüllen von k in $B/\mathfrak{M}_i$. Da jedes Element aus $B/\mathfrak{M}_i$ algebraisch vom Grad $\leq m$ über k ist, sind die K_i endlich über k . Es ist $B/\mathfrak{M}_i = K_i$. Andernfalls gäbe es ein i und ein $y \in B/\mathfrak{M}_i$ mit $y \notin K_i$. Die k-Algebra $\tilde{B} := K_1 \times \dots \times K_{i-1} \times K_i[y] \times \dots \times K_n$ ist eine Unteralgebra von $\prod_i B/\mathfrak{M}_i = B/\prod_i \mathfrak{M}_i$. Da $D_k(\tilde{B})$ von einem Element erzeugt wird, ist $\tilde{B}$ nach (4.2) einfach über k , $\tilde{B} = k[\bar{x}]$, wobei $x \in B$ und $\bar{x}$ die Restklasse von x modulo $\prod \mathfrak{M}_i$ ist. Der Grad von $\bar{x}$ ist $\leq m$, andererseits ist $\dim_k \tilde{B} > \sum \dim_k K_i \geq m$. Widerspruch. Damit ist gezeigt: Es gibt nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_r$ in B . Alle Restekörper $B/\mathfrak{M}_j$, $j = 1,\dots,r$, sind separabel über k , und es ist $\sum_{j=1}^{r} \dim_k B/\mathfrak{M}_j = m$. Damit ist $B/\mathfrak{m}_B = B/\prod_{j=1}^{r} \mathfrak{M}_j = \prod_{j=1}^{r} B/\mathfrak{M}_j$ eine endliche unverzweigte und nach (4.2) auch zyklische Erweiterung vom Grade m über k .

Sei $x \in B$ ein Element mit $B/\mathfrak{m}_B = k[\bar{x}]$, wobei $\bar{x}$ die Restklasse von x in $B/\mathfrak{m}_B$ ist. Weiter sei $y \in B$ beliebig. Die Algebra $B' = A[x,y] \subseteq B$ ist endlich über A . Ferner ist der kanonische Homomorphismus $B'/\mathfrak{m}_{B'} \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B$ ein Isomorphismus. B' erfüllt deshalb ebenfalls die Bedingungen (a) und (b). Es genügt nun zu zeigen: $\mathfrak{m}_{B'} = \mathfrak{m}_A B'$. Wegen $B'/\mathfrak{m}_{B'} = k[\bar{x}]$ ist dann nach dem Lemma von Krull-Nakayama auch $B' = A[x]$, also $y \in A[x]$, d.h. es ist $B = A[x]$.

Sei $\tilde{T} := B'/\mathfrak{m}_A B'$. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{m}_{\tilde{T}} = 0$ ist. Nach dem Lemma von Krull-Nakayama genügt es weiter zu zeigen, daß $\mathfrak{m}_T = 0$ ist in $T := \tilde{T}/\mathfrak{m}_{\tilde{T}}^2$. Die endliche k-Algebra T erfüllt als k-Algebra ebenfalls die Voraussetzung (a) . Ferner ist $T/\mathfrak{m}_T = B'/\mathfrak{m}_{B'} = B/\mathfrak{m}_B$ einfach und unverzweigt über k , und es ist $\dim_k T/\mathfrak{m}_T = m$. Nach (4.1) gibt es eine k-Unteralgebra k' von T, so daß $k' \longrightarrow T/\mathfrak{m}_T$ bijektiv ist. Sei $k' = k[x]$ und $\alpha \in k[X]$ das Minimalpolynom von x . Es ist $\alpha'(x)$ eine Einheit in k' . Sei nun $f \in \mathfrak{m}_T$. Es ist $f^2 \in \mathfrak{m}_T^2 = 0$. Es gibt ein normiertes Polynom $\beta \in k[X]$ vom Grade $\leq m$ mit $0 = \beta(x+f) = \beta(x) + \beta'(x) f$.

Wegen $k[x] \cap \mathfrak{m}_T = 0$ ist $\beta(x) = \beta'(x)f = 0$. Aus Gradgründen ist $\beta = \alpha$. Aus $\alpha'(x)f = 0$ folgt jetzt $f = 0$, wie gewünscht. Damit ist (4.5) vollständig bewiesen.

Bemerkung 3 . In Umkehrung von (4.5) gilt: Ist B eine endliche unverzweigte Algebra über dem lokalen Ring A , so gelten für $m := \dim_{A/\mathfrak{m}_A} B/\mathfrak{m}_B$ die Bedingungen (a) und (b) von (4.5) . Die Eigenschaft (a) folgt daraus, daß wegen $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A B$ die Algebra B ein A-Modul-Erzeugendensystem aus m Elementen besitzt.

§5. Differentialformen auf geringten Räumen und Schemata

Ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein topologischer Raum X mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen auf X . Besteht über die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ kein Zweifel, so schreiben wir kurz X für $(X, \mathcal{O}_X)$. Seien X und Y geringte Räume. Ein Homomorphismus von X in Y ist eine stetige Abbildung $h : X \longrightarrow Y$ zusammen mit einer Familie von Ringhomomorphismen $\varphi_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(h^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$, U offen in Y , die mit den Beschränkungshomomorphismen verträglich sind. Ist $x \in X$, so induzieren die Homomorphismen φ_U , $x \in U$, einen Homomorphismus $\varphi_x : \mathcal{O}_{Y,h(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ in den Halmen $\mathcal{O}_{Y,h(x)} := \varinjlim_{h(x) \in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ bzw. $\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{x \in V} (V, \mathcal{O}_X)$. Ist $h : X \longrightarrow Y$ ein Homomorphismus geringter Räume, so ist für $V \subseteq X$, V offen, die Menge

$$\{ s \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \ : \ s_x \in \operatorname{Bild} \varphi_x \text{ für alle } x \in V \}$$

ein Unterring von $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$. Diese Unterrringe definieren eine Garbe $\mathcal{O}'_X$ von Ringen auf X . (Sie ist das Bild der Urbildgarbe $h^* \mathcal{O}_Y$ unter dem kanonischen Homomorphismus $h^* \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$.)
Ist $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, so heißt ein Garbenhomomorphismus $\delta : \mathcal{O}_X \to \mathcal{M}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Derivation, wenn für jede offene Menge $V \subseteq X$ die Abbildung $\delta_V : \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{M})$ eine $\Gamma(V, \mathcal{O}'_X)$-Derivation ist.

(5.1) Aussage. Es gibt einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{D}_Y(X)$ und eine $\mathcal{O}_Y$-Derivation $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{D}_Y(X)$ mit folgender universeller Eigenschaft: Ist $\delta : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Derivation von $\mathcal{O}_X$ in einem $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$, so gibt es genau einen $\mathcal{O}_X$-Modul-Homomorphismus $f : \mathcal{D}_Y(X) \longrightarrow \mathcal{M}$ mit $\delta = fd$. - Für jede offene Teilmenge $V \subseteq X$ mit $h(V) \subseteq U$, wo U offen in Y ist, gilt $\mathcal{D}_Y(X)|V \cong \mathcal{D}_U(V)$. Für $x \in X$ ist $\mathcal{D}_Y(X)_x = D_{\mathcal{O}_{Y,h(x)}}(\mathcal{O}_X)$.

Beweis. Seien ρ_W^V , V , W offen in X , $W \subseteq V$, die Beschränkungshomomorphismen von $\mathcal{O}_X$. Wir haben die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(V, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{d_V} & D_{\Gamma(V,\mathcal{O}'_X)}(\Gamma(V, \mathcal{O}_X)) \\
\downarrow \rho_W^V & & \downarrow D(\rho_W^V) \\
\Gamma(W, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{d_W} & D_{\Gamma(W,\mathcal{O}'_X)}(\Gamma(W, \mathcal{O}_X))
\end{array}$$

(vgl. (1.5)). Das Garbendatum $(D_{\Gamma(V,\mathcal{O}'_X)}(\Gamma(V, \mathcal{O}_X)) , D(\rho_W^V))$ definiert die Garbe $\mathcal{D}_Y(X)$. Die Familie (d_V) definiert eine $\mathcal{O}_Y$-Derivation $\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \mathcal{D}_Y(X)$. Da die (d_V) die universelle Eigenschaft haben, hat auch d die in (5.1) angegebene universelle Eigenschaft. Daß $\mathcal{D}_Y(X)|V \cong \mathcal{D}_U(V)$ ist für eine offene Menge $V \subseteq X$ mit $h(V) \subseteq U$, folgt aus der Konstruktion. Ferner ist für $x \in X$

$$\mathcal{D}_Y(X)_x = \varinjlim_{x \in V} D_{\Gamma(V,\mathcal{O}'_X)}(\Gamma(V, \mathcal{O}_X)) = D_{\varinjlim \Gamma(V,\mathcal{O}'_X)}(\varinjlim \Gamma(V,\mathcal{O}_X))$$
$$= D_{\mathcal{O}'_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}) = D_{\varphi_x(\mathcal{O}_{Y,h(x)})}(\mathcal{O}_{X,x}) = D_{\mathcal{O}_{Y,h(x)}}(\mathcal{O}_{X,x})$$

(vgl. (1.6)). -

Der $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{D}_Y(X)$ heißt die Garbe der Differentialformen von X über Y . Ein Punkt $x \in X$ heißt unverzweigt über Y , wenn $\mathcal{D}_Y(X)_x = 0$ ist. Genau dann ist $x \in X$ unverzweigt über Y , wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ unverzweigt über $\mathcal{O}_{Y,h(x)}$ ist. Wir setzen

$$\mathrm{Vzw}_Y^X := \mathrm{Tr}\,\mathcal{D}_Y(X) .$$

Vzw_Y^X heißt der Verzweigungsort von X über Y .

Ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ein Schema, wenn X eine Überdeckung mit offenen affinen Mengen besitzt. Dabei heißt eine offene Menge $U \subseteq X$ affin, wenn $(U , \mathcal{O}_X|U)$ als geringter Raum isomorph ist zu dem affinen Schema des Spektrums eines Ringes A . Wir erinnern daran, wie der geringte Raum Spek A definiert ist: Der zugrundeliegende topologische Raum ist das Spektrum von A mit der Zariskitopologie (vgl. den Anfang von §2). Eine Basis der Topologie bilden die Mengen
$D(f) := \mathrm{Spek}\, A \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spek}\, A \; ; \; f \notin \mathfrak{p}\}$. Es gibt genau eine Garbe von Ringen $\tilde{A}$ auf Spek A mit $\Gamma(D(f),\tilde{A}) = A_f$, wobei A_f der Ring der Brüche von A nach dem multiplikativen System der Potenzen von f ist. (Spek A,$\tilde{A}$) ist das zu A gehörige affine Schema. Ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spek}\, A$, so ist $(\tilde{A})_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} \Gamma(D(f),\tilde{A}) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f =$

$= A_{\mathfrak{q}}$. Sind X und Y zwei Schemata, so ist ein Homomorphismus von X in Y ein Homomorphismus $h : X \longrightarrow Y$ der geringten Räume $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, für den die zugehörigen Homomorphismen $\mathcal{O}_{Y,h(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ in den Halmen überdies alle lokal sind, d.h. die maximalen Ideale ineinander abbilden.

Ist M ein Modul über dem Ring A , so gibt es genau einen $\widetilde{A}$-Modul $\widetilde{M}$ mit $\Gamma(D(f),\widetilde{M}) = M_f$. Ist X ein Schema, so heißt ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ quasikohärent, wenn es eine Überdeckung von X mit affinen offenen Mengen $U_i \cong$ Spek A_i gibt derart, daß $\mathcal{M}|U_i \cong \widetilde{M}_i$ ist mit A_i-Moduln M_i . Ist $\mathcal{M}$ quasikohärent, so gilt für jede offene affine Menge $U \subseteq X$, daß $\mathcal{M}|U \cong \Gamma(U,\mathcal{M})^{\sim}$ ist. Ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ heißt endlich, wenn eine offene affine Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X existiert derart, daß $\Gamma(U_i,\mathcal{M})$ ein endlicher $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$-Modul ist für alle $i \in I$.

(5.2) Aussage. Sei X ein Schema über dem Schema Y (d.h. X ist ein Schema, zusammen mit einem Homomorphismus $X \xrightarrow{h} Y$ von Schemata). Dann ist $\mathcal{D}_Y(X)$ quasikohärent. Sind X und Y affin, so ist $\mathcal{D}_Y(X) \cong D_{\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))^{\sim}$.

Beweis. Sei U eine offene affine Menge in Y und V eine offene affine Menge in $h^{-1}(V)$. Nach (5.1) ist $\mathcal{D}_Y(X)|V \cong \mathcal{D}_U(V)$. Es genügt also die Behauptung über die affinen Schemata zu beweisen. Sei Y = Spek A , X = Spek B . Die universelle Derivation $d : B \longrightarrow D_A(B)$ definiert eine $\widetilde{A}$-Derivation $\widetilde{d} : \widetilde{B} \longrightarrow \widetilde{D_A(B)}$. Nach der universellen Eigenschaft von $\mathcal{D}_Y(X)$ gibt es einen $\widetilde{B}$-Homomorphismus $\mathcal{D}_Y(X) \longrightarrow \widetilde{D_A(B)}$. Dieser ist aber bijektiv, da er in den Halmen $\mathcal{D}_Y(X)_x = D_{A_{\mathfrak{q}}}(B_{\mathfrak{P}}) = D_A(B)_{\mathfrak{P}} = \widetilde{D_A(B)}_x$ bijektiv ist (es sei dabei $\mathfrak{P} \subseteq B$ das Primideal zum Punkt $x \in X$ und $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{P} \subseteq A$ das Primideal zum Punkt h(x)).

Bemerkung. Ist B eine A-Algebra und $X \longrightarrow Y$, X := Spek B , Y := Spek A , der zugehörige Homomorphismus affiner Schemata, so ist $\mathrm{Vzw}_Y^X = \mathrm{Vzw}_A^B$.

(5.3) Korollar. Ist X ein Schema, lokal von endlichem Typ über Y , so ist $\mathcal{D}_Y(X)$ ein endlicher $\mathcal{O}_X$-Modul.

Beweis. X heißt lokal von endlichem Typ über Y , wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine affine Umgebung V von x und eine affine Umgebung U von h(x) existiert derart, daß $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ eine $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$-Algebra endlichen Typs ist. Dabei ist $h : X \longrightarrow Y$ der Strukturhomomorphismus. Aus (5.2) und §1 , Bem. 2 folgt nun die Behauptung.

(5.4) Korollar. Ist X ein Schema lokal von endlichem Typ über Y , so ist Vzw_X^Y abgeschlossen in X .

Beweis. Die Behauptung folgt aus (5.3) und aus der folgenden Aussage.

(5.5) Aussage. Ist X ein Schema über Y und ist $\mathfrak{D}_Y(X)$ ein endlicher $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist Vzw_Y^X abgeschlossen.

Beweis. Es ist $\mathrm{Vzw}_Y^X = \mathrm{Tr}\,\mathfrak{D}_Y(X)$. Offenbar ist aber der Träger eines endlichen $\mathcal{O}_X$-Moduls abgeschlossen: Endlich viele Schnitte, die in einem Punkt verschwinden, verschwinden in einer ganzen Umgebung (vgl. auch (2.1)).

§6. Differentialformen auf komplexen Räumen

Seien U eine offene Menge in $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{O}_U$ die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf U . Sind $f_1,\dots,f_r$ holomorphe Funktionen auf U mit Nullstellenmenge V , so hat die Garbe $\mathcal{O}_U/(f_1,\dots,f_r)\mathcal{O}_U$ den Träger V , und V zusammen mit der Beschränkung von $\mathcal{O}_U/(f_1,\dots,f_r)\mathcal{O}_U$ auf V ist ein $\mathbb{C}$-algebrierter Raum. Ein komplexer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein Hausdorffraum X zusammen mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von $\mathbb{C}$-Algebren, der eine Überdeckung V_i , $i\in I$, von offenen Mengen derart besitzt, daß die $(V_i, \mathcal{O}_X|V_i)$ isomorph sind zu solchen $\mathbb{C}$-algebrierten Räumen, wie sie zu Anfang beschrieben wurden. Die Halme der Strukturgarbe eines komplexen Raumes sind Restklassenalgebren von konvergenten Potenzreihenringen in endlich vielen Unbestimmten über $\mathbb{C}$, also noethersche lokale Ringe, deren Restekörper kanonisch isomorph zu $\mathbb{C}$ sind. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, so heißt $\mathcal{M}$ kohärent, wenn $\mathcal{M}$ lokal der Kokern eines Homomorphismus von $\mathcal{O}_X^r$ in $\mathcal{O}_X^s$ ist, wobei r und s geeignete natürliche Zahlen sind (die lokal variieren dürfen). Seien X und Y komplexe Räume. Ein Homomorphismus von X in Y ist ein Homomorphismus $h : X \longrightarrow Y$ der geringten Räume $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, für den die Ringhomomorphismen $\varphi_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(h^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$, U offen in Y , überdies $\mathbb{C}$-linear sind. Die in den Halmen induzierten Homomorphismen $\mathcal{O}_{Y,h(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, $x\in X$, sind dann ebenfalls $\mathbb{C}$-linear und damit offenbar lokal.

Sei $X \xrightarrow{h} Y$ ein Homomorphismus komplexer Räume. Der $\mathcal{O}_X$-

Modul $\mathcal{D}_Y(X)$ ist kaum von Bedeutung, da seine Halme $\mathcal{D}_Y(X)_x = D_{\mathcal{O}_{Y,h(x)}}(\mathcal{O}_x)$ sehr unübersichtliche Moduln sind (vgl. auch die weiter unten folgende Bem. 1). Statt $\mathcal{D}_Y(X)$ betrachtet man den $\mathcal{O}_X$-Modul $\Omega_Y(X)$ in der universell-endlichen $\mathcal{O}_Y$-Derivation $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_Y(X)$ von X. Diese ist folgendermaßen charakterisiert:

(6.1) Aussage. Es gibt (bis auf kanonische Isomorphie) genau eine $\mathcal{O}_Y$-Derivation $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_Y(X)$ von $\mathcal{O}_X$ in einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\Omega_Y(X)$, die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Ist $\delta : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M}$ eine beliebige $\mathcal{O}_Y$-Derivation in einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul, so gibt es genau einen $\mathcal{O}_X$-Modul-Homomorphismus $f : \Omega_Y(X) \longrightarrow \mathcal{M}$ mit $\delta = fd$. Sind $V \subseteq X$ und $U \subseteq Y$ jeweils offene Mengen mit $h(V) \subseteq U$, so ist $\Omega_U(V) = \Omega_Y(X)|V$.

Beweis. Es genügt $\Omega_Y(X)$ lokal zu konstruieren. Wegen der Eindeutigkeit lassen sich die einzelnen Teile dann zusammenkleben. Wir nehmen also an, daß X bzw. Y die Nullstellenmengen endlich vieler holomorpher Funktionen $f_1,\dots,f_r$ bzw. $g_1,\dots,g_s$ in einer offenen Menge $H \subseteq \mathbb{C}^m$ bzw. $G \subseteq \mathbb{C}^n$ sind und daß $h : X \longrightarrow Y$ von der holomorphen Abbildung $\tilde{h} : H \longrightarrow G$, $(x_1,\dots,x_m) \longmapsto (h_1(x),\dots,h_n(x))$ induziert wird. $x_1,\dots,x_m$ bzw. $y_1,\dots,y_n$ seien die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^m$ bzw. $\mathbb{C}^n$. Dann ist $\Omega_Y(X) = \mathcal{O}_X^m/\mathcal{R}$, wobei $\mathcal{R}$ von folgenden Elementen aus $\Gamma(X,\mathcal{O}_X^m)$ erzeugt wird:

$$\langle \partial_1 f_\varrho,\dots,\partial_m f_\varrho \rangle , \quad \varrho = 1,\dots,r$$
$$\langle \partial_1 h_\nu,\dots,\partial_m h_\nu \rangle , \quad \nu = 1,\dots,n .$$

Dabei sei ∂_μ die partielle Abbildung $\partial/\partial x_\mu$, $\mu = 1,\dots,m$. $\Omega_Y(X)$ ist kohärent. Die Derivation $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_Y(X)$ wird von den partiellen Ableitungen $\mathcal{O}_H \longrightarrow \mathcal{O}_H^m$, $g \longmapsto \langle \partial_1 g,\dots,\partial_m g \rangle$ induziert. d induziert in den Halmen die universell endliche $\mathcal{O}_{Y,h(x)}$-Derivation $d_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow D^e_{\mathcal{O}_{Y,h(x)}}(\mathcal{O}_{X,x})$. (Der Begriff der universell-endlichen Derivation ist ausführlich in der schon erwähnten Freiburger Ausarbeitung [11] beschrieben, vgl. auch [12].)

Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}_Y(X) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_X \arrow[ur, "\tilde{d}"] \arrow[r, "d"'] & \Omega_Y(X) \end{tikzcd} ,$$

wobei der $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus $\mathcal{D}_Y(X) \longrightarrow \Omega_Y(X)$ surjektiv ist. Ist nun $\delta : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Derivation in einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$, so gibt es zunächst genau einen $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus $\tilde{f} : \mathcal{D}_Y(X) \longrightarrow \mathcal{M}$ mit $\delta = \tilde{f}\tilde{d}$. Dieser induziert einen Homomorphismus $f : \Omega_Y(X) \longrightarrow \mathcal{M}$, da dies jeweils für die Halme gilt.

Bemerkung 1. Wie bereits im Beweis von (6.1) bemerkt, ist die Derivation $d_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \Omega_Y(X)_x$ im Punkte x die universell-endliche $\mathcal{O}_{Y,h(x)}$-Derivation von $\mathcal{O}_{X,x}$. Der kanonische Homomorphismus $\mathcal{D}_Y(X)_x \longrightarrow \Omega_Y(X)_x$ ist also genau dann bijektiv, wenn die universelle $\mathcal{O}_{Y,h(x)}$-Derivation von $\mathcal{O}_{X,x}$ mit der universell-endlichen $\mathcal{O}_{Y,h(x)}$-Derivation übereinstimmt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ eine endliche $\mathcal{O}_{Y,h(x)}$-Algebra ist. Beweis: Sei $A := \mathcal{O}_{Y,h(x)}$ und $B := \mathcal{O}_{X,x}$. Ist B endlich über A, so ist natürlich $\mathcal{D}_Y(X)_x = D_A(B)$ endlich. Sei umgekehrt $D_A(B)$ endlich. Um zu zeigen, daß B endlicher A-Modul ist, genügt es nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz in der Serreschen Fassung zu zeigen, daß B quasiendlich über A ist, d.h. $B/\mathfrak{m}_A B$ endliche $\mathbb{C}$-Algebra ist. Dies wiederum ist äquivalent damit, daß $\mathfrak{m}_A B$ in keinem von $\mathfrak{m}_B$ verschiedenen Primideal $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spek} B$ enthalten ist. Angenommen, es sei $\mathfrak{m}_A B \subseteq \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spek} B$, $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{m}_B$. Dann ist $D_A(B)/\mathfrak{m}_A D_A(B) = D_{A/\mathfrak{m}_A}(B/\mathfrak{m}_A B) = D_{\mathbb{C}}(B/\mathfrak{m}_A B)$ und folglich auch $D_{\mathbb{C}}(B/\mathfrak{P})$ endlich. Somit ist auch $D_{\mathbb{C}}(K)$ endlich, wobei $K := \operatorname{Quot}(B/\mathfrak{P})$ der Quotientenkörper von $B/\mathfrak{P}$ ist. Wegen $\dim B/\mathfrak{P} \geq 1$ ist aber bekanntlich $\operatorname{trgrad}_{\mathbb{C}} K = 2^{\aleph_0}$, so daß auch $\dim_K D_{\mathbb{C}}(K) = \operatorname{trgrad}_{\mathbb{C}} K = 2^{\aleph_0}$ ist. Widerspruch.

Die folgende Aussage formulieren wir etwas allgemeiner als wir dies im weiteren benötigen werden. Wir erinnern daran, daß eine analytische k-Algebra, k bewerteter Körper, eine k-Algebra ist, die endlich über einer Potenzreihenalgebra von k ist. Ist $A \longrightarrow B$ ein k-Homomorphismus von analytischen k-Algebren, so existiert der universell-endliche A-Differentialmodul $D_A^e(B)$ von B (vgl. Bem. 4, §1).

(6.2) Aussage. Sei $A \longrightarrow B$ ein k-Homomorphismus von analytischen k-Algebren. Dann sind äquivalent:

(1) B ist unverzweigt über A .

(2) $D_A^e(B) = 0$.

(3) Es ist $\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B$ und $B/\mathfrak{M}$ ist separabel über $A/A \cap \mathfrak{M}$ für

maximale
jedes Ideal $\mathfrak{M} \subseteq B$.

Beweis. Die Implikation (1) $\Longrightarrow$ (2) ist trivial, da $D_A^e(B)$ ein Faktormodul von $D_A(B)$ ist. Sei (2) erfüllt. Mit $D_A^e(B)$ ist auch $D_A^e(B/\mathfrak{m}_B^2)$ gleich 0 . Da $B/\mathfrak{m}_B^2$ endliche k-Algebra ist, also auch endliche A-Algebra, gilt $D_A(B/\mathfrak{m}_B^2) = D_A^e(B/\mathfrak{m}_B^2) = 0$. Aus (3.3) folgt daraus $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A B + \mathfrak{m}_B^2$, also $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A B$. Ferner folgt aus (3.3), daß die Erweiterung der Restekörper separabel ist. Somit ergibt sich (3) aus (2) . Sei nun (3) erfüllt. Aus $\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B$ folgt, daß B quasiendlich über A und damit nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz auch endlich über A ist. Damit ist auf die Algebra $A \longrightarrow B$ Satz (3.3) anwendbar, der die Implikation (3) $\Longrightarrow$ (1) liefert.

(6.3) Korollar. Sei $A \longrightarrow B$ ein k-Homomorphismus lokaler analytischer k-Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Dann sind äquivalent:

(1) B ist unverzweigt über A .

(2) $A \longrightarrow B$ ist surjektiv.

Beweis. Sei (1) erfüllt. Nach (6.2) ist $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A B$. Daraus folgt, daß B endlich über A ist. Aus dem Lemma von Krull-Nakayama folgt weiter wegen $B/\mathfrak{m}_A B = B/\mathfrak{m}_B = k = A/\mathfrak{m}_A$, daß $B = A \cdot 1_B$ ist. Das beweist (2) . Die Umkehrung ist trivial.

(6.4) Aussage. Sei $X \xrightarrow{h} Y$ ein Homomorphismus komplexer Räume. Dann gilt:

$$\mathrm{Vzw}_Y^X = \mathrm{Tr}\,\mathcal{D}_Y(X) = \mathrm{Tr}\,\Omega_Y(X) \ .$$

Für $x \in X$ gilt $x \notin \mathrm{Vzw}_Y^X$ genau dann, wenn der Homomorphismus $\mathcal{O}_{Y,h(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ surjektiv ist. Vzw_Y^X ist eine analytische Menge in X .

Beweis. Die Aussage (6.4) ergibt sich direkt aus (6.1), (6.2) und (6.3). Daß Vzw_Y^X analytisch ist, ergibt sich daraus, daß der Träger eines jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduls (offenbar) analytisch ist.

(6.5) Korollar. Sei $X \xrightarrow{h} Y$ ein Homomorphismus komplexer Räume, $x \in X$ und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spek}\,\mathcal{O}_{X,x}$. Genau dann ist $(\Omega_Y(X)_x)_{\mathfrak{p}} = 0$, wenn $N(\mathfrak{p}) \nsubseteq (\mathrm{Vzw}_Y^X)_x$ ist. Dabei bezeichnet $N(\mathfrak{p})$ den Mengenkeim des Primideals $\mathfrak{p}$ in x und $(\mathrm{Vzw}_Y^X)_x$ den Mengenkeim von Vzw_Y^X in x .

Beweis. Es ist $(\mathrm{Vzw}_Y^X)_x = (\mathrm{Tr}\,\Omega_Y(X))_x = N(\mathrm{Ann}\,\Omega_Y(X)_x)$.

$(\Omega_Y(X)_x)_{\mathfrak{p}} = 0$ bedeutet $\mathrm{Ann}\,\Omega_Y(X)_x \not\subset \mathfrak{p}$. Jetzt folgt die Behauptung aus dem Hilbertschen Nullstellensatz.

Bemerkung 2 . Die Situation sei dieselbe wie in (6.5). Es sei $A := \mathcal{O}_{Y,h(x)}$, $B := \mathcal{O}_{X,x}$. Dann ist $\Omega_Y(X)_x = D_A^e(B)$. Die Eigenschaft $D_A^e(B)_{\mathfrak{p}} = 0$ läßt sich im allgemeinen nicht ohne weiteres mittels einfacher Eigenschaften der Algebra $A_{A\cap\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}$ umschreiben, etwa analog zu (3.3). $D_A^e(B)_{\mathfrak{p}} = 0$ bedeutet im allgemeinen auch nicht, daß $\mathfrak{p}$ über A unverzweigt ist (im Sinne der Definition von §2 . Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_B$ ist dies nach (6.2) allerdings richtig). Betrachten wir ein Beispiel: Es sei A der Potenzreihenring $\mathbb{C}\langle\langle u,v,w\rangle\rangle$, B der Potenzreihenring $\mathbb{C}\langle\langle x,y,z\rangle\rangle$ und $A \longrightarrow B$ der $\mathbb{C}$-Homomorphismus mit

$$u \longmapsto zx \ , \ v \longmapsto z\exp(x) \ , \ w \longmapsto zg(y) \ ,$$

wobei $g(t) \in \mathbb{C}\langle\langle t\rangle\rangle$ eine Potenzreihe ist, für die $t, \exp(t)$, $g(t)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$ sind. Ferner sei dg/dt eine Einheit in $\mathbb{C}\langle\langle t\rangle\rangle$. Dann ist $D_A^e(B) \cong B^3/R$, wobei R erzeugt wird von

$$\langle z,0,x\rangle \ , \ \langle z\exp(x),0,\exp(x)\rangle \ , \ \langle 0,zg'(y),g(y)\rangle \ .$$

Das 0-te Fittingideal von $D_A^e(B)$ wird erzeugt von $z^2\exp(x)g'(y)(x-1)$, also von z^2 . Somit ist $\mathrm{Tr}D_A^e(B) = V(z)$. Sei nun $\mathfrak{p} = B(x-y)$. Es ist $D_A^e(B)_{\mathfrak{p}} = 0$. Ferner ist $\mathfrak{p}\cap A = 0$. Der Homomorphismus

$$A \longrightarrow B/\mathfrak{p} = \mathbb{C}\langle\langle x,z\rangle\rangle$$
$$u \longmapsto zx \ , \ v \longmapsto z\exp(x) \ , \ w \longmapsto zg(x)$$

ist nämlich wegen der algebraischen Unabhängigkeit von $x, \exp(x), g(x)$ injektiv, wie man unmittelbar prüft. Mit $D_A(B)_{\mathfrak{p}} = 0$ ist auch $D_A(B/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = 0$. Es ist aber $(B/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = \varkappa(\mathfrak{p})$ nicht unverzweigt über $\varkappa(A\cap\mathfrak{p}) = \mathrm{Quot}\,A$, d.h. diese Körpererweiterung ist nicht algebraisch. (Ist z.B. $h(x) \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}[x,\exp(x),g(x)]$, so ist $zh(x)$ algebraisch unabhängig über A , da die Fortsetzung $A\langle\langle t\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle x,z\rangle\rangle$ mit $t \longmapsto zh(x)$ ebenfalls injektiv ist.) Überdies ist nicht $(A\cap\mathfrak{p})B_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$.

§7. Henselsche Ringe und Henselisierung

In diesem Paragraphen beschreiben wir kurz, wie jedem lokalen

Ring in natürlicher Weise ein henselscher Ring, nämlich seine Henselisierung zugeordnet ist.

Zunächst definieren wir:

Definition. Es seien A ein lokaler Ring und B eine lokale A-Algebra, deren Strukturhomomorphismus $A \longrightarrow B$ lokal ist. B heißt eine lokale etale A-Algebra, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) B ist als A-Algebra isomorph zu einer Lokalisierung einer endlichen A-Algebra.
2) B ist unverzweigt über A .
3) B ist flach über A .

Ist B eine lokale etale A-Algebra, so ist $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A B$, vgl. (3.3). Ist ferner C eine lokale etale B-Algebra, so ist C auch eine lokale etale A-Algebra.

Definition. Ein lokaler Ring A heißt henselsch, wenn jede lokale etale A-Algebra, deren Restekörper mit dem von A übereinstimmt, zu A isomorph ist.

Die nächste Aussage gibt die klassische Beschreibung der henselschen Ringe.

(7.1) Satz. Sei A ein lokaler Ring mit Restekörper k . Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) A ist henselsch.
b) Ist $F \in A[X]$ ein normiertes Polynom und ist $\overline{F} = \overline{G}\cdot\overline{H}$ eine Zerlegung der Restklasse $\overline{F}$ von F in $k[X]$ als Produkt zweier teilerfremder normierter Polynome $\overline{G},\overline{H} \in k[X]$, so gibt es normierte Polynome $G,H \in A[X]$ mit $F = G\cdot H$, deren Restklassen in $k[X]$ mit $\overline{G}$ bzw. $\overline{H}$ übereinstimmen.
c) Ist $F \in A[X]$ ein normiertes Polynom, dessen Restklasse in $k[X]$ von der Form $(X-1)X^d$ ist, so besitzt F in A eine Nullstelle f mit $f \equiv 1$ modulo $\mathfrak{m}_A$.
d) Ist B eine semilokale A-Algebra, die ganz über A ist, so ist B direktes Produkt von lokalen A-Algebren.
e) Ist B eine endliche A-Algebra, so ist B direktes Produkt von lokalen A-Algebren.

Bemerkung 1 . Die Eigenschaft in d) bzw. e) kann man offenbar auch dadurch beschreiben, daß unter den gegebenen Voraussetzungen der kanonische Homomorphismus $B \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} B_{\mathfrak{M}_i}$ bijektiv ist, wobei $\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_r$ die verschiedenen maximalen Ideale von

B sind.

Bemerkung 2 . Die Charakterisierung durch d) zeigt sofort: Sei A ein henselscher lokaler Ring. Ist A' eine lokale A-Algebra, die ganz über A ist, so ist auch A' henselsch. Beispielsweise sind Lokalisierungen endlicher A-Algebren nach maximalen Idealen wieder henselsch, und ebenso die nichttrivialen Restklassenringe von A .

Beweis von (7.1). Wir zeigen der Reihe nach: a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ a) , b) $\Longrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ e) $\Longrightarrow$ a) .

Die Implikation a) $\Longrightarrow$ b) ergibt sich offenbar aus folgendem Lemma:

(7.2) Aussage. Mit den Bezeichnungen von (7.1),b) gilt: Es gibt eine lokale etale A-Algebra A' mit gleichem Restekörper wie A und normierte Polynome $G', H' \in A'[X]$ mit $F = G' \cdot H'$, deren Restklassen in $(A'/\mathfrak{m}_{A'})[X] = k[X]$ mit $\bar{G}$ bzw. $\bar{H}$ übereinstimmen.

Beweis von (7.2). Sei $F = a_0 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$. Ferner sei $r := \operatorname{grad} \bar{G}$, $s := \operatorname{grad} \bar{H}$. Es ist $n = r+s$. Wir betrachten die A-Algebra

$$B := A[Y_0, \ldots, Y_r , Z_0, \ldots, Z_s]/\mathfrak{a} ,$$

wobei $\mathfrak{a}$ das von den Polynomen

$$\sum_{\substack{i+j=\mu \\ 0\leq i\leq r \\ 0\leq j\leq s}} Y_i Z_j - a_\mu , \quad \mu = 0, \ldots, n-1 \; ; \; Y_r - 1 , \; Z_s - 1$$

erzeugte Ideal ist. Die Restklassen von Y_i und Z_j bezeichnen wir mit y_i bzw. z_j . B ist eine endliche freie A-Algebra. Es genügt dafür zu zeigen, daß

$$\tilde{B} := \mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_{n-1} \; ; \; Y_0, \ldots, Y_r , Z_0, \ldots, Z_s]/\tilde{\mathfrak{a}} ,$$

wobei $\tilde{\mathfrak{a}}$ von

$$\sum_{\substack{i+j=\mu \\ 0\leq i\leq r \\ 0\leq j\leq s}} Y_i Z_j - X_\mu , \quad \mu = 0, \ldots, n-1 \; ; \; Y_r - 1 , \; Z_s - 1$$

erzeugt wird, eine endliche projektive $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$-Algebra ist, da B durch Grundringerweiterung $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_{n-1}] \longrightarrow A$, $X_\mu \longrightarrow a_\mu$, aus dieser Algebra entsteht. Seien $U_0, \ldots, U_{r-1}$, $V_0, \ldots, V_{s-1}$ Unbestimmte. Die Polynome $S_i \in \mathbb{Z}[U_0, \ldots, U_{r-1}]$,

$T_j \in \mathbb{Z}[V_0,\dots,V_{s-1}]$ bzw. $R_m \in \mathbb{Z}[U_0,\dots,U_{r-1},V_0,\dots,V_{s-1}]$ seien durch

$$(X-U_0)\dots(X-U_{r-1}) = S_0+\dots+S_{r-1}X^{r-1}+X^r$$
$$(X-V_0)\dots(X-V_{s-1}) = T_0+\dots+T_{s-1}X^{s-1}+X^s$$
$$(X-U_0)\dots(X-U_{r-1})(X-V_0)\dots(X-V_{s-1}) = R_0+\dots+R_{n-1}X^{n-1}+X^n$$

definiert. Ferner sei $S_r := 1$, $T_s := 1$. Dann ist

$$R_\mu = \sum_{\substack{i+j=\mu \\ 0\leq i\leq r \\ 0\leq j\leq s}} S_i T_j \ , \ \mu = 0,\dots,n-1 \ .$$

Nach dem Hauptsatz über elementarsymmetrische Funktionen sind $\mathbb{Z}[R_0,\dots,R_{n-1}] \subseteq \mathbb{Z}[U_0,\dots,U_{r-1},V_0,\dots,V_{s-1}]$ und $\mathbb{Z}[S_0,\dots,S_{r-1},T_0,\dots,T_{s-1}] \subseteq \mathbb{Z}[U_0,\dots,U_{r-1},V_0,\dots,V_{s-1}]$ endliche freie Erweiterungen von Polynomringen. Also ist auch die Erweiterung $\mathbb{Z}[R_0,\dots,R_{n-1}] \subseteq \mathbb{Z}[S_0,\dots,S_{r-1},T_0,\dots,T_{s-1}]$ zumindest noch projektiv. Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[R_0,\dots,R_{n-1}] \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{Z}[S_0,\dots,S_{r-1},T_0,\dots T_{s-1}] \arrow[d] \\
\mathbb{Z}[X_0,\dots,X_{n-1}] \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

mit $R_m \longmapsto X_m$, $S_i \longmapsto y_i$, $T_j \longrightarrow z_j$ kommutativ ist und die vertikalen Pfeile Isomorphismen sind, folgt das gewünschte Resultat.

Der Differentialmodul $D_A(B)$ ist der Faktormodul von B^n nach dem von den n Vektoren

$$\begin{array}{l}
\langle z_0,0,\dots,0,y_0,0,\dots,0\rangle \\
\langle z_1,z_0,\dots,0,y_1,y_0,\dots,0\rangle \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\langle 1,z_{s-1},\dots,\dots\dots\dots\rangle \\
\langle 0,1\ ,\dots,\dots\dots\dots\rangle \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\langle 0,\dots\dots,1,0,\dots\dots 1\rangle
\end{array}$$

erzeugten Untermodul. Das 0-te Fittingideal von $D_A(B)$ ist also gerade das von der Resultante der Polynome

$$y_0+\dots+y_{r-1}X^{r-1}+X^r \ , \ z_0+\dots+z_{s-1}X^{s-1}+X^s$$

erzeugte Hauptideal. Der vorgegebenen Zerlegung $\overline{F} = \overline{G}\cdot\overline{H}$ in $k[X]$ entspricht ein (surjektiver) A-Homomorphismus $B \longrightarrow k$ mit $y_i \longmapsto \overline{b}_i$, $z_j \longmapsto \overline{c}_j$, wobei $\overline{b}_i$ und $\overline{c}_j$ die Koeffizienten von

$\bar{G}$ bzw. $\bar{H}$ sind. Der Kern dieses Homomorphismus ist ein maximales Ideal $\mathfrak{M} \subseteq B$. Da $\bar{G}$ und $\bar{H}$ teilerfremd sind, verschwindet die Resultante von $\bar{G}$ und $\bar{H}$ nicht, und dies bedeutet, daß $\varphi_o^B(D_A(B)) \not\subseteq \mathfrak{M}$ ist. Damit ist $A' := B_{\mathfrak{M}}$ nach (2.1) unverzweigt über A , und A' ist sogar eine etale A-Algebra mit $A'/\mathfrak{m}_{A'} = B_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{M}B_{\mathfrak{M}} = B/\mathfrak{M} = k$. In $A'[X]$ gilt:

$$F = (y_o/1+\ldots+(y_{r-1}/1)X^{r-1}+X^r)(z_o/1+\ldots+(z_{s-1}/1)X^{s-1}+X^s).$$

Da außerdem nach Konstruktion die Restklassen der angegebenen Faktoren von F in $(A'/\mathfrak{m}_{A'})[X]$ mit $\bar{G}$ bzw. $\bar{H}$ übereinstimmen, ist (7.2) vollständig bewiesen.-

Wir fahren im Beweis von (7.1) fort. Aus b) folgt c) trivialerweise. Aus c) folgt a) : Sei c) gültig und $B = C_{\mathfrak{M}}$ eine lokale etale A-Algebra, wobei C eine endliche A-Algebra ist und $\mathfrak{M} \subseteq C$ ein maximales Ideal. Ferner sei $C/\mathfrak{M} = k$. Wir haben zu zeigen, daß der Strukturhomomorphismus $A \longrightarrow B$ bijektiv ist. Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ die verschiedenen maximalen Ideale von C . Es genügt zu zeigen, daß es ein idempotentes Element $e \in C$ gibt mit $e \equiv 1$ modulo $\mathfrak{M}$ und $e \equiv 0$ modulo $\mathfrak{M}_i$, $i = 1,\ldots,r$. Denn dann ist $C = C/Ce \times C/C(1-e)$ und $C_{\mathfrak{M}} = (C/Ce)_{\mathfrak{M}} \times (C/C(1-e))_{\mathfrak{M}} = (C/C(1-e))_{\mathfrak{M}} = C/C(1-e)$. B ist somit selbst endlich über A . Aus dem Lemma von Nakayama folgt nun wegen $B/\mathfrak{m}_A B = A/\mathfrak{m}_A$ die Behauptung.

Sei zunächst $\tilde{e} \in C$ ein beliebiges Element mit $\tilde{e} \equiv 1$ modulo $\mathfrak{M}$ und $\tilde{e} \equiv 0$ modulo $\mathfrak{M}_i$, $i = 1,\ldots,r$. Wir betrachten die Unteralgebra $A[\tilde{e}]$ von C . Es seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ die Durchschnitte von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ mit $A[\tilde{e}]$. Es sind dies alle maximalen Ideale in $A[\tilde{e}]$. Ferner gilt $\tilde{e} \equiv 1$ modulo $\mathfrak{P}$, $\tilde{e} \equiv 0$ modulo $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$, so daß $\mathfrak{M}$ das einzige maximale Ideal in C ist, das über $\mathfrak{P}$ liegt. Es ist somit $C_{\mathfrak{M}} = C_{\mathfrak{P}}$. Nach dem Lemma von Nakayama ist $A[\tilde{e}]_{\mathfrak{P}} \longrightarrow C_{\mathfrak{M}} = C_{\mathfrak{P}}$ bijektiv. Wir können also gleich $C = A[\tilde{e}]$ und $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r = \mathfrak{P}_r$ annehmen. Sei $\bar{F}$ das Minimalpolynom der Restklasse von $\tilde{e}$ in $A[\tilde{e}]/\mathfrak{m}_A A[\tilde{e}]$ über k. Dann ist $A[\tilde{e}]/\mathfrak{m}_A A[\tilde{e}] \cong k[X]/(\bar{F})$. Ist n der Grad von $\bar{F}$, so erzeugen $1,\ldots,\tilde{e}^{n-1}$ die Algebra $A[\tilde{e}]$, und es gibt ein normiertes Polynom $F \in A[X]$ mit $F(\tilde{e}) = 0$ und $\bar{F} = (F \text{ modulo } \mathfrak{m}_A)$. Sei $\bar{F} = \bar{Q}\bar{Q}_1 \ldots \bar{Q}_r$ die Zerlegung von $\bar{F}$ in Primpolynompotenzen. Dabei mögen der Faktor $\bar{Q}$ dem Primideal $\mathfrak{P}$ und die übrigen Faktoren den $\mathfrak{P}_i$ entsprechen. Wegen $\tilde{e} \equiv 1$ modulo $\mathfrak{P}$ und $\tilde{e} \equiv 0$ modulo $\mathfrak{P}_i$, $i = 1,\ldots,r$, teilt $X-1$ den Primfaktor von $\bar{Q}$ und X diejenigen der $\bar{Q}_i$. Es ist $r \leq 1$. Da außerdem $\mathfrak{P} A[\tilde{e}] = \mathfrak{m}_A A[\tilde{e}]$ ist, muß $\bar{Q} = X-1$ seien. Somit ist $\bar{F}$ von der Form $(X-1)X^d$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $f \in A$ mit $F = (X-f)\cdot H$, wobei $f \equiv 1$ modulo $\mathfrak{m}_A$ und $H \equiv X^d$ modulo $\mathfrak{m}_A$ ist. Da die Restklassen von $X-f$ und H in $k[X]$ ganz $k[X]$ erzeugen, gilt auch $A[X] = (X-f)A[X]+H\cdot A[X]$. Also ist $A[X]/F\cdot A[X] = (A[X]/(X-f)A[X]) \times (A[X]/H\cdot A[X])$. $A[\tilde{e}]$ ist eine Restklassenalgebra von $A[X]/FA[X]$. Die Urbilder von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ in $A[X]/FA[X]$ seien $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}_1'$. Wegen der angegebenen Zerlegung von $A[X]/FA[X]$ gibt es ein idempotentes Element e' in $A[X]/FA[X]$ mit $e' \equiv 1$ modulo $\mathfrak{P}'$ und $e' \equiv 0$ modulo $\mathfrak{P}_1'$. Dann ist das Bild von e' in $A[\tilde{e}]$ ein idempotentes Element der gewünschten Art.

Aus b) folgt d). Sei b) gültig und B zunächst von der Form $A[X]/F\cdot A[X]$ mit einem normierten Polynom $F \in A[X]$. Sei $\bar{F}$ die Restklasse von F in $k[X]$ und $\bar{F} = \bar{Q}_1\cdot\ldots\cdot\bar{Q}_r$ die Zerlegung von $\bar{F}$ in $k[X]$ in normierte paarweise teilerfremde Primpolynompotenzen $\bar{Q}_i$. Durch sukzessives Anwenden von b) erhalten wir daraus eine Zerlegung $F = Q_1\cdot\ldots\cdot Q_r$ von F in $A[X]$ in normierte Polynome Q_i , deren Restklassen in $k[X]$ mit $\bar{Q}_i$ übereinstimmen. Wegen $k[X] = \bar{Q}_i k[X]+\bar{Q}_j k[X]$ ist auch $A[X] = Q_i A[X]+Q_j A[X]$ für $i \neq j$. Also ist $A[X]/FA[X] = \prod_{i=1}^{r} A[X]/Q_i A[X]$ und die $A[X]/Q_i A[X]$ sind lokal.

Sei jetzt B beliebig semilokal und ganz über A . $\mathfrak{M}_1,\ldots,\mathfrak{M}_r$ seien die verschiedenen maximalen Ideale von B . Es genügt zu zeigen, daß es idempotente Elemente $e_i \in B$, $i = 1,\ldots,r$, mit folgender Eigenschaft gibt: Es ist $e_i \equiv 1$ modulo $\mathfrak{M}_i$ und $e_i \equiv 0$ modulo $\mathfrak{M}_j$, $j \neq i$. Denn dann ist $e_i e_j$, $i \neq j$, ein idempotentes Element mit $e_i e_j \in \bigcap_{\nu=1}^{r}\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{m}_B$, also $e_i e_j = 0$, und $-1+\sum_{i=1}^{r} e_i$ ein idempotentes Element aus $\mathfrak{m}_B$, was $\sum_{i=1}^{r} e_i = 1$ bedeutet. Somit ist $B = \prod_{i=1}^{r} Be_i$. Wegen $B_i := Be_i \neq 0$ ist B_i notendigerweise lokal (da sonst B mehr als r maximale Ideale enthält). Nun zum Beweis der Existenz der e_i . Es gibt ein $\tilde{e}_i \in B$ mit $\tilde{e}_i \equiv 1$ modulo $\mathfrak{M}_i$, $\tilde{e}_i \equiv 0$ modulo $\mathfrak{M}_j$, $j \neq i$ (Chinesischer Restsatz). Sei F ein normiertes Polynom $\neq 0$ in $A[X]$ mit $F(\tilde{e}_i) = 0$. Es gibt einen Homomorphismus $A[X]/FA[X] \longrightarrow B$ mit $x \longrightarrow \tilde{e}_i$, wobei x die Restklasse von X bezeichnet. Sei $\mathfrak{P}$ das Urbild von $\mathfrak{M}_i$ in $A[X]/FA[X]$; $\mathfrak{P}_2,\ldots,\mathfrak{P}_t$ seien die von $\mathfrak{P}$ verschiedenen maximalen Ideale in $A[X]/FA[X]$. Offenbar ist für $j \neq i$ das Urbild von $\mathfrak{M}_j$ in $A[X]/FA[X]$ von $\mathfrak{P}$ verschieden. Nach der Vorbemerkung gibt es ein idempotentes Element e in $A[X]/FA[X]$ mit $e \equiv 1$ modulo $\mathfrak{P}$ und $e \equiv 0$ modulo $\mathfrak{P}_i$, $i = 1,\dots,t$. Dann ist aber das Bild e_i von e in B ein idempotentes Element in B mit den geforderten Eigenschaften: $e_i \equiv 1$ modulo $\mathfrak{M}_i$, $e_i \equiv 0$ modulo $\mathfrak{M}_j$, $j \neq i$.

e) ist eine Abschwächung von d) . Zum Beweis von e)$\Longrightarrow$ a) sei B eine etale A-Algebra mit gleichem Restkörper wie A . Es ist $B = C_{\mathfrak{M}}$ mit einer endlichen A-Algebra C . Weil e) gilt, ist $B = C_{\mathfrak{M}}$ als A-Modul direkter Summand von C , also eine endliche A-Algebra. Wegen $B/\mathfrak{m}_A B = B/\mathfrak{m}_B = k$ wird B nach dem Lemma von Krull-Nakayama als A-Modul von dem Einselement erzeugt. Da B überdies flacher A-Modul ist, ist $A \longrightarrow B$ injektiv; somit sind B und A als A-Algebren isomorph.

<u>(7.3) Korollar</u>. Ist A eine lokale analytische k-Algebra, wobei k ein beliebiger bewerteter Körper ist, so ist A henselsch.

<u>Beweis</u>. Wegen Bemerkung 2 genügt es zu zeigen, daß ein Potenzreihenring $P := k\langle\langle X_1,\dots,X_n\rangle\rangle$ henselsch ist. Dazu verifizieren wir Bedingung c) in (7.1). Sei $F \in P[X]$ normiert und $F \equiv (X-1)X^d$ modulo $\mathfrak{m}_P$. Das Polynom $G := F(X+1)$ hat dann modulo $\mathfrak{m}_P$ die Gestalt $X(X+1)^d$. Somit bilden $X_1,\dots,X_n$, G in $k\langle\langle X_1,\dots,X_n,X\rangle\rangle$ ein reguläres Parametersystem, der kanonische P-Homomorphismus

$$P \longrightarrow P\langle\langle X\rangle\rangle/(G)$$

ist bijektiv. Ist $f' \in \mathfrak{m}_P$ ein Element, das auf die Restklasse von X in $P\langle\langle X\rangle\rangle/(G)$ abgebildet wird, so ist $G(f') = 0$, d.h. aber $F(f'+1) = 0$. Mit $f := f'+1$ ist dann die gesuchte Nullstelle von F gefunden.

<u>Bemerkung 3</u> . Ähnlich wie im Beweis zu (7.3) zeigt man leicht, daß jeder komplette noethersche lokale Ring A henselsch ist. Man kann auch leicht direkt zeigen, daß jede lokale etale A-Algebra B mit gleichem Restekörper mit A übereinstimmt: Zunächst ist B quasifinit über A . Eine simple Konvergenzüberlegung (vgl. [11], II, (2.5)) lehrt dann, daß B endlich über A ist. Nach dem Lemma von Krull-Nakayama ist B dann Restklassenalgebra von A. Da B flach über A ist, bedeutet das $A = B$. - Insbesondere ist jeder nulldimensionale noethersche lokale

Ring henselsch.

Einem jeden lokalen Ring A läßt sich in natürlicher Weise seine <u>Henselisierung</u> A^h zuordnen. Das ist eine lokale henselsche A-Algebra mit einem lokalen Strukturhomomorphismus $A \longrightarrow A^h$ und folgender universeller Eigenschaft: Ist $A \longrightarrow B$ ein beliebiger lokaler Homomorphismus in einen henselschen lokalen Ring B , so gibt es genau einen A-Homomorphismus $A^h \longrightarrow B$. Die A-Algebra A^h wird folgendermaßen konstruiert: Offenbar gibt es eine Indexmenge I und eine Familie $A_i, i \in I$, von lokalen etale A-Algebren A_i mit folgenden Eigenschaften: Die Restekörper von A_i stimmen mit dem Restekörper von A überein; für eine beliebige lokale etale A-Algebra B , deren Restekörper mit dem von A übereinstimmt, gibt es genau ein $i \in I$ mit $B \cong A_i$ (als A-Algebren). Dann wird durch

> „$i \leq j$ genau dann, wenn es einen A-Homomorphismus $A_i \longrightarrow A_j$ gibt"

eine Ordnung auf I definiert, bezüglich der I nach oben gerichtet ist. Die Transitivität und Reflexivität dieser Relation sind klar. Die Antisymmetrie ergibt sich aus folgendem Hilfssatz:

<u>(7.4) Aussage</u>. Seien A,B,C lokale Ringe; B,C seien A-Algebren mit lokalen Strukturhomomorphismen. Es sei $B/\mathfrak{m}_A B = A/\mathfrak{m}_A$. Der Kern der Multiplikation $B \otimes_A B \longrightarrow B$ werde endlich erzeugt. Dann gibt es höchstens einen A-Homomorphismus $B \longrightarrow C$.

<u>Beweis von (7.4)</u>. Seien $\varphi, \psi : B \longrightarrow C$ zwei A-Homomorphismen. Diese induzieren einen A-Homomorphismus $\chi : B \otimes_A B \longrightarrow C$, $b_1 \otimes b_2 \longmapsto \varphi(b_1)\psi(b_2)$. Da B über A unverzweigt ist, wird der Kern I der Multiplikation $B \otimes_A B \longrightarrow B$ nach (2.4) von einem idempotenten Element e erzeugt. Deshalb ist $\chi(e)$ ebenfalls idempotent in C , also gleich 0 oder 1 . Da φ und ψ modulo $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A B$ identisch sind, gilt $\chi(I) \subseteq \mathfrak{m}_A C \subseteq \mathfrak{m}_C$, somit ist $\chi(e) = 0$ und damit $\chi(I) = 0$, d.h. aber es ist $0 = \chi(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = \varphi(b) - \psi(b)$ für alle $b \in B$. -

Jetzt folgt die Antisymmetrie der oben angegebenen Relation auf der Indexmenge I folgendermaßen: Ist $i \leq j$ und $j \leq i$, so gibt es A-Homomorphismen $\varphi : A_i \longrightarrow A_j$ und $\psi : A_j \longrightarrow A_i$. Nach (7.4) ist dann notwendigerweise $\psi\varphi = id_{A_i}$, $\varphi\psi = id_{A_j}$, also $A_i \cong A_j$, d.h. $i = j$.

I ist mit der angegebenen Ordnung nach oben gerichtet. Seien $i,j \in I$ und $A_i = B_{\mathfrak{m}}$, $A_j = C_{\mathfrak{n}}$ mit endlichen A-Algebren B,C und maximalen Idealen $\mathfrak{m} \subseteq B$, $\mathfrak{n} \subseteq C$. Dann ist $\mathfrak{P} := \mathfrak{m}(B \otimes_A C) + \mathfrak{n}(B \otimes_A C)$ wegen $(B \otimes_A C)/\mathfrak{P} = B/\mathfrak{m} \otimes_A C/\mathfrak{n} = (A/\mathfrak{m}_A) \otimes_A (A/\mathfrak{m}_A) = A/\mathfrak{m}_A$ ein maximales Ideal in $B \otimes_A C$, und $(B \otimes_A C)_{\mathfrak{P}}$ ist lokal etale mit gleichem Restekörper wie A. (Denn $(B \otimes_A C)_{\mathfrak{P}}$ ist Lokalisierung von $A_i \otimes_A A_j$.) Es gibt ein $r \in I$ mit $(B \otimes_A C)_{\mathfrak{P}} \cong A_r$, offenbar ist $i,j \leq r$.

Ist $i \leq j$, so gibt es nach (7.4) genau einen A-Homomorphismus $\varphi_{ji} := A_i \longrightarrow A_j$. Offenbar ist (A_i, φ_{ji}) ein induktives System lokaler A-Algebren A_i mit lokalen A-Homomorphismen φ_{ji}. Wir behaupten nun, daß

$$A^h := \varinjlim_{i \in I} A_i$$

eine Henselisierung von A ist. Zunächst bemerken wir, daß A^h denselben Restekörper wie A hat. Ferner ist A^h flach über A mit $\mathfrak{m}_{A^h} = \mathfrak{m}_A A^h$. Um zu zeigen, daß A^h henselsch ist, verifizieren wir Bedingung b) aus (7.1). Sei F ein normiertes Polynom über A^h und $\overline{F} = \overline{G} \cdot \overline{H}$ eine Zerlegung in normierte teilerfremde Polynome $\overline{G}, \overline{H}$ über dem Restekörper. Es gibt ein $i \in I$ und ein normiertes Polynom $F_i \in A_i[X]$, so daß F mit dem kanonischen Bild von F_i übereinstimmt. Nach (7.2) gibt es eine Zerlegung $F_i = G'H'$ über einer lokalen etale Erweiterung A' von A_i mit gleichem Restekörper, die die gegebene Zerlegung über dem Restekörper induziert. Es gibt ein $j \geq i$ mit $A' \cong A_j$, da A' auch lokal etale über A ist. Mit dem kanonischen Homomorphismus $A_j \longrightarrow A^h$ bekommt man dann die gewünschte Zerlegung über A^h. Die universelle Eigenschaft von A^h ergibt sich so: Sei B eine henselsche lokale A-Algebra mit lokalem Strukturhomomorphismus $A \longrightarrow B$. In $A_i \otimes_A B$ ist $\mathfrak{m}_i := \mathfrak{m}_A(A_i \otimes_A B) + \mathfrak{m}_B(A_i \otimes_A B)$ ein maximales Ideal derart, daß $(A_i \otimes_A B)_{\mathfrak{m}_i}$ eine lokale etale B-Algebra mit gleichem Restekörper wie B ist. Also ist $(A_i \otimes_A B)_{\mathfrak{m}_i} \cong B$, und es gibt einen A-Homomorphismus $\varphi_i : A_i \longrightarrow B$, der nach (7.4) auch der einzige ist. Dann ist $\varinjlim \varphi_i$ wohldefiniert und der gesuchte A-Homomorphismus von A^h in B. Dieser ist eindeutig, da die Kompositionen $A_i \longrightarrow A^h \longrightarrow B$ von A_i in B eindeutig sind. Übrigens ist er auch lokal.

Wir fassen noch einmal zusammen:

<u>(7.5) Satz</u>. Zu jedem lokalen Ring A existiert die Henselisierung A^h . Diese ist eine henselsche lokale treu-flache A-Algebra mit $A^h/\mathfrak{m}_A A^h = A/\mathfrak{m}_A$.

Aus (7.1) folgt noch:

<u>(7.6) Aussage</u>. Ist $A \longrightarrow A'$ eine ganze Erweiterung lokaler Ringe und ist A^h die Henselisierung von A , so ist $A' \otimes_A A^h$ die Henselisierung von A' .

<u>Beweis</u>. Da $A^h \longrightarrow A' \otimes_A A^h$ ebenfalls ganz ist und $(A' \otimes_A A^h)/\mathfrak{m}_{A^h}(A' \otimes_A A^h) = A' \otimes_A (A^h/\mathfrak{m}_{A^h}) = A' \otimes_A (A/\mathfrak{m}_A) = A'/\mathfrak{m}_A A'$ gilt, ist $A' \otimes_A A^h$ nach der Bemerkung 2 ein lokaler und henselscher Ring. Daß er die universelle Eigenschaft besitzt, ergibt sich aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes.

KAPITEL II: DISKRIMINANTEN

§8. Charakteristische Polynome bei projektiven Moduln

Sei A ein (kommutativer) Ring. Ist M ein endlicher projektiver A-Modul, und gibt es ein n derart, daß für alle $\mathfrak{p}$ aus Spek A gilt $M_{\mathfrak{p}} \cong (A_{\mathfrak{p}})^n$, so heißt M ein projektiver A-Modul vom Rang n. Ein endlicher A-Modul ist bereits dann projektiv vom Rang n, wenn für alle $\mathfrak{p}$ aus Spek A gilt $M_{\mathfrak{p}} \cong (A_{\mathfrak{p}})^n$. Ist A semilokal (d.h. besitzt A nur endlich viele maximale Ideale), so ist jeder projektive Modul vom Rang n über A sogar frei vom Rang n über A. Zu diesen Begriffen und Sätzen sei generell auf N. Bourbaki, Algèbre commutative, chap. II, §5 verwiesen, ferner, was die Grundringerweiterung betrifft, chap. I. So gilt beispielsweise: Ist A' eine A-Algebra und M projektiver endlicher A-Modul (vom Rang n), so ist auch $A' \otimes_A M$ projektiver endlicher A'-Modul (vom Rang n). Den umgekehrten Schluß kann man ausführen, wenn A' treuflach über A ist.

Sei M ein projektiver A-Modul vom Rang n. Dann ist das n-te äußere Produkt $\bigwedge^n M$ ein projektiver A-Modul vom Rang 1, und der kanonische Homomorphismus $A \longrightarrow \mathrm{End}_A(\bigwedge^n M)$, der $a \in A$ das Multiplizieren mit a auf $\bigwedge^n M$ zuordnet, ist bijektiv. Ist $h \in \mathrm{End}_A M$, so ist das solcherart dem Endomorphismus $\bigwedge^n h$ von $\bigwedge^n M$ eindeutig zugeordnete Element von A die Determinante det h. Da äußere Produkte mit Grundringerweiterungen verträglich sind, gilt:

(8.1) Grundringerweiterung. Sei $\varphi\colon A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus, M ein projektiver A-Modul vom Rang n und $h \in \mathrm{End}_A M$. Dann ist $A' \otimes_A M$ ein projektiver A'-Modul des Ranges n, und man hat

$$\det(A' \otimes h) = \varphi(\det h) .$$

Daß Homomorphismen von A-Moduln injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv sind und daß Elemente von A Einheiten bzw. Nichtnullteiler sind, kann man in sämtlichen Lokalisierungen von A nach maximalen Idealen testen. Durch Lokalisieren führt man daher die folgende Aussage sofort auf die bekannte Aussage über Endomorphismen freier endlicher Moduln zurück.

(8.2) Aussage. Sei M ein projektiver A-Modul vom Rang n und

$h \in \mathrm{End}_A M$. Dann gilt:

(1) h ist surjektiv genau dann, wenn h bijektiv ist, und dies gilt genau dann, wenn det h Einheit in A ist.

(2) h ist injektiv genau dann, wenn det h Nichtnullteiler in A ist.

Sei wieder M ein projektiver A-Modul vom Rang n und $h \in \mathrm{End}_A M$. Wir betrachten den Polynomring $A[X]$ in einer Unbestimmten X über A und definieren als <u>charakteristisches Polynom</u> von h über A

$$\chi_h := \det(X \cdot \mathrm{id}_{A[X] \otimes_A M} - A[X] \otimes_A h) \ .$$

Dies ist ein normiertes Polynom aus $A[X]$ vom Grade n . Mittels (8.1) folgt aus der Assoziativität des Tensorproduktes leicht:

<u>(8.3) Grundringerweiterung</u>. Sei $\varphi: A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus, M ein projektiver A-Modul vom Rang n und $h \in \mathrm{End}_A M$. Dann gilt:

$$\chi_{A' \otimes h} = (A[X] \otimes_A \varphi)(\chi_h) \ .$$

Beim Ringwechsel mit φ werden also einfach die Koeffizienten von χ_h mit φ abgebildet.

Beim Homomorphismus $A[X] \longrightarrow A$ mit $X \longmapsto 0$ geht χ_h in seinen konstanten Term $\chi_h(0)$ über; nach (8.1) ist dies nichts anderes als $\det(-h) = (-1)^n \det h$. Schreibt man also $\chi_h = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $a_i \in A$, so ist $\det h = (-1)^n a_0$. Die Determinante det ist eine multiplikative Abbildung von $\mathrm{End}_A M$ in A . Als Spur von h bezeichnet man $\mathrm{Sp}\, h := -a_{n-1}$. Die Spur ist eine A-lineare Abbildung von $\mathrm{End}_A M$ in A .

Sei nun B eine A-Algebra. B heißt eine <u>projektive A-Algebra vom Rang n</u> , wenn B als A-Modul projektiv vom Rang n ist.

Sei B eine projektive A-Algebra vom Rang n . Jedem $x \in B$ ist dann das Multiplizieren h_x mit x in B zugeordnet. Als <u>charakteristisches Polynom von $x \in B$ über A</u> definieren wir nun

$$\chi_x := \chi_{h_x} \ .$$

Dies ist ein normiertes Polynom in $A[X]$ des Grades n mit $\chi_x(x) = \chi_{h_x}(h_x) = 0$.

Als <u>Norm</u> von $x \in B$ über A bezeichnet man das Element $Nx = N_A^B(x) := \det h_x$ von A . Die Normabbildung $N_A^B : B \longrightarrow A$

ist multiplikativ. Es ist $Na = a^n$ für jedes $a \in A$.

Aus (8.2) folgt sofort: Ein $x \in B$ ist genau dann Einheit in B, d.h. es ist $Bx = B$, wenn Nx Einheit in A ist. Ein $x \in B$ ist genau dann Nichtnullteiler in B, wenn Nx Nichtnullteiler in A ist.

Als Spur von $x \in B$ über A bezeichnet man das Element $Sp(x) = Sp_A^B(x) := Sp(h_x)$ von A. Die Spurabbildung $Sp_A^B : B \to A$ ist ein Element von $Hom_A(B,A)$. Es ist $Sp(a) = na$ für jedes $a \in A$.

Sei $\varphi: A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus. Offenbar ist $A' \otimes h_x = h_{1 \otimes x}$. Aus (8.3) folgt daher für $x \in B$ und $B' := A' \otimes_A B$:

$$Sp_{A'}^{B'}(1 \otimes x) = \varphi(Sp_A^B(x)) \ , \ N_{A'}^{B'}(1 \otimes x) = \varphi(N_A^B(x)) \ .$$

Aus der ersten Gleichhung ergibt sich, da $Sp_{A'}^{B'}$ und $A' \otimes_A Sp_A^B$ beide A' linear sind:

$$A' \otimes_A Sp_A^B = Sp_{A'}^{A' \otimes_A B} \ .$$

§9. Ein Lemma über charakteristische Polynome

Das nachfolgende Lemma wird für eine Rechnung in §17 und für die Theorie der Galoiserweiterungen in Kapitel IV, §21 benötigt.

(9.1) Lemma. Sei A ein Ring, M ein projektiver A-Modul vom Rang n und $h \in End_A M$. Ferner sei A' ein Erweiterungsring von A, über dem χ_h in Linearfaktoren zerfällt:

$$\chi_h = \prod_{i=1}^{n} (X-b_i) \ , \ b_i \in A' \ .$$

Ferner sei $A[Y]$ der Polynomring in der Unbestimmten Y über A' und $P \in A[Y]$. Dann ist

$$\chi_{P(h)} = \prod_{i=1}^{n} (X-P(b_i)) \ .$$

Beweis. Wegen $A[Y] \subseteq A'[Y]$ und (8.3) dürfen wir gleich $A = A'$ annehmen. Wir setzen $\alpha_{P(h)} := \prod_{i=1}^{n} (X-P(b_i))$.

Sei zunächst A ein reduzierter Ring, also ein Ring, in dem das Nullideal Durchschnitt von Primidealen $\mathfrak{P}_j$, $j \in J$, ist. Mit φ_j bezeichnen wir den kanonischen Homomorphismus von A in den Quotientenkörper $\varkappa(\mathfrak{P}_j)$ des Restringes $A/\mathfrak{P}_j$. Dann ist

$\varkappa(\varphi_j)\otimes h$ ein trigonalisierbarer linearer Operator über einem Körper, wofür das Lemma trivial ist. Somit sind die $(A[X]\otimes_A \varphi_j)$-Bilder von $\chi_{P(h)}$ und $\alpha_{P(h)}$ gleich. Die Koeffizienten des Polynoms $\chi_{P(h)} - \alpha_{P(h)}$ liegen daher im Durchschnitt der Kerne der φ_j , sind also Null.

Der allgemeine Fall wird nun auf den Sonderfall reduzierter Ringe zurückgeführt. Es genügt die Behauptung in den Lokalisierungen von A nach allen maximalen Idealen zu verifizieren. Wir dürfen also annehmen, daß M ein freier A-Modul ist. Wir konstruieren weiter unten einen reduzierten Ring R , einen Homomorphismus $\varphi\colon R \longrightarrow A$ und ein $H \in \mathrm{End}_R(R^n)$ derart, daß $M = A\otimes_R (R^n)$ und $h = A\otimes_R H$ ist, daß $\chi_H = \prod_{i=1}^n (X-B_i)$ ist mit $B_i \in R$, $\varphi(B_i) = b_i$, und daß es ein $Q \in R[Y]$ gibt, das unter φ auf P abgebildet wird. Die Gültigkeit des Lemmas für H impliziert dann die für h .

Es bleibt die Konstruktion von R,φ,H nachzutragen. Sei $e_1,\dots,e_n$ eine A-Basis von M und $h(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$. Sei R' der Ring, der aus $\mathbb{Z}$ durch Adjunktion von Unbestimmten A_{ij} , $1\leq i$, $j \leq n$, und 1+ Grad P weiteren Unbestimmten entsteht, und φ' ein Homomorphismus von R' in A mit $\varphi(A_{ij}) = a_{ij}$, zu dessen Bild die Koeffizienten von P gehören. Sei F' der freie R'-Modul des Ranges n mit Basis $E_1,\dots,E_n$ und H' der R'-Endomorphismus von F' mit $H'(E_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij}E_i$. Es ist $\chi_{H'} = X^n+A_{n-1}X^{n-1}+\dots+A_o$ mit $A_i \in R'$. Ist ψ ein Homomorphismus von R' auf den Polynomring $\mathbb{Z}[X_o,\dots,X_{n-1}]$, der die Matrix (A_{ij}) auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -X_o \\ 1 & 0 & & \cdot & -X_1 \\ 0 & 1 & & \cdot & -X_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -X_{n-1} \end{pmatrix}$$

abbildet, so ist $(R'[X]\otimes\psi)(\chi_{H'}) = X^n+X_{n-1}X^{n-1}+\dots+X_o$. Also hat man $\psi(A_i) = X_i$. Erst recht sind $A_o,\dots,A_{n-1}$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Z}$. Nach dem Hauptsatz über elementar-symmetrische Funktionen gibt es nun einen freien Polynomring $R'' = \mathbb{Z}[U_1,\dots,U_n]$, der eine freie endliche Algebra über $S := \mathbb{Z}[A_o,\dots,A_{n-1}]$ ist und über dem man $\chi_{H'} = \prod_{i=1}^n (X-U_i)$

hat. Sei φ'' der Homomorphismus von R'' in A mit $\varphi''(U_i)=b_i$. Auf S stimmen φ' und φ'' wegen der Voraussetzung $\chi_h = \alpha_h$ überein. Daher gibt es einen Homomorphismus φ von $R := R''\otimes_S R'$ in A mit $\varphi(r''\otimes r) = \varphi''(r'')\varphi'(r')$ für alle $r''\in R''$, $r'\in R'$. Schließlich sei $H := R\otimes_{R'} H'$ auf $R^n = R\otimes_{R'} F'$ und $B_i := U_i \otimes 1$. Offenbar besitzen R, φ, H die gewünschten Eigenschaften, von der Reduziertheit von R zunächst abgesehen.

R ist aber reduziert. Seien nämlich $Q' := \mathrm{Quot}(R')$, $Q'' := \mathrm{Quot}(R'')$ und $K := \mathrm{Quot}\, S$ die Quotientenkörper. Da R'' freier S-Modul ist, hat man eine Einbettung $R''\otimes_S R' \longrightarrow R''\otimes_S Q'$. Ferner ist $R''\otimes_S Q'$ torsionsfreier S-Modul. Daher ist $R''\otimes_S Q'$ in $Q\otimes_S(R''\otimes_S Q') = (Q\otimes_S R'')\otimes_S Q'$ eingebettet. Da R'' endlich über S ist, hat man $Q\otimes_S R'' = Q''$. Folglich ist $(Q\otimes_S R'')\otimes_S Q' = Q''\otimes_S Q'$. Schließlich ist $Q''\otimes_S Q' = Q''\otimes_K Q'$. Also ist R in die K-Algebra $Q''\otimes_K Q'$ eingebettet. Q'' ist wegen char K = 0 eine separable endliche Körpererweiterung von K. Nach (2.5) ist daher $Q''\otimes_K Q'$ eine unverzweigte endliche Q'-Algebra. Aus dem Kriterium (3.1) folgt nun, daß $Q''\otimes_K Q'$ reduziert ist. Erst recht ist der darin eingebettete Ring R reduziert.

§10. Charakteristische Polynome bei Moduln mit Rang

Auch für Endomorphismen beliebiger Moduln mit Rang lassen sich charakteristische Polynome einführen. Sei A ein Ring mit dem totalen Quotientenring $K := \mathrm{Quot}(A)$.

Definition. Ein A-Modul M besitzt den Rang n, wenn $K\otimes_A M$ ein projektiver K-Modul vom Rang n ist.

Ist M ein projektiver A-Modul vom Rang n, so ist $K\otimes_A M$ ein projektiver K-Modul des Ranges n. Daher erweitert die obige Definition den Rangbegriff bei projektiven Moduln.

Enthält ein A-Modul M einen freien A-Modul F des Ranges n derart, daß M/F ein Torsionsmodul ist, so ist $K\otimes_A M \cong K\otimes_A F \cong K^n$ frei vom Rang n. Also besitzt M den Rang n.

Sei umgekehrt M ein A-Modul vom Rang n, und sei K semilokal (was z.B. der Fall ist, wenn A noethersch ist oder wenn A ein reduzierter Ring mit nur endlich vielen minimalen Primidealen ist). Dann ist $K\otimes_A M$ frei vom Rang n. Ist

$1\otimes x_1,\ldots,1\otimes x_n$ eine K-Basis von $K\otimes_A M$, so erzeugen die Elemente $x_1,\ldots,x_n$ einen freien Untermodul F des Ranges n in M, und M/F ist ein Torsionsmodul. (Man beachte: $K\otimes_A M$ entsteht aus M durch Nenneraufnahme der Nichtnullteiler von A .) Daher erweitert die obige Definition auch den Rangbegriff, der in [12],§6 eingeführt wurde.

Definition. Sei M ein A-Modul des Ranges n und $h\in \mathrm{End}_A M$. Ferner sei K der totale Quotientenring von A . Dann heißt

$$\chi_h := \chi_{K\otimes h} \in K[X]$$

das charakteristische Polynom von h .

(10.1) Grundringerweiterung. Sei $\varphi\colon A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus, der Nichtnullteiler von A in Nichtnullteiler von A' abbildet. (Die letztere Voraussetzung ist beispielsweise erfüllt, wenn A' flach über A ist.) Sei ferner M ein A-Modul des Ranges n und $h\in \mathrm{End}_A M$.

Dann ist $A'\otimes_A M$ ein A'-Modul des Ranges n . Der Homomorphismus φ läßt sich zu einem Homomorphismus des totalen Quotientenringes K von A in den totalen Quotientenring K' von A' fortsetzen, der ebenfalls mit φ bezeichnet sei. Dann gilt:

$$\chi_{A'\otimes h} = (K[X]\otimes_K\varphi)(\chi_h) \quad .$$

Beweis. Die Voraussetzungen sind gerade so getroffen, daß sich φ fortsetzen läßt. Dann ist $K'\otimes_{A'}(A'\otimes_A M) = K'\otimes_A M = K'\otimes_K(K\otimes_A M)$ nach (8.1) ein projektiver K'-Modul vom Rang n . Der Rest der Behauptung ergibt sich nun mit (8.3) . -

Aus (8.3) folgt ebenfalls sofort: Ist M selbst projektiv vom Rang n , so stimmt χ_h mit dem wie üblich definierten charakteristischen Polynom überein. Man benützt dies wie folgt zu einer Ergänzung von (10.1), (8.1) und (8.3):

(10.2) Aussage. Sei M ein endlicher A-Modul des Ranges n über A und S ein multiplikatives System in A derart, daß für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus A mit $\mathfrak{p}\cap S = \emptyset$ der $A_{\mathfrak{p}}$-Modul $M_{\mathfrak{p}}$ frei ist, und $h\in \mathrm{End}_A M$. Ferner sei $\varphi\colon A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus derart, daß $\varphi(S)$ nur aus Nichtnullteilern in A' besteht.

Dann ist $A'\otimes_A M$ ein A'-Modul des Ranges n . Der Homomorphismus φ läßt sich zu einem Homomorphismus φ_S von A_S in den totalen Quotientenring K' von A' fortsetzen. Dann besitzt χ_h Koeffizienten in A_S, und $\chi_{A'\otimes h}$ erhält man aus χ_h, indem man die Koeffizienten mit φ_S abbildet.

Beweis. Nach (10.1) ist $A_S \otimes_A M$ ein A_S-Modul des Ranges n . φ läßt sich zu einem Homomorphismus des totalen Quotientenringes K von A in den totalen Quotientenring Q von A_S fortsetzen. Mittels dieses Homomorphismus läßt sich χ_h zunächst als Polynom über Q auffassen. In allen Lokalisierungen von A_S wird $A_S \otimes M$ frei vom Rang n . Daher liegen die Koeffizienten von $\chi_{A_S\otimes h}$ in sämtlichen Lokalisierungen von A_S . Da die Elemente von Q nur Nichtnullteiler von A_S im Nenner haben, folgt $\chi_{A_S\otimes h} \in A_S[X]$. Das haben wir im Satz kurz als "χ_h besitzt Koeffizienten in A_S" bezeichnet.

Nun ist weiter $A_S \otimes M$ als endlicher Modul, der lokal frei vom Rang n ist, ein projektiver A_S-Modul des Ranges n . Nach (8.1) und (8.3) ergeben sich jetzt die restlichen Behauptungen, da $K' \otimes_{A'} (A' \otimes_A M) = K' \otimes_{A_S} (A_S \otimes M)$ und $K' \otimes (A' \otimes h) = K' \otimes (A_S \otimes h)$ ist.

Anmerkungen. (10.2) läßt sich in folgenden Situationen anwenden.

(1) Sei A noethersch und $A' = A/\mathfrak{a}$. Ferner sei M ein endlicher A-Modul mit Rang, und $\mathrm{Ass}_A A' \subseteq \mathrm{Frei}_A M$ (das soll heißen: Für jedes assoziierte Primideal $\mathfrak{p}$ des A-Moduls A' sei $M_{\mathfrak{p}}$ ein freier $A_{\mathfrak{p}}$-Modul). Man verwendet dann das multiplikative System S der $f \in A$, die Nichtnullteiler in A' sind.

(2) Die Situation in (1) ist insbesondere dann gegeben, wenn A ein noetherscher normaler Integritätsring, $\mathfrak{a}$ ein beliebiges divisorielles Ideal in A und M ein torsionsfreier endlicher A-Modul ist.

(3) Sei A noethersch und M ein endlicher A-Modul. Sei $a \in A$ ein Nichtnullteiler derart, daß aM in einem freien endlichen A-Untermodul F von M enthalten ist. Ist $b \in A$ prim zu a , so kann man (10.2) auf A,A':= A/Ab und M anwenden. Sei nämlich $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass} A/Ab$. Bei $a \in \mathfrak{p}$ wäre a,b und damit auch b,a Primfolge in $A_{\mathfrak{p}}$, Widerspruch! Also ist $a \notin \mathfrak{p}$, und a ist Einheit in $A_{\mathfrak{p}}$. Dann ist aber $M_{\mathfrak{p}} = aM_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}}$ frei. -

Sei M ein A-Modul vom Rang n und $h \in \mathrm{End}_A M$. Der Torsionsuntermodul tM von M wird von h in sich abgebildet. Daher induziert h ein $g \in \mathrm{End}_A(M/tM)$. Wegen $K \otimes h = K \otimes g$ sind dann χ_h und χ_g identisch. Das charakteristische Polynom kann also über Torsion nichts aussagen.

Man beachte, daß die Koeffizienten von χ_h , die einem Sp h und det h definieren, im allgemeinen nur in K , nicht aber in A liegen. Es gilt jedoch noch:

(10.3) Lemma. Sei M ein endlicher A-Modul vom Rang n und $h \in \mathrm{End}_A M$. Dann ist

$$\chi_h \in \bar{A}[X] \ ,$$

wobei $\bar{A}$ der ganze Abschluß von A im Quotientenring K = Quot(A) ist.

Beweis. Nach [5], chap.V , §1, prop. 12 ist $\bar{A}[X]$ der ganze Abschluß von A[X] in K[X]. (Wir skizzieren einen Beweis zur Bequemlichkeit des Lesers. $\bar{A}[X]$ ist trivialerweise im ganzen Abschluß $\overline{A[X]}$ von A[X] in K[X] enthalten. Sei umgekehrt $\alpha \in \overline{A[X]}$. Dieses Polynom und die Ganzheitsgleichung involvieren nur endlich viele Koeffizienten aus A . Wir dürfen daher annehmen, daß A noethersch ist und daß $K = A_S$ bezüglich eines multiplikativen Systems S von Nichtnullteilern in A ist. Es gibt ein $d \in S$ mit $d\alpha^n \in A[X]$ für alle n . Ist aX^m der Leitterm von α , so ist nun $da^n \in A$ für alle n . Da A noethersch ist, folgt $a \in \bar{A}$ und somit $aX^m \in \bar{A}[X]$. Weiter ist $\alpha - aX^m \in \overline{A[X]}$. Nach endlich vielen Schnitten erhält man $\alpha \in \bar{A}[X]$.)

Es ist $\chi_h = \det H$ mit $H = X \cdot \mathrm{id}_{K[X] \otimes (K \otimes M)} - K[X] \otimes (K \otimes h)$. Sei $g := X \cdot \mathrm{id}_{A[X] \otimes M} - A[X] \otimes h$ und S das multiplikative System der Nichtnullteiler in A . Dann ist $K = A_S$, $(A[X] \otimes M)_S = K \otimes_A (A[X] \otimes M) = K[X] \otimes (K \otimes M)$ und $g_S = K \otimes g = H$. Somit ist $\chi_h = \det g_S$, wobei g ein Endomorphismus des endlichen A[X]-Moduls $A[X] \otimes_A M$ ist. S ist ein multiplikatives System von Nichtnullteilern in A[X] derart, daß $(A[X] \otimes_A M)_S$ ein projektiver Modul vom Rang n über $A[X]_S (= A_S[X] = K[X])$ ist. Aus $\chi_h = \det g_S \in \overline{A[X]} \subseteq K[X]$ folgt wegen $\overline{A[X]} = \bar{A}[X]$ die Behauptung über χ_h .

Es genügt also, folgendes zu zeigen: Sei E ein endlicher Modul über dem Ring R , $g \in \mathrm{End}_R E$ und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System aus Nichtnullteilern derart, daß E_S projektiv vom Rang $n \geqslant 1$ über R_S ist; dann ist $\det g_S$ ein Element des ganzen Abschlusses $\bar{R}$ von R in R_S .

Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir das kanonische kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n E \arrow[r, "\Lambda^n g"] \arrow[d] & \Lambda^n E \arrow[d] \\ \Lambda^n E_S \arrow[r, "\Lambda^n g_S"] & \Lambda^n E_S \end{tikzcd} .$$

Das Bild U von $\Lambda^n E$ in $\Lambda^n E_S$ ist ein endlicher R-Modul, der invariant unter $\Lambda^n g_S$ ist. Es ist $\Lambda^n E_S = R_S U$ .Weiter ist $\Lambda^n E_S$ ein projektiver R_S-Modul des Ranges 1 , und $\Lambda^n g_S$ ist das Multiplizieren mit der Determinante $d := \det g_S$. Sei $w_1,\ldots,w_m$ ein Erzeugendensystem des R-Moduls U . Dann gibt es Elemente $a_{ij} \in R$ mit $dw_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$. Folglich gilt

$$\sum_{i=1}^m (d \cdot \delta_{ij} - a_{ij}) w_i = 0$$

für alle j . Es gilt dann $\det(d \cdot \delta_{ij} - a_{ij}) w_i = 0$ für $1 \leq i \leq m$ nach der Cramerschen Regel. Somit ist $\det(d \cdot \delta_{ij} - a_{ij}) \in \mathrm{Ann}\, U$ $= \mathrm{Ann}\, R_S U = 0$. Also ist $\det(d \cdot \delta_{ij} - a_{ij}) = 0$ eine Ganzheitsgleichung für d über R .

(10.4) Korollar. Sei A ganz abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring. Ist M ein endlicher A-Modul vom Rang n und $h \in \mathrm{End}_A M$, so ist $\chi_h \in A[X]$.

In vielen anderen Fällen läßt sich ebenfalls noch schließen, daß das charakteristische Polynom Koeffizienten im Grundring A hat.

Definition. Eine offene Menge U in Spek A heißt vollständig, wenn der kanonische Beschränkungs-Homomorphismus $A = \Gamma(\mathrm{Spek}\, A) \longrightarrow \Gamma(U)$ der Schnittringe in der zu A gehörigen Garbe auf Spek A bijektiv ist.

(10.5) Satz. Sei M ein A-Modul des Ranges n und $h \in \mathrm{End}_A M$. Enthält der freie Ort $\mathrm{Frei}_A(M/tM) (\subseteq \mathrm{Spek}\, A)$ eine offene vollständige Menge U , so ist $\chi_h \in A[X]$.

Beweis. Wir können gleich annehmen, daß der Torsionsuntermodul tM von M der Nullmodul ist. Für $\mathfrak{p} \in U$ ist $M_\mathfrak{p}$ freier Modul über $A_\mathfrak{p}$; daher ist $(\chi_h)_\mathfrak{p} = \chi_{h_\mathfrak{p}} \in A_\mathfrak{p}[X]$. Also ist $\chi_h \in \Gamma(U)[X] = A[X]$. -

Einige Worte über die (Zariski-)Topologie von Spek A sind angebracht. Für ein Ideal $\mathfrak{A}$ im Ring A bezeichne wie üblich

$V(\mathfrak{a})$ die (per definitionem) abgeschlossene Menge ("Varietät") der $\mathfrak{a}$ umfassenden Primideale von A und $D(\mathfrak{a})$ das (offene) Komplement von $V(\mathfrak{a})$ in Spek A . Ist U offene Teilmenge von Spek A , so bezeichne $\Gamma(U)$ den Schnittring über U in der zu A gehörigen Garbe auf Spek A . Die offenen Mengen $D(q) := D(Aq)$, $q \in A$, bilden eine Basis der Topologie von Spek A . Der Schnittring $\Gamma(D(q))$ ist nichts anderes als der Ring $A_q := A_{\{1,q,q^2,\ldots\}}$, der aus A durch Nenneraufnahme der Potenzen von q entsteht.

Die Basismengen $D(q)$ sind quasi-kompakte Mengen in Spek A . Eine offene Menge U in Spek A ist daher genau dann quasi-kompakt, wenn es endlich viele Elemente $f_1,\ldots,f_r$ in A gibt mit $U = D(f_1)\cup\ldots\cup D(f_r)$. Es ist $D(f_1)\cup\ldots\cup D(f_r) = D(Af_1+\ldots+Af_r)$. Also ist U genau dann quasi-kompakt, wenn es ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}$ in A gibt mit $U = D(\mathfrak{a})$. Insbesondere sind alle offenen Mengen in Spek A quasi-kompakt, wenn A noethersch sind.

(10.6) Aussage. Sei M ein endlicher Modul des Ranges n . Dann ist $\mathrm{Frei}_A M = D(\mathfrak{f}_n(M))$, d.h. $\mathrm{Frei}_A M$ ist die Menge der Primideale, die das n-te Fittingideal von M nicht umfassen. Insbesondere ist $\mathrm{Frei}_A M$ offen in Spek A . Ist M ein Modul von endlicher Darstellung, so ist $\mathrm{Frei}_A M$ außerdem quasi-kompakt.

Beweis. Die Fittingideale $\mathfrak{f}_i$ sind mit Nenneraufnahme verträglich. Sei $\mathfrak{p} \in$ Spek A . Nach (9.1) ist $M_{\mathfrak{p}}$ ein endlicher $A_{\mathfrak{p}}$-Modul des Ranges n . Über dem totalen Quotientenring $K_{\mathfrak{p}}$ von $A_{\mathfrak{p}}$ ist $0 = \mathfrak{f}_i(K_{\mathfrak{p}}\otimes M_{\mathfrak{p}}) = K_{\mathfrak{p}}\otimes \mathfrak{f}_i(M_{\mathfrak{p}})$ für $0\leq i\leq n-1$. Daher ist $\mathfrak{f}_i(M_{\mathfrak{p}}) = 0$ für $0\leq i\leq n-1$. Der Modul $M_{\mathfrak{p}}$ ist genau dann frei, wenn er frei vom Rang n ist. Also ist $M_{\mathfrak{p}}$ genau dann frei, wenn $\mathfrak{f}_n(M_{\mathfrak{p}}) = A_{\mathfrak{p}}$ ist. Schließlich folgt aus $\mathfrak{f}_n(M_{\mathfrak{p}}) = A_{\mathfrak{p}}\otimes\mathfrak{f}_n(M)$, daß $\mathfrak{p}$ genau dann zu $\mathrm{Frei}_A M$ gehört, wenn $\mathfrak{p}$ nicht $\mathfrak{f}_n(M)$ umfaßt.

Ist M ein Modul von endlicher Darstellung, d.h. gibt es eine exakte Sequenz $F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ mit endlichen freien A-Moduln F_i , so sind alle Fittingideale von M endlich. Hieraus folgt der Zusatz. -

Allgemein läßt sich sagen: Ist M ein beliebiger Modul von endlicher Darstellung, so ist $\mathrm{Frei}_A M$ offen. Außerdem gilt: Gibt es eine exakte Sequenz $F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ mit endlichen freien A-Moduln F_i, so ist $\mathrm{Frei}_A M$ quasi-kompakt. Diese Aussagen über dem freien Ort lassen sich z.Bsp. leicht mit den Beweismitteln von [11] Kap. III, §3 erhalten.

Es interessieren Kriterien dafür, wann offene Mengen vollständig sind. In Anlehnung an ein Resultat von Hartshorne zeigen wir:

<u>(10.7) Satz</u>. Das Ideal $\mathfrak{a}$ in A enthalte eine Primfolge der Länge 2 . Dann ist $U := D(\mathfrak{a})$ vollständig.

<u>Beweis</u>. Sei f,g eine in $\mathfrak{a}$ enthaltene Primfolge. Man hat $U' := D(f) \cup D(g) \subseteq U$ und die kanonischen Beschränkungen

$$A = \Gamma(\mathrm{Spek}\ A) \longrightarrow \Gamma(U) \longrightarrow \Gamma(U') \longrightarrow \Gamma(D(f)) = A_f .$$

Weil $A \longrightarrow A_f$ injektiv ist, ist auch $A \longrightarrow \Gamma(U)$ injektiv. Ferner ist $\Gamma(U) \longrightarrow A_f$ injektiv. Sei nämlich $s \in \Gamma(U)$ derart, daß die Beschränkung $s|D(f) = 0$ ist. Wir betrachten eine beliebige Basismenge $D(q) \subseteq U$. Dann ist $0 = s|D(f) \cap D(q) = s|D(fq)$. Weil $A_q \longrightarrow A_{fq} = (A_q)_f$ ebenfalls injektiv ist, folgt $s|D(q) = 0$. Daher ist insgesamt $s = 0$. Es folgt jetzt, daß $\Gamma(U) \longrightarrow \Gamma(U')$ injektiv ist.

Somit bleibt zu zeigen, daß $A \longrightarrow \Gamma(U')$ surjektiv ist. Sei $s \in \Gamma(U')$ vorgegeben. Es gibt Darstellungen $s|D(f) = a/f^m$ und $s|D(g) = b/g^m$ mit $a,b \in A$, $m \geq 0$. Wegen $a/f^m = b/g^m$ in $\Gamma(D(f) \cap D(g)) = \Gamma(D(fg)) = A_{fg}$ gibt es ein n mit $(fg)^n g^m a = (fg)^n f^m b$. Division durch den Nichtnullteiler f^n liefert $g^{n+m} a = g^n f^m b$. Da f^m , g^{n+m} ebenfalls eine Primfolge in A ist, gibt es ein $c \in A$ mit $a = cf^m$. Division durch f^m gibt $g^{n+m} c = g^n b$. Nun ist $a/f^m = c/1$ in A_f und $b/g^m = g^n b/g^{n+m} = c/1$ in A_g , was $c|D(f) = s|D(f)$ und $c|D(g) = s|D(g)$ bedeutet. Folglich ist $c|U' = s$. Das war noch zu zeigen.

<u>(10.8) Satz</u>. Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A . Genau dann ist $U := D(\mathfrak{a})$ vollständig, wenn $\mathfrak{a}$ eine Primfolge der Länge 2 enthält.

<u>Beweis</u>. Sei $D(\mathfrak{a})$ vollständig. Besteht $\mathfrak{a}$ nur aus Nullteilern, so ist $\mathfrak{a}$ in einem assoziierten Primideal von A enthalten. Folglich gibt es ein $a \in A$, $a \neq 0$, mit $a\mathfrak{a} = 0$. Es ist dann $a|D(\mathfrak{a}) = 0$. Widerspruch! Daher gibt es einen Nichtnullteiler $f \in \mathfrak{a}$.

Besteht $\mathfrak{a}$ nur aus Nullteilern von A/fA , so gibt es ein

$b \in A$, $b \notin Af$, $b\mathfrak{a} \subseteq Af$. Wir betrachten $b/f \in \Gamma(D(f))$. Sei $D(\mathfrak{a})$ Vereinigung von Basismengen $D(f_i)$, $f_i \in \mathfrak{a}$, $i \in I$. Es gibt Elemente $c_i \in A$ mit $bf_i = c_i f$. Für $i,j \in I$ gilt $(c_i f_j)f = f_j(c_i f) = f_j(bf_i) = (bf_j)f_i = (c_j f)f_i = (c_j f_i)f$ und daher $c_i f_j = c_j f_i$, d.h. man hat $c_i/f_i = c_j/f_j$ auf $D(f_i) \cap D(f_j)$. Somit gibt es ein $s \in \Gamma(D(\mathfrak{a}))$ mit $s|D(f_i) = c_i/f_i$. Auf $D(f_i) \cap D(f)$ hat man $c_i/f_i = b/f$. Daher ist $s|D(f) = b/f$. Da $A \longrightarrow \Gamma(D(\mathfrak{a}))$ surjektiv ist, gibt es ein $c \in A$ mit $c|D(\mathfrak{a}) = s$. Dann ist $c|D(f) = b/f$. Da f kein Nullteiler ist, folgt $b \in Af$. Widerspruch! Also gibt es doch ein $g \in \mathfrak{a}$ derart, daß f,g Primfolge ist. Die Umkehrung leistet Satz (10.7). -

Das vorstehende Resultat soll noch ins Lokale übersetzt werden. Ist R ein noetherscher lokaler Ring und $N \neq 0$ ein endlicher R-Modul, so wird die <u>homologische Kodimension</u> von N , das ist die Länge der maximalen Primfolgen von N , mit codh N bezeichnet. codh R ist dann die Länge von maximalen Primfolgen, die im maximalen Ideal von R enthalten sind.

<u>(10.9) Zusatz</u>. Sei A ein noetherscher Ring und U eine offene Menge in Spek A . Dann sind äquivalent:

(1) U ist vollständig.

(2) Für jedes $\mathfrak{p} \in \text{Spek } A - U$ gilt codh $A_{\mathfrak{p}} \geq 2$.

<u>Beweis</u>. Es gibt ein Ideal $\mathfrak{a}$ in A mit $U = D(\mathfrak{a})$. Dann ist Spek $A - U = V(\mathfrak{a})$. Aus (1) ergibt sich (2) wie folgt. Sei U vollständig und $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Nach (10.8) gibt es eine Primfolge der Länge 2 in $\mathfrak{a}$. Diese Primfolge bleibt eine Primfolge in $A_{\mathfrak{p}}$, was gerade codh $A_{\mathfrak{p}} \geq 2$ heißt.

Sei umgekehrt (2) erfüllt. Besteht $\mathfrak{a}$ nur aus Nullteilern, so ist $\mathfrak{a}$ in einem assoziierten Primideal $\mathfrak{p}$ von A enthalten. Dann besteht $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ nur aus Nullteilern von $A_{\mathfrak{p}}$, d.h. es ist codh $A_{\mathfrak{p}} = 0$. Widerspruch! Daher gibt es einen Nichtnullteiler $f \in \mathfrak{a}$. Besteht $\mathfrak{a}$ nur aus Nullteilern von A/fA , so ist $\mathfrak{a}$ in einem assoziierten Primideal $\mathfrak{p}$ von A/fA enthalten. Dann ist aber f Nichtnullteiler in $A_{\mathfrak{p}}$, während $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ zu $A_{\mathfrak{p}}/fA_{\mathfrak{p}}$ assoziiert ist, d.h. es ist codh $A_{\mathfrak{p}} = 1$. Widerspruch! Also gibt es doch ein $g \in \mathfrak{a}$ derart, daß f,g Primfolge in $\mathfrak{a}$ ist. Nach Satz (10.7) ist daher $U = D(\mathfrak{a})$ vollständig.

(10.10) Korollar. Sei A ein noetherscher Ring und M ein endlicher A-Modul. Dann gilt:

(1) Ist M von endlicher homologischer Dimension ($\mathrm{dh}_A M < \infty$) und ist M torsionsfrei, so ist $\mathrm{Frei}_A M$ vollständig.

(2) Ist $\mathrm{dh}_A M \leq 1$ und ist $\mathrm{Frei}_A M$ vollständig, so ist M torsionsfrei.

Wir benötigen beim Beweis den folgenden bekannten Satz:

(10.11) Lemma (Auslander-Buchsbaum). Sei A ein noetherscher lokaler Ring und $M \neq 0$ ein endlicher A-Modul mit $\mathrm{dh}_A M < \infty$. Dann gilt

$$\mathrm{dh}_A M + \mathrm{codh}\, M = \mathrm{codh}\, A\ .$$

Zur Bequemlichkeit des Lesers geben wir einen einfachen Beweis in einem Anhang am Ende dieses Paragraphen.

Beweis von (10.10). Zu (1). Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spek}\, A$, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Frei}_A M$ vorgegeben. Nach (10.9) brauchen wir nur noch $\mathrm{codh}\, A_\mathfrak{p} \geq 2$ zu zeigen. Machen wir also die Annahme $\mathrm{codh}\, A_\mathfrak{p} \leq 1$. Wegen $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Frei}_A M$ ist $\mathrm{dh}_A M \geq 1$. Nach (10.11) ergibt sich $\mathrm{codh}\, M_\mathfrak{p} = 0$. Das bedeutet gerade $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M$. Daß M torsionsfrei ist, heißt, daß die Nullteiler von A (Vereinigung der Primideale aus Ass A) die Nullteiler von M (Vereinigung der Primideale aus Ass M) umfassen. Daher ist $\mathfrak{p}$ in einem $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\, A$ enthalten. Dann ist $\mathrm{codh}\, A_\mathfrak{q} = 0$ und (10.11) zeigt, daß $M_\mathfrak{q}$ freier $A_\mathfrak{q}$-Modul ist. Dann ist natürlich erst recht $M_\mathfrak{p} = (M_\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}A_\mathfrak{q}}$ frei. Widerspruch!

Zu (2). Machen wir die Annahme, daß M Torsion besitzt, daß es also ein $x \in M$, $x \neq 0$ und einen Nichtnullteiler $f \in A$ gibt mit $fx = 0$. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, Ax \subseteq \mathrm{Ass}\, M$. Dann ist $f \in \mathfrak{p}$ und daher $\mathrm{codh}\, A_\mathfrak{p} \geq 1$; ferner ist $\mathrm{codh}\, M_\mathfrak{p} = 0$. Somit ist $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Frei}_A M$, und (10.9) ergibt sogar $\mathrm{codh}\, A_\mathfrak{p} \geq 2$. Da auch $\mathrm{dh}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \leq 1$ gilt, erhält man mit (10.11) einen Widerspruch.–

Wir bemerken ferner:

(10.12) Satz. Sei A ein Krullring. (Dies ist z.Bsp. der Fall, wenn A normaler noetherscher Integritätsring ist oder wenn A ein faktorieller Ring ist.) Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A, so ist $U := D(\mathfrak{a})$ genau dann vollständig, wenn $\mathrm{codim}\, \mathfrak{a} \geq 2$ ist.

Beweis. Sei P die Menge der minimalen Primideale $\neq 0$ von A. Dann bedeutet $\mathrm{codim}\, \mathfrak{a} \geq 2$, daß $\mathfrak{a} \neq 0$ und in keinem $\mathfrak{p} \in P$ enthalten ist.

Sei U vollständig. Dann ist U nicht leer, also $\mathfrak{a} \neq 0$. Wir machen nun die Annahme, daß $\mathfrak{a}$ in einem $\mathfrak{p} \in P$ enthalten ist. Sei $f \in \mathfrak{a}$, $f \neq 0$ gewählt. Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die Primideale aus $P \cap U$, die f enthalten. Es gibt ein $g \in \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r$, $g \notin \mathfrak{p}$ und eine Zahl m derart, daß $g^m \in fA_{\mathfrak{p}_i}$ für alle i gilt. Dann ist $g^m \in fA_{\mathfrak{q}}$ im Krullring $A_{\mathfrak{q}}$ für jedes $\mathfrak{q} \in U$. Folglich ist $g^m/f \in \Gamma(U)$. Wegen $g \notin \mathfrak{p}$ ist aber $g^m/f \notin A$. Widerspruch. Das beweist codim $\mathfrak{a} \geq 2$.

Ist codim $\mathfrak{a} \geq 2$, so gibt es zunächst ein $f \in \mathfrak{a}$, $f \neq 0$. Die endlich vielen Primideale $\mathfrak{p} \in P$ mit $f \in \mathfrak{p}$ umfassen $\mathfrak{a}$ nicht. Daher gibt es ein $g \in \mathfrak{a}$ derart, daß f,g Primfolge ist. Nach Satz (10.7) ist nun U vollständig. -

Weiter brauchen wir noch einen Hilfssatz über das Verhalten vollständiger Mengen bei flachen Abbildungen.

<u>(10.13) Hilfsatz</u>. Die offene Menge U in Spek A sei vollständig und quasi-kompakt. Ferner sei $\varphi: A \longrightarrow A'$ ein flacher Homomorphismus von Ringen. Mit ${}^*\varphi$: Spek $A' \longrightarrow$ Spek A sei die (stetige) Abbildung bezeichnet, die $\mathfrak{p}' \in$ Spek A' das Primideal $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}') \in$ Spek A zuordnet. Dann ist auch $U' := ({}^*\varphi)^{-1}(U)$ eine offene, vollständige und quasi-kompakte Menge in Spek A'.

<u>Beweis</u>. Es gibt ein Ideal $\mathfrak{a} = Af_1 + \dots + Af_r$ mit $U = D(\mathfrak{a}) = D(f_1) \cup \dots \cup D(f_r)$. Dann ist $U' = D(\mathfrak{a}A') = D(f_1A') \cup \dots \cup D(f_rA')$ und $({}^*\varphi)^{-1}(D(f_i)) = D(f_iA')$. Man kann $\Gamma(U)$ darstellen als Kern des Homomorphismus

$$h : \prod_{i=1}^{r} A_{f_i} \longrightarrow \prod_{i \neq j} A_{f_i f_j} ,$$

der ein Tupel von $s_i \in A_{f_i}$ auf das Tupel sämtlicher Differenzen $s_i - s_j$ abbildet. Der entsprechend gebildete Homomorphismus h' über A' geht dann einfach durch Tensoieren mit A' aus h hervor. Da Kern $h' = \Gamma(U')$ ist, erhält man wegen der Flachheit von A' über A, daß der kanonische Homomorphismus $A' \otimes_A \Gamma(U) \longrightarrow \Gamma(U')$ bijektiv ist. Mit $A \longrightarrow \Gamma(U)$ ist auch $A' = A' \otimes_A A \longrightarrow A' \otimes_A \Gamma(U)$ bijektiv. Insgesamt erhält man die kanonische Isomorphie $A' \longrightarrow \Gamma(U')$.

Schließlich soll mit den in diesem Paragraphen gewonnenen Mitteln ein wichtiges Kriterium hergeleitet werden:

<u>(10.14) Satz</u>. Sei B eine torsionsfreie endliche A-Algebra vom Rang n. A sei normaler Integritätsring, oder $\mathrm{Frei}_A B$

enthalte eine offene, quasi-kompakte und vollständige Menge U . Außerdem sei B unverzweigt über A . Dann ist B ein projektiver A-Modul.

Anmerkung. Ist A normaler Integritätsring, so gilt noch eine stärkere Aussage über B: Siehe Satz (12.7).

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A die Algebra $B_{\mathfrak{m}}$ ein freier $A_{\mathfrak{m}}$-Modul des Ranges n ist. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A und $R := A_{\mathfrak{m}}$. Besitzt $R/\mathfrak{m}_R$ nur endlich viele Elemente, so gehen wir zu $R' := R[X]_{\mathfrak{m}_R R[X]}$ über. Dies ist ein lokaler Ring mit dem unendlichen Restekörper $(R/\mathfrak{m}_R)(X)$. Die Erweiterung $R \longrightarrow R'$ ist treuflach. Daher ist $B_{\mathfrak{m}}$ genau dann frei vom Rang n über $R = A_{\mathfrak{m}}$, wenn $R' \otimes_R B_{\mathfrak{m}}$ frei vom Rang n über R' ist. Wir zeigen weiter, daß sich die Voraussetzungen des Satzes auf beliebige flache Erweiterungen A' von A übertragen, bei denen Normalität erhalten bleibt (Wie bei R'. Vgl. (10.3).). Es genügt dann endlich, den Satz für lokale Ringe mit unendlichem Restekörper zu beweisen.

Sei $\varphi: A \longrightarrow A'$ ein flacher Ringhomomorphismus (bei dem Normalität erhalten bleibt). $B' := A' \otimes_A B$ ist endliche A'-Algebra vom Rang n nach (10.1). Mit $^*\varphi$: Spek $A' \longrightarrow$ Spek A sei die φ zugeordnete Abbildung bezeichnet. Nach (10.13) ist $U' := (^*\varphi)^{-1}(U)$ eine offene, vollständige Menge. Wegen $(^*\varphi)^{-1}(\mathrm{Frei}_A B) \subseteq \mathrm{Frei}_{A'} B'$ ist $U' \subseteq \mathrm{Frei}_{A'} B'$. Nach Satz (2.5) ist B' unverzweigt über A' . Weiter ist B' torsionsfrei über A' , sogar der Untermodul eines endlichen freien A'-Moduls; denn nach dem folgenden Hilfssatz ist B Untermodul eines endlichen freien A -Moduls, und diese Eigenschaft bleibt bei flachen Erweiterungen erhalten.

(10.15) Hilfssatz. Sei A ein Ring mit totalem Quotientenring K und M ein endlicher A-Modul derart, daß $K \otimes_A M$ endlicher projektiver K-Modul ist. Genau dann ist M torsionsfrei, wenn M Untermodul einen endlichen freien A-Moduls ist.

Beweis. Sei M torsionsfrei. Dann ist M Untermodul von $K \otimes M$. Nach Voraussetzung über $K \otimes M$ ist $K \otimes M$ Untermodul eines freien K-Moduls K^m . Da M endlicher Modul ist, gibt es nun einen Nichtnullteiler $f \in A$ derart, daß fM in A^m einbettbar ist. Da f injektiv auf M multipliziert, erhält man insgesamt eine Einbettung von M in A^m . Die Umkehrung ist trivial. -

Wir fahren im Beweis zu Satz (10.14) fort. Der Satz ist noch zu zeigen in dem Fall, daß A lokaler Ring mit unendlichem Restekörper ist. Die charakteristischen Polynome der Elemente von B besitzen nach (10.4) bzw. (10.5) Koeffizienten in A . Daher wird jedes Element von B von einem normierten Polynom des Grades n über A annulliert. (Man beachte hierbei: B ist torsionsfrei.) Da B den Rang n über A hat, enthält jedes Erzeugendensystem von B als A-Modul mindestens n Elemente. Nach dem Lemma von Krull-Nakayama ist folglich die Dimension des Vektorraumes $B/\mathfrak{m}_A B$ über dem Körper $A/\mathfrak{m}_A$ mindestens n . Da $B/\mathfrak{m}_A B$ unverzweigt über diesem Körper ist, ist $B/\mathfrak{m}_A B$ direktes Produkt separabler endlicher Erweiterungskörper von $A/\mathfrak{m}_A$; siehe (3.1). Nach Satz (4.2), der sich anwenden läßt, da $A/\mathfrak{m}_A$ unendlich viele Elemente besitzt, ist nun sogar $B/\mathfrak{m}_A B$ von der Dimension n über $A/\mathfrak{m}_A$. Nach Krull-Nakayama gibt es dann ein Erzeugendensystem $x_1,\dots,x_n$ des A-Moduls B . Daß diese Elemente linear unabhängig sind über A , ist trivial. Also ist B freier A-Modul des Ranges n . -

Die Voraussetzung, daß B einen Rang besitzt, kann in gewissen Fällen weggelassen werden. Beispielsweise gilt:

<u>(10.16) Korollar</u>. Sei B eine torsionsfreie A-Algebra, die ein A-Modul von endlicher Darstellung ist. Sei $K \otimes_A B$ projektiver K-Modul, wobei K den totalen Quotientenring von A bezeichnet. $\mathrm{Frei}_A B$ enthalte eine offene, quasikompakte und vollständige Menge U . Außerdem sei B unverzweigt über A . Dann ist B projektiver A-Modul.

<u>Beweis</u>. Es genügt zu zeigen: Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A ist $B_{\mathfrak{m}}$ freie $A_{\mathfrak{m}}$-Algebra. Wie im Beweis des vorigen Satzes sieht man, daß sich alle Voraussetzungen auf die Algebra $B_{\mathfrak{m}}$ über $A_{\mathfrak{m}}$ übertragen. Wir dürfen daher von nun an annehmen, daß A lokal ist.

In diesem Fall hat aber B einen Rang über A (und somit ist (10.16) auf (10.14) zurückgeführt). Zum Beweis betrachten wir eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow C \longrightarrow A^m \longrightarrow B \longrightarrow 0$ mit einem endlichen A-Modul C . Sei U_i die Menge derjenigen $\mathfrak{p} \in U$, für die $B_{\mathfrak{p}}$ freier $A_{\mathfrak{p}}$-Modul des Ranges i ist, und sei $n := \min\{i : U_i \neq \emptyset\}$. Wir werden sehen, daß $U = U_n$ ist.

Für jeden A-Modul M endlicher Darstellung bezeichne $E_j(M)$ die Menge der $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek} A$, für die $M_{\mathfrak{p}}$ eine Minimalanzahl $\geq j$ von Erzeugenden über $A_{\mathfrak{p}}$ hat. Wie in [11], Kap. III, (3.3) zeigt man, daß $E_j(M)$ abgeschlossene Mengen sind. (Beweis: Sei $x_1, \ldots, x_r$ ein Erzeugendensystem von M über A, und seien $M_1, \ldots, M_s$ diejenigen Untermoduln von M, die mit je j-1 der x_i erzeugt werden können. Nach dem Lemma von Krull-Nakayama ist dann offenbar $E_j(M)$ der Durchschnitt der Träger der Moduln M/M_ν von endlicher Darstellung, $\nu = 1, \ldots, s$.) U_n ist als Komplement von $E_{n+1}(B)$ in U offen. Lokal in U ist C als direkter Summand von B von endlicher Darstellung; denn B ist lokal projektiv in U. Folglich ist jede Menge $U \cap E_j(C)$ abgeschlossen in U. Daher ist $U_n = E_{m-n-1}(C) \cap U$ auch abgeschlossen in U. Der Schnittring $\Gamma(U) \cong A$ kann nicht direktes Produkt sein; denn A ist lokal. Daher ist $U_n = U$.

Sei nun $\mathfrak{p}$ irgendein Primideal in A, welches im totalen Quotientenring K von A erhalten bleibt. Nach Voraussetzung über $K \otimes B$ ist $B_{\mathfrak{p}}$ frei von einem Rang m. Nach (10.13) ist $U \cap \operatorname{Spek} A_{\mathfrak{p}}$ vollständig, wenigstens nicht leer. Es gibt daher ein $\mathfrak{q} \in U$, $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Jetzt folgt m = n. Somit ist $K \otimes B$ projektiv vom Rang n.

<u>Anmerkung</u>. In den Sätzen (10.14) und (10.16) wird die Torsionsfreiheit von B nicht benötigt, wenn B und A lokal sind und wenn der Torsionsuntermodul tB von B verschieden ist. Wir skizzieren die Beweisidee (von Auslander und Buchsbaum, [2]):

Offenbar ist tB ein Ideal in B. Dann ist $\bar{B} := B/tB$ torsionsfreie A-Algebra. Es ist $\operatorname{Frei}_A B \subseteq \operatorname{Frei}_A \bar{B}$. Alle Voraussetzungen über B in den genannten Sätzen übertragen sich auf die A-Algebra $\bar{B}$. Daher ist $\bar{B}$ freier A-Modul. Somit spaltet $0 \longrightarrow tB \longrightarrow B \longrightarrow \bar{B} \longrightarrow 0$ auf. (Insbesondere ist tB endlicher A-Modul.) Daher ist $tB/\mathfrak{m}_A tB$ der Kern der kanonischen Abbildung g von $B/\mathfrak{m}_A B$ auf $\bar{B}/\mathfrak{m}_A \bar{B}$, die ein Ringhomomorphismus ist. Da B über A unverzweigt ist, ist $B/\mathfrak{m}_A B$ über $A/\mathfrak{m}_A$ unverzweigt und daher als lokaler Ring selbst ein Körper. Es folgt $0 = \operatorname{Kern} g = tB/\mathfrak{m}_A tB$. Nach Krull-Nakayama ist dann tB = 0.

<u>Anhang</u>. Wir geben einen Beweis für das Lemma (10.11) von Auslander-Buchsbaum an, der mit einigen wenigen der grundlegenden Hilfssätze über homologische Dimension und Kodimension auskommt.

Sei A noetherscher lokaler Ring und $M \neq 0$ ein A-Modul mit $dh_A M < \infty$. Wir beweisen die Formel durch Induktion über $dh_A M$. Ist $dh_A M = 0$, so ist M frei und $0 + \operatorname{codh} M = \operatorname{codh} A$ gilt trivialerweise. Sei jetzt $dh_A M \geq 1$. Wir führen den Induktionsschluß durch Induktion über codh A .

Sei codh A = 0 . Dann ist überhaupt jeder A-Modul W mit $dh_A W < \infty$ frei. Zum Beweis genügt es, eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow W \longrightarrow 0$ zu betrachten, in der G,F endliche freie A-Moduln sind, und dann zu zeigen, daß W notwendig frei ist. Aus $dh_A W \leq 1$ folgt, daß der Kern einer jeden homomorphen Abbildung eines freien endlichen A-Moduls auf W frei ist. Wir dürfen daher annehmen, daß der Rang von F mit der Minimalanzahl von Erzeugenden von W übereinstimmt. Dann ist aber $G \subseteq \mathfrak{m}_A F$. Es gibt wegen codh A = 0 , was $\mathfrak{m}_A \in \operatorname{Ass} A$ bedeutet, ein $f \in A$, $f \neq 0$, mit $f\mathfrak{m}_A = 0$. Also ist $fG = 0$ und $W = F$ frei.

Da M nicht frei ist, haben wir also codh $A \geq 1$. Es gibt eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ mit einem endlichen freien A-Modul F . Es ist $N \neq 0$ und $dh_A N = dh_A M - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $dh_A N + \operatorname{codh} N = \operatorname{codh} A$. Sei codh M = 0 . Dann gibt es ein $x \in F$, $x \notin N$, $\mathfrak{m}_A x \subseteq N$. Folglich enthält, wenn f irgendein Nichtnullteiler von F aus $\mathfrak{m}_A$ ist, N/fN die Restklasse y von fx , wobei $y \neq 0$ und $\mathfrak{m}_A y = 0$ gilt. Also ist codh N/fN = 0 und codh N = 1 . Die gesuchte Formel überträgt sich von N auf M .

Sei jetzt codh $M \geq 1$. Da nur endlich viele nichtmaximale Primideale von A zu vermeiden sind, besitzen A und M einen gemeinsamen Nichtnullteiler $f \in \mathfrak{m}_A$. Dann ist aber codh(A/Af) = codh A - 1 , codh M/fM = codh M - 1 und $dh_{A/Af}(M/fM) = dh_A M$, so daß die Induktionsvoraussetzung (auf A/AfA angewandt) das Gewünschte ergibt.

§11. Symmetrische Bilinearformen

Sei A ein Ring. Ferner sei M ein A-Modul und Φ eine symmetrische A-Bilinearform auf M . Mit

$$\sigma_M : M \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M,A)$$

bezeichnen wir den kanonischen A-Homomorphismus, der $x \in M$ die

Linearform $y \longmapsto \Phi(x,y)$ zuordnet.

Sei $\varphi : A \longrightarrow A'$ ein Homomorphismus von Ringen. Das Tensorieren mit A' ordnet Φ eine symmetrische A'-Bilinearform Φ' auf $A' \otimes_A M$ zu, bezüglich der man $\sigma_{A'\otimes M}$ bilden kann. Es gilt nun:

(11.1) Grundringerweiterung. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A' \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,A) \arrow[d, "\psi'_M"] \\ A' \otimes_A M \arrow[ur, "A'\otimes\sigma_M"] \arrow[r, "\sigma_{A'\otimes M}"'] & \mathrm{Hom}_{A'}(A' \otimes_A M, A') \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei ψ'_M der A'-Homomorphismus ist, der ein $a'\otimes h$, $a' \in A'$, $h \in \mathrm{Hom}_A(M,A)$, auf $a'\cdot(A'\otimes h)$ abbildet.

Beweis. Wegen der A'-Linearität der Homomorphismen genügt es, die Kommutativität auf Elementen der Form $1\otimes x$, $x \in M$, zu verifizieren. Es ist $\psi'_M(A'\otimes\sigma_M)(1\otimes x) = \psi'_M(1\otimes\sigma_M(x)) = A'\otimes\sigma_M(x)$. Dieser A'-Homomorphismus bildet $1\otimes y \in A'\otimes_A M$ auf $1\otimes\sigma_M(x)(y) = 1\otimes\Phi(x,y) = \Phi'(1\otimes x, 1\otimes y)$ ab. Dasselbe macht aber $\sigma_{A'\otimes M}(1\otimes x)$.

(11.2) Zusatz. Ist M endlicher projektiver A-Modul, so ist ψ'_M bijektiv.

Beweis. Sei F der Funktor, der jedem A-Modul M den A'-Modul $A'\otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,A)$ zuordnet, und G der Funktor, der jeden A-Modul M den A'-Modul $\mathrm{Hom}_{A'}(A'\otimes_A M, A')$ zuordnet. F und G sind (kontravariante) additive Funktoren und respektieren deswegen endlich direkte Summen. Die kanonischen Abbildungen ψ'_M ergeben eine Funktorabbildung $\psi' : F \longrightarrow G$. Man verifiziert, daß ψ'_A bijektiv ist. Dann ist ψ'_E bijektiv für alle endlichen freien Moduln A-Moduln E und natürlich auch für ihre direkten Summanden, das sind die endlichen projektiven A-Moduln.

Definition. Eine symmetrische Bilinearform auf dem A-Modul M heißt nicht ausgeartet, bzw. vermittelt eine Dualität, wenn der zugehörige kanonische Homomorphismus $\sigma_M : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,A)$ injektiv, bzw. bijektiv ist.

Sind $x_1,\dots,x_n$ Elemente von M, so heißt die n-reihige quadratische Matrix $(\Phi(x_i,x_j))_{1\le i,j\le n}$ die Gramsche Matrix von Φ bezüglich $x_1,\dots,x_n$. Ihre Determinante bezeichnen wir als Diskriminante $\operatorname{diskr}(x_1,\ldots,x_n) = \operatorname{diskr}_{\Phi}(x_1,\ldots,x_n)$ der $x_1,\ldots,x_n$.

Sei nun M freier A-Modul mit der Basis $x_1,\ldots,x_n$. Mit $x_1^*,\ldots,x_n^*$ bezeichnen wir die zugehörige Dualbasis von $M^* := \operatorname{Hom}_A(M,A)$. Sei $h : M^* \longrightarrow M$ der Isomorphismus, der x_i^* auf x_i abbildet. Dann ist $(\Phi(x_i,x_j))$ die Matrix des Endomorphismus $h\,\sigma_M$ bezüglich $x_1,\ldots,x_n$. Es folgt:

(11.3) Aussage. Sei M freier A-Modul mit der Basis $x_1,\ldots,x_n$. Der bezüglich der symmetrischen Bilinearform Φ gebildete Homomorphismus $\sigma_M : M \longrightarrow M^*$ ist genau dann surjektiv, wenn er bijektiv ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{diskr}_{\Phi}(x_1,\ldots,x_n)$ Einheit in A ist. σ_M ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{diskr}_{\Phi}(x_1,\ldots,x_n)$ Nichtnullteiler in A ist.

Von Interesse ist noch das folgende Kriterium.

(11.4) Gramsches Kriterium. Sei M ein A-Modul, der eine der beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A besitzt $M_{\mathfrak{m}}$ als Modul über $A_{\mathfrak{m}}$ ein Erzeugendensystem aus n Elementen.

(b) M ist torsionsfreier A-Modul des Ranges n .

Ferner sei Φ eine symmetrische Bilinearform auf M , und $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ seien Elemente von M derart, daß $\det(\Phi(x_i,x_j))$ Einheit in A ist. Dann sind $x_1,\ldots,x_n$ und $y_1,\ldots,y_n$ A-Basen von M ; insbesondere ist M freier A-Modul des Ranges n .

Beweis. Wir beweisen die Behauptung zunächst unter der Voraussetzung (a). Die Behauptungen lassen sich dann lokal verifizieren. Wir dürfen annehmen, daß A lokal ist und daß $M = Az_1+\ldots+Az_n$ ist. Sei $x_i = \sum_{r=1}^{n} a_{ri}z_r$ und $y_j = \sum_{s=1}^{n} b_{sj}z_s$ mit a_{ri} , $b_{sj} \in A$. Dann ist

$$(\Phi(x_i,x_j)) = (a_{ir})(\Phi(z_r,z_s)(b_{sj}) \ ,$$

und (a_{ri}), (b_{sj}) und $(\Phi(z_r,z_s))$ sind invertierbar, woraus die Behauptungen leicht folgen. (Die Cramersche Regel wird benutzt.)

Nun setzen wir (b) für M voraus. Sei K der totale Quotientenring von A . Nach dem bereits Bewiesenen ist $K \otimes_A M$ frei vom Rang n über K . Es genügt nun zu zeigen, daß M von $x_1,\ldots,x_n$ erzeugt wird. Sei $x \in M$ vorgegeben. Es gibt einen

Nichtnullteiler f in A derart, daß $fx = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ ist mit $a_i \in A$. Für jedes j ist $f\cdot\Phi(x,y_j) = \Phi(fx,y_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi(x_i,y_j)$. Die Cramersche Regel zeigt nun, weil $\det(\Phi(x_i,y_j))$ Einheit ist, daß $a_i \in Af$. Da M torsionsfrei ist, folgt $x = \sum_{i=1}^{n} (a_i/f)x_i \in Ax_1+\ldots+Ax_n$.

(11.5) Korollar. Seien A ein lokaler Ring, M ein endlicher A-Modul und Φ eine symmetrische Bilinearform auf M . Dann sind äquivalent:

(1) M ist frei und Φ vermittelt eine Dualität.

(2) Die von Φ auf $M/\mathfrak{m}_A M$ induzierte Form vermittelt eine Dualität.

Bemerkung. Ein endlicher Modul über einem lokalen Ring mit einer symmetrischen Bilinearform, die eine Dualität vermittelt, braucht nicht frei sein. So ist über dem Ring $A := k[[X,Y]]/(X^2-Y^3) = k[[x,y]]$ das maximale Ideal $\mathfrak{m}_A$ ein Modul, für den durch die Gramsche Matrix $\begin{pmatrix} y^2 & x \\ x & y \end{pmatrix}$ bezüglich des Erzeugendensystems x,y (Restklassen von X,Y), eine solche Bilinearform definiert wird.

Beweis. Die Implikation (1) $\Longrightarrow$ (2) ergibt sich aus (11.1) und (11.2). Umgekehrt: Sei $x_1,\ldots,x_n$ ein minimales Erzeugendensystem von M . Modulo $\mathfrak{m}_A$ ist $x_1,\ldots,x_n$ eine Basis von $M/\mathfrak{m}_A M$. Folglich ist $\mathrm{diskr}(x_1,\ldots,x_n) = \det(\Phi(x_i,x_j))_{1\le i,j\le n}$ eine Einheit in $A/\mathfrak{m}_A$, wenn (2) gilt. Dann ist $\det(\Phi(x_i,x_j))$ eine Einheit in A , und die Behauptung folgt aus (11.4) und (11.3).

§12. Charakterisierung der Unverzweigtheit mit der Spur

Sei A ein Ring und B eine projektive A-Algebra des Ranges n , d.h. eine A-Algebra, die ein projektiver A-Modul des Ranges n ist.

Durch die Spur $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}_A^B$ ist eine symmetrische A-Bilinearform

$$(x,y) \longmapsto \mathrm{Sp}(xy)$$

auf B definiert, die wir auch als Spur (-Bilinearform) bezeichnen. Wenn diese Bilinearform nicht ausgeartet ist, bzw. eine Dualität vermittelt, so sagen wir: Sp ist nicht ausgeartet, bzw. Sp vermittelt eine Dualität.

Sei $\varphi : A \longrightarrow A'$ ein Homomorphismus von Ringen. Dann ist $B' := A' \otimes_A B$ eine projektive A-Algebra des Ranges n . Wie wir am Ende von §8 sahen, gilt $A' \otimes Sp_A^B = Sp_{A'}^{B'}$. Dies bedeutet, daß beim Tensorieren mit A' die Spur-Bilinearform auf B in die Spur-Bilinearform auf B' übergeht. Insbesondere folgt aus (11.1) und (11.2):

<u>(12.1) Grundringerweiterung</u>. Sei B projektive A-Algebra des Ranges n und $\sigma_B : B \longrightarrow Hom_A(B,A)$ der durch die Spur definierte Homomorphismus. Ferner sei $\varphi : A \longrightarrow A'$ ein Homomorphismus von Ringen. Dann ist $A' \otimes \sigma_B$ nichts anderes als $\sigma_{A' \otimes B}$.

Betrachten wir σ_B noch näher. $Hom_A(B,A)$ läßt sich in natürlicher Weise als B-Modul auffassen: Für $h \in Hom_A(B,A)$ und $b \in B$ ist bh die Abbildung $x \longmapsto h(bx)$. Ist nun $x \in B$ und bezeichnet h_x das Multiplizieren mit x auf B , so ist offenbar $\sigma_B(x) = Sp \circ h_x = x \cdot Sp$.

<u>(12.2) Aussage</u>. Sei B projektive A-Algebra des Ranges n und $x \in B$. Dann ist $\sigma_B(x) = x\, Sp_A^B$. Insbesondere ist

$$\sigma_B : B \longrightarrow Hom_A(B,A)$$

ein B-Homomorphismus.

Es folgt: Sp_A^B ist genau dann nicht ausgeartet, wenn Sp_A^B von keinem Element $\neq 0$ aus B annulliert wird. Aus (11.3) folgt, daß σ_B genau dann bijektiv ist, wenn σ_B surjektiv ist. Also gilt:

<u>(12.3) Aussage</u>. Sei B projektive A-Algebra des Ranges n . Die Spur Sp_A^B vermittelt genau dann eine Dualität, wenn $Hom_A(B,A)$ als B-Modul von Sp_A^B erzeugt wird. In diesem Falle ist $Hom_A(B,A)$ als B-Modul isomorph zu B .

Das Hauptresultat dieses Paragraphen ist:

<u>(12.4) Satz</u>. Sei B eine projektive A-Algebra des Ranges n . Genau dann ist B unverzweigt über A , wenn Sp_A^B eine Dualität zwischen B und $Hom_A(B,A)$ vermittelt.

<u>Beweis</u>. Nach (2.3) ist B über A genau dann unverzweigt, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ aus A die endliche Algebra $B/\mathfrak{m}B$ über dem Körper $A/\mathfrak{m}$ unverzweigt ist. Andererseits ist $Hom_A(B,A)$ als direkter Summand des Duals eines endlichen

freien A-Moduls insbesondere ein endlicher A-Modul. Daher ist σ_B genau dann surjektiv, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A der Kokern von $(A/\mathfrak{m}) \otimes \sigma_B$ trivial ist. Wegen (12.1) bedeutet dies genau, daß für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A die Spur von $B/\mathfrak{m}B$ über $A/\mathfrak{m}$ eine Dualität vermittelt.

Wir dürfen daher von nun an annehmen, daß A ein Körper ist. Über einem Körper ist die Spur übrigens genau dann nicht ausgeartet, wenn sie eine Dualität vermittelt.

Zunächst zwei Hilfsüberlegungen. Sei R eine endliche Algebra über einem Körper k ; ist Sp_k^R nicht ausgeartet, so ist R reduziert. Beweis: Sei $\mathfrak{M}$ der Durchschnitt der maximalen Ideale von R . Jedes $x \in \mathfrak{M}$ ist nilpotent, woraus $Sp_k^R(xR) = 0$ folgt. Das ergibt $\mathfrak{M} \subseteq \text{Kern } \sigma_R$. Ist also σ_R injektiv, so ist $\mathfrak{M} = 0$, was bedeutet, daß R reduziert ist.

Sei R endliche Algebra über dem Körper k und k' ein Erweiterungskörper von k . Offensichtlich ist σ_R genau dann injektiv, wenn $k' \otimes_k \sigma_R$ injektiv ist. Nach (12.1) ist dies äquivalent dazu, daß $\sigma_{k'\otimes R}$ injektiv ist. Also: Sp_k^R ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $Sp_{k'}^{k'\otimes R}$ nicht ausgeartet ist.

Sei jetzt Sp_A^B nicht ausgeartet über A . Wie wir gerade sahen, ist dann $Sp_{A'}^{A'\otimes B^A}$ nicht ausgartet für jeden Erweiterungskörper A' von A . Nach Lemma (3.1) ist B folglich unverzweigt über A .

Sei umgekehrt B über A unverzweigt. Nach (3.1) ist B direktes Produkt von Körpern $B_1,\dots,B_r$, die separable endliche Erweiterungskörper von A sind. Es ist trivial zu sehen, daß Sp_A^B genau dann nicht ausgeartet ist, wenn alle Spuren $Sp_A^{B_i}$ nicht ausgeartet sind. Es genügt daher zu zeigen, daß separable Körpererweiterungen nicht ausgeartete Spuren besitzen.

Sei also K : k eine separable endliche Körpererweiterung. Sei L ein endlicher Erweiterungskörper von K , der normal über k ist. Sei $K = k[x]$ und α das Minimalpolynom von x über k . Dann ist $L \otimes_k K = L \otimes_k (k[X]/\alpha k[X]) \cong L[X]/\alpha L[X]$. Da über L in n verschiedene Linearfaktoren zerfällt, ist die L-Algebra $L \otimes_k K$ direktes Produkt von Körpern, die zu L isomorph sind. Folglich ist $Sp_L^{L\otimes K}$ nicht ausgeartet. Nach einer oben bereits benutzten Überlegung ist dann auch Sp_k^K nicht ausgeartet. Und das war noch zu zeigen.

<u>(12.5) Korollar</u>. Sei B eine projektive A-Algebra des Ranges n. Ist B unverzweigt über A , so ist $\mathrm{Hom}_A(B,A) = B\cdot \mathrm{Sp}_A^B$ als B-Modul isomorph zu B .

Der Beweis ergibt sich aus (12.2) und (12.4) .

<u>(12.6) Korollar</u>. Sei B eine projektive A-Algebra des Ranges $n \geqq 1$. Ist B unverzweigt über A , so ist $\mathrm{Sp}_A^B : B \longrightarrow A$ ein surjektiver A-Homomorphismus; insbesondere besitzt der A-Modul B einen zu A isomorphen direkten Summanden.

<u>Beweis</u>. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A . Da $B \cong \mathrm{Hom}_A(B,A)$ und da B endlicher projektiver A-Modul des Ranges $n \geqq 1$ ist, hat man $0 \neq (A/\mathfrak{m}) \otimes_A B \cong (A/\mathfrak{m}) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A) \cong \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{m}}(B/\mathfrak{m}B, A/\mathfrak{m})$. Wegen $\mathrm{Hom}_A(B,A) = B\,\mathrm{Sp}$ folgt Bild $\mathrm{Sp} \not\subset \mathfrak{m}$. Da dies für jedes maximale Ideal von A gilt, gilt Bild Sp = A .

Ein anderer Beweis ist wie folgt zu führen. Offenbar genügt es zu zeigen, daß für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A die Lokalisierung $A_{\mathfrak{m}} \otimes \mathrm{Sp}_A^B = \mathrm{Sp}_{A_{\mathfrak{m}}}^{B_{\mathfrak{m}}}$ surjektiv ist. Also darf man annehmen, daß B freier A-Modul mit der Basis $x_1,\dots,x_n$, $n \geqq 1$ über dem lokalen Ring A ist. Dann ist $\det(\mathrm{Sp}(x_i x_j))$ eine Einheit. Folglich ist eines der Elemente $\mathrm{Sp}(x_i x_j)$ der Matrix $(\mathrm{Sp}(x_i x_j))$ eine Einheit (im lokalen Ring A) . Das bedeutet aber $1 \in$ Bild Sp . -

Der Satz (12.4) setzt uns in die Lage, den folgenden wichtigen Satz über unverzweigte Erweiterungskörper normaler Ringe zu beweisen.

<u>(12.7) Satz von Krull</u>. Sei A normaler Integritätsring und B eine unverzweigte torsionsfreie endliche A-Algebra. Dann ist B direktes Produkt von endlich vielen normalen Integritätsringen, die unverzweigte endliche projektive A-Algebren sind.

<u>Beweis</u>. Einen großen Teil der Vorarbeit hat bereits Satz (10.14) geleistet: B ist ein projektiver A-Modul vom Rang n .

Sei K der Quotientenkörper von A . Da B torsionsfrei ist, ist B in die K-Algebra $L := K \otimes_A B$ eingebettet. L ist über K unverzweigt und endlich und daher direktes Produkt von separablen endlichen Erweiterungskörpern $L_1,\dots,L_r$ von K . Insbesondere ist L der totale Quotientenring von B . Wir zeigen nun zuerst, daß B ganz-abgeschlossen in L ist. Sei $\overline{B}$ der ganze Abschluß von B in L .

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A , so ist $K \otimes_{A_\mathfrak{p}} B_\mathfrak{p} = (K \otimes_A B)_\mathfrak{p} = L$ auch der totale Quotientenring von $B_\mathfrak{p}$; bekanntlich ist $\bar{B}_\mathfrak{p}$ der ganze Abschluß von $B_\mathfrak{p}$ in L . Es genügt deshalb, $\bar{B}_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek} A$ zu zeigen, d.h. wir dürfen für den Nachweis von $\bar{B} = B$ annehmen, daß A lokal ist; die Voraussetzungen übertragen sich ja. Nunmehr gibt es eine A-Basis $x_1,\ldots,x_n$ für B . Sei $x \in \bar{B}$. Nach (12.4) ist die (mit der Spur gebildete) Diskriminante $d := \operatorname{diskr}(x_1,\ldots,x_n)$ eine Einheit in A . Wir setzen $x = a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ mit $a_i \in K$ an. Mit B ist auch $B[x]$ endlich über A ; nach (10.4) ist daher $\operatorname{Sp}(B[x]) \subseteq A$. Insbesondere ist $A \ni \operatorname{Sp}(xx_j) = \sum_{i=1}^n a_i \operatorname{Sp}(x_ix_j)$. Nach der Cramerschen Regel ist dann $da_i \in A$ für jedes i . Da d Einheit in A ist, erhält man $a_1,\ldots,a_n \in A$, also $x \in B$.

Wir haben bewiesen: B ist ganz abgeschlossen in L . Das Einselement e_i von L_i ist idempotent in L . Die Ganzheitsgleichung $e_i^2 - e_i = 0$ zeigt, daß e_i bereits zu B gehört. Daher ist B direktes Produkt der Unterringe Be_i , die in L_i liegen. Diese sind auch unverzweigte endliche projektive A-Algebren. Jedes Be_i ist ganz abgeschlossen im Körper L_i. Damit ist (12.7) bewiesen.

<u>Anmerkung</u>. Unter gewissen Voraussetzungen kann man in (12.7) auf die Voraussetzung der Torsionsfreiheit verzichten; vgl. die Anmerkung am Schluß von §10 .

Für die Galoistheorie ist folgende Anwendung von (12.7) nützlich:

<u>(12.8) Satz</u>. Sei A ein normaler Integritätsring und B eine unverzweigte torsionsfreie endliche A-Algebra. Ferner sei C ein normaler Integritätsring, der A-Unteralgebra von B ist. Dann ist C eine unverzweigte endliche projektive A-Algebra.

<u>Beweis</u>. Nach (12.7) ist B direktes Produkt endlich vieler normaler Integritätsringe B_i , die unverzweigte endliche projektive A-Algebren sind. Die B_i sind Restklassenringe von B . Dies gibt zu kanonischen Homomorphismen von C in die B_i Anlaß, deren Kerne endlich viele Primideale sind, deren Durchschnitt das Nullideal ergibt. Daher ist bereits einer der Kerne das Nullideal im Integritätsring C . Wir dürfen daher annehmen, daß auch B ein normaler Integritätsring ist.

Die Voraussetzungen übertragen sich auf alle Lokalisierungen von A . Nehmen wir daher zunächst einmal an, daß A lokal ist. Dann ist B semi-lokal. Nun ist aber B auch eine unverzweigte torsionsfreie endliche C-Algebra. Da B ganz über C ist, ist C insbesondere semi-lokal. Nach (12.7) ist B unverzweigte endliche projektive C-Algebra mit einem Rang t. Daher ist $B \cong C^t$. Also gibt es einen C-Homomorphismus von B auf C . Das zeigt, daß C freie endliche A-Algebra ist; denn B ist ja frei über A .

Nach (2.3) ist C bereits dann unverzweigt über A , wenn $C/\mathfrak{m}_A C$ unverzweigt über $A/\mathfrak{m}_A$ ist. Dafür brauchen wir wegen (3.1) nur zu zeigen, daß $C/\mathfrak{m}_A C$ Unteralgebra von $B/\mathfrak{m}_A B$ ist; denn B ist unverzweigt über A . Also braucht man nur $C \cap ((\mathfrak{m}_A C)B) = \mathfrak{m}_A C$ zu verifizieren. Aus der Unverzweigtheit von B über C folgt, daß sich das Jacobsonradikal von C zum Jacobsonradikal von B erweitert: $\mathfrak{m}_C B = \mathfrak{m}_B$. Wegen der Unverzweigtheit von B über A ist außerdem $\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B$. Daher hat man $C \cap ((\mathfrak{m}_A C)B) = C \cap \mathfrak{m}_B = C \cap \mathfrak{m}_C B$. Da B frei über A ist, folgt nun $\mathfrak{m}_A C = \mathfrak{m}_C$.

Wir haben bewiesen: Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A ist $C_{\mathfrak{m}}$ unverzweigte freie $A_{\mathfrak{m}}$-Algebra des Ranges $s := m/t$. Nun ist nur noch zu beweisen, daß C endlich über A ist.

Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A sei $x_1(\mathfrak{m}),\ldots,x_s(\mathfrak{m})$ eine Teilmenge von C , die Basis von $C_{\mathfrak{m}}$ über $A_{\mathfrak{m}}$ ist. Sei $d_{\mathfrak{m}} := \operatorname{diskr}(x_1(\mathfrak{m}),\ldots,x_s(\mathfrak{m}))$. Dann ist $d_{\mathfrak{m}} \in A$ und $d_{\mathfrak{m}}$ Einheit in A . Es ist klar, daß alle $d_{\mathfrak{m}}$ das Ideal A erzeugen. Es gibt daher eine endliche Menge N von maximalen Idealen von A derart, daß $\sum_{\mathfrak{m}\in N} Ad_{\mathfrak{m}} = A$ ist. Sei nun $\mathfrak{q}$ ein beliebiges maximales Ideal von A . Es gibt ein $\mathfrak{m} \in N$ derart, daß $d_{\mathfrak{m}}$ Einheit in $A_{\mathfrak{q}}$ ist. Nach dem Gramschen Kriterium ist dann $x_1(\mathfrak{m}),\ldots,x_s(\mathfrak{m})$ Erzeugendensystem von $C_{\mathfrak{q}}$ über $A_{\mathfrak{q}}$. Damit ist klar, daß C von den $x_i(\mathfrak{m}), 1 \leq i \leq s, \mathfrak{m} \in N$ über A erzeugt wird.

§13. Diskriminantenideale

Sei A ein Ring und B eine endliche A-Algebra mit dem Rang n . Spur und Norm von Elementen aus B sind dann nach §10 wohldefinierte Elemente aus dem totalen Quotientenring K von A . Zu jedem $x \in B$ sind $Sp(x)$ und $N(x)$ sogar ganz über A nach (10.3).

Das Bild des A-Homomorphismus $\bigwedge^n B \otimes_A \bigwedge^n B \xrightarrow{\text{diskr}} K$ mit

$$(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \otimes (y_1 \wedge \ldots \wedge y_n) \longmapsto \det(\mathrm{Sp}(x_i y_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

heißt das <u>Diskriminantenideal</u> $\mathfrak{d}_A^B$ von B über A , oder auch kurz die <u>Diskriminante</u> von B über A . Es ist offenbar ein endlicher A-Untermodul von K . Im allgemeinen ist $\mathfrak{d}_A^B$ nicht in A enthalten.

Da die Spur in $K \otimes_A B$ ausgerechnet wird, ist $\mathfrak{d}_A^B = \mathfrak{d}_A^{B/tB}$, wobei tB den Torsionsuntermodul von B bezeichnet, der ein Ideal in B ist. Über die Torsion der A-Algebra B gibt das Diskriminantenideal also keinen Aufschluß. Nach (10.4) und (10.5) ist klar:

<u>(13.1) Aussage</u>. Ist A ganz abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring oder enthält $\mathrm{Frei}_A B$ eine offene quasi-kompakte und vollständige Menge, so ist $\mathfrak{d}_A^B$ ein endliches Ideal in A .

Nach (10.2) gilt ferner:

<u>(13.2) Aussage</u>. Sei B eine endliche A-Algebra des Ranges n , $\varphi : A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus und B' die endliche A'-Algebra $B' := A' \otimes_A B$ des Ranges n . Es gebe ein multiplikatives System S in A derart, daß für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus A mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ der $A_{\mathfrak{p}}$-Modul $B_{\mathfrak{p}}$ frei ist und daß $\varphi(S)$ nur aus Nichtnullteilern von A' besteht. (Diese Voraussetzung ist beispielsweise für $S = \{1\}$ erfüllt, wenn B projektiv ist, und für das multiplikative System aller Nichtnullteiler von A , wenn A' flach über A ist.) Dann ist

$$\mathfrak{d}_{A'}^{B'} = A' \cdot \mathfrak{d}_A^B \quad .$$

<u>Beweis</u>. Sei K der totale Quotientenring von A und K' der von A'. Der A-Modul $\mathfrak{d}_A^B$ wird von den Diskriminanten $\det(\mathrm{Sp}_K^{K \otimes B}(x_i y_j))$ erzeugt, wobei $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ irgendwie aus einem A-Erzeugendensystem von B herausgegriffen wird. Das Entsprechende gilt für $\mathfrak{d}_{A'}^{B'}$ und die Elemente $1 \otimes x_i$, $1 \otimes y_j$ von B' . Es genügt also für beliebige $x \in B$ zu zeigen, daß $\mathrm{Sp}_K^{K \otimes B}(x)$ bei kanonischer Abbildung in K' das Element $\mathrm{Sp}_{K'}^{K' \otimes B'}(1 \otimes x)$ ergibt. Die Spuren sind aber Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Multiplikation mit x bzw. $1 \otimes x$. Daher folgt das Resultat nun mit (10.2). -

Zum Gebrauch von (13.2) sei an die Anmerkung zu (10.2) erinnert.

Mit der Diskriminante $\mathfrak{n}_A^B$ läßt sich die Verzweigungsmenge $\mathrm{vzw}_A^B = \mathrm{Tr}_A D_A(B) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spek}\ A : B_{\mathfrak{p}}$ verzweigt über $A_{\mathfrak{p}}\}$ (zur Definition siehe den Anfang von §2) beschreiben:

(13.3) Satz. Sei B eine torsionsfreie endliche A-Algebra vom Rang n . A sei normaler Integritätsring, oder $\mathrm{Frei}_A B$ enthalte eine offene, quasi-kompakte und vollständige Menge. Dann gilt:

$$\mathrm{vzw}_A^B = V(\mathfrak{n}_A^B) .$$

Beweis. Wie im Beweis zu Satz (10.14) in den Einzelheiten ausgeführt ist, übertragen sich alle Eigenschaften von A und B bei Nenneraufnahme multiplikativer Systeme.

Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{n}_A^B)$, also $\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{n}_A^B$ umfassendes Primideal von A . Dann ist $A_{\mathfrak{p}} \neq A_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}_A^B = \mathfrak{n}_{A_{\mathfrak{p}}}^{B_{\mathfrak{p}}}$. Wäre $\mathfrak{p} \notin \mathrm{vzw}_A^B$, dann wäre $B_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt über $A_{\mathfrak{p}}$. Nach (10.14) bedeutete dies, daß $B_{\mathfrak{p}}$ endliche freie $A_{\mathfrak{p}}$-Algebra wäre. Aus der Unverzweigtheit folgte nach Satz (12.4), daß die Spur von $B_{\mathfrak{p}}$ über $A_{\mathfrak{p}}$ eine vollständige Dualität vermittelte, was hieße, daß die Diskriminante von $B_{\mathfrak{p}}$ über $A_{\mathfrak{p}}$ das Einheitsideal $A_{\mathfrak{p}}$ wäre. Widerspruch! Also ist doch $\mathfrak{p} \in \mathrm{vzw}_A^B$.

Sei umgekehrt $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{n}_A^B)$. Zu zeigen ist: $\mathfrak{p} \notin \mathrm{vzw}_A^B$. Es ist $\mathfrak{n}_{A_{\mathfrak{p}}}^{B_{\mathfrak{p}}} = (\mathfrak{n}_A^B)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$. Wir dürfen also annehmen, daß A lokal ist und daß $\mathfrak{n}_A^B = A$ ist, und haben dann zu zeigen, daß B unverzweigt über A ist. Da A lokal ist, gibt es Elemente $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n \in B$ derart, daß $\det(\mathrm{Sp}(x_i y_j))$ Einheit in A ist. Sei K der totale Quotientenring von A . Nach Voraussetzung über B ist $K \otimes_A B$ projektiver Modul des Ranges n über K . Das Cramsche Kriterium zeigt, daß $K \otimes_A B$ frei vom Rang n über K ist und insbesondere $y_1,\ldots,y_n$ als K-Basis hat. Da B torsionsfrei ist, hat man $B \subseteq K \otimes_A B$. Wir zeigen nun $B = Ay_1 + \ldots + Ay_n$ in $K \otimes_A B$. Sei $y \in B$ vorgegeben, etwa $y = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n$ mit $a_j \in K$. Dann ist $\mathrm{Sp}(x_i y) = \sum_{j=1}^n a_j \mathrm{Sp}(x_i y_j)$. Für das Element $x_i y$ von B ist $\mathrm{Sp}(x_i y) \in A$ nach (10.4) und (10.5). Mit der Cramerschen Regel folgt nun $\det(\mathrm{Sp}(x_i y_j)) \cdot a_\nu \in A$ für alle ν, also $a_1,\ldots,a_n \in A$. Das war noch zu zeigen.

(13.4) Korollar. Sei B eine torsionsfreie endliche A-Algebra vom Rang $n \geq 1$. A sei ein normaler Integritätsring, oder $\mathrm{Frei}_A B$ enthalte eine offene, quasi-kompakte und vollständige Menge. Dann sind äquivalent:

(1) B ist unverzweigt über A .

(2) Es ist $\mathfrak{n}_A^B = A$.

(3) Der A-Homomorphismus $\Lambda^n B \otimes_A \Lambda^n B \xrightarrow{\mathrm{diskr}} A$ ist bijektiv.

<u>Beweis</u>. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist ein Spezialfall von (13.3). Daß die Diskriminantenabbildung genau dann surjektiv ist (2) , wenn sie bijektiv ist (3) , folgt einfach daraus, daß unter der Voraussetzung der Unverzweigtheit B nach (10.14) projektiv vom Rang n über A ist, so daß $\bigwedge^n B \otimes_A \bigwedge^n B$ projektiv vom Rang 1 über A ist.

<u>(13.5) Lemma</u>. Sei B eine torsionsfreie endliche A-Algebra vom Rang $n \geq 1$. Mit K sei der totale Quotientenring von A bezeichnet. $L := K \otimes_A B$ sei unverzweigt über K . Dann sind äquivalent:

(1) B ist projektive A-Algebra.

(2) $\mathfrak{d}_A^B$ ist ein invertierbares Ideal. (Das soll heißen: $\mathfrak{d}_A^B$ ist ein projektiver A-Untermodul des Ranges 1 von K .)

<u>Beweis</u>. Aus (1) folgt (2). Sei B projektiv. Dann ist $M := \bigwedge^n B \otimes_A \bigwedge^n B$ ein projektiver A-Modul des Ranges 1 . Es genügt nun zu zeigen, daß die Diskriminantenabbildung injektiv ist. M ist aber torsionsfrei und daher in $\bigwedge^n L \otimes_K \bigwedge^n L$ eingebettet, und sogar dort ist diskr injektiv, da L unverzweigte projektive K-Algebra vom Rang n ist.

Aus (2) folgt (1) . Sei $\mathfrak{d}_A^B$ invertierbar. Diese Eigenschaft und die Voraussetzungen übertragen sich auf alle Lokalisierungen von A . Wir dürfen deshalb A lokal annehmen, und haben zu zeigen, daß B freier A-Modul des Ranges n ist. $\mathfrak{d}_A^B$ ist jetzt ein freier A-Modul des Ranges 1 . Jedes Erzeugendensystem von $\mathfrak{d}_A^B$ enthält eine Basis. Daher gibt es Elemente $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_n$ aus B mit $\mathfrak{d}_A^B = A\cdot\Delta$, wo $\Delta := \det(\mathrm{Sp}(x_i y_j)) \in K$. Es ist $K = \mathfrak{d}_K^L = K\cdot\mathfrak{d}_A^B$; denn L ist unverzweigt über K . Also ist Δ Einheit in K . Nach dem Gramschen Kriterium ist $y_1,\dots,y_n$ eine K-Basis von L . Wir behaupten: $B = Ay_1+\dots+Ay_n$. Sei nämlich $x \in B$, $x = a_1y_1+\dots+a_ny_n$ mit $a_j \in K$. Es ist $\mathrm{Sp}(x_i x) = \sum_{j=1}^n a_j \mathrm{Sp}(x_i y_j)$. Nach der Cramerschen Regel ist nun $a_\vartheta\Delta$ die Determinante der Matrix, die aus $(\mathrm{Sp}(x_i y_j))$ durch Ersetzen von y_ϑ durch x hervorgeht, also ebenfalls ein Element von $\mathfrak{d}_A^B$. Da Δ Einheit in K ist, folgt jetzt $a_\vartheta \in A$, und dies für $1 \leq \vartheta \leq n$. Somit ist $y_1,\dots,y_n$ eine A-Basis von B .

<u>Bemerkung</u>. Die A-Algebra B erfülle die Voraussetzungen von (13.5) und die dort angegebenen äquivalenten Bedingungen. Dann ist die Diskriminante $\mathfrak{d}_A^B$ in der Gruppe Pic A der projektiven A-Moduln vom Rang 1 ein Quadrat, nämlich das Quadrat des projektiven A-Moduls $\bigwedge^n B$ vom Rang 1 über A . Der Modul $\bigwedge^n B$

braucht nicht frei zu sein. Beispiel: A Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ und B Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}(\sqrt{-5}\,,\sqrt{2})$.

Es lohnt sich, den zweiten Teil des Beweises von (13.5) als gesondertes Lemma aufzuführen:

<u>(13.6) Lemma</u>. Sei B eine torsionsfreie endliche A-Algebra vom Rang $n \geqq 1$. Mit K sei der totale Quotientenring von A bezeichnet. $K \otimes_A B$ sei unverzweigt über K. Sind $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ Elemente von B mit $A\cdot\det(\mathrm{Sp}(x_iy_j)) = \mathfrak{n}_A^B$, so sind $x_1,\dots,x_n$ und $y_1,\dots,y_n$ A-Basen von B über A; insbesondere ist B frei über A.

Wir sind nun in der Lage, einen Spezialfall des Satzes von der Reinheit des Verzweigungsortes behandeln zu können. Diese Überlegung wird in Kapitel V beim Beweis des allgemeinen Satzes benötigt.

<u>(13.7) Satz</u>. Sei A ein noetherscher Ring und B eine endliche projektive A-Algebra des Ranges $n \geqq 1$. Für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von A mit $\operatorname{codh} A_{\mathfrak{p}} \leq 1$ sei $B_{\mathfrak{p}}$ über $A_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt. Dann ist B unverzweigt über A.

<u>Beweis</u>. Da B projektiv ist ($\mathrm{Frei}_A B = \mathrm{Spek}\,A$), ist $\mathfrak{n}_A^B$ ein ganzes Ideal. Wegen (13.3) ist $\mathrm{vzw}_A^B = V(\mathfrak{n}_A^B)$, und wir brauchen nur zu zeigen, daß $\mathfrak{n}_A^B \neq A$ zum Widerspruch führt.

Sei K der totale Quotientenring von A. Die maximalen Ideale von K erhält man aus den $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,A$, für die $\operatorname{codh} A_{\mathfrak{p}} = 0$ ist. Daher ist $K \otimes_A B$ unverzweigt über K. Nach (13.5) ist nun $\mathfrak{n}_A^B$ ein invertierbares Ideal. Bei $\mathfrak{n}_A^B = A$ sei $\mathfrak{q}$ ein minimales $\mathfrak{n}_A^B$ umfassendes Primideal. Dann ist $(\mathfrak{n}_A^B)_{\mathfrak{q}}$ ein Hauptideal in $A_{\mathfrak{q}}$, das von einem Nichtnullteiler erzeugt wird. Nach der Wahl von $\mathfrak{q}$ ist $\operatorname{codh} A_{\mathfrak{q}} = 1$. Nach Voraussetzung ist daher $B_{\mathfrak{q}}$ unverzweigt über $A_{\mathfrak{q}}$, was $(\mathfrak{n}_A^B)_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}_{A_{\mathfrak{q}}}^{B_{\mathfrak{q}}} = A_{\mathfrak{q}}$ bedeutet. Dies ist ein Widerspruch zu $\mathfrak{n}_A^B \subseteq \mathfrak{q}$.

Als Ergänzung zu Lemma (13.5) erwähnen wir noch zwei nützliche Kriterien:

<u>(13.8) Lemma</u>. Sei A ein Krullring und B eine endliche torsionsfreie A-Algebra des Ranges n. Dann gilt:

(1) Ist $\mathfrak{n}_A^B$ ein reduziertes invertierbares Ideal ($\neq 0$), so ist B projektiv über A und ganz abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring.

(2) Sind $x_1,\dots,x_n$ Elemente von B derart, daß das von

$\mathrm{diskr}(x_1,\ldots,x_n)$ erzeugte Ideal ein von 0 verschiedenes reduziertes Ideal ist, so ist B frei über A mit A-Basis $x_1,\ldots,x_n$, und B ist ganz abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring.

In beiden Fällen ist B direktes Produkt endlich vieler Krullringe, die endlich über A sind.

<u>Beweis</u>. Sei K der Quotientenkörper von A . Dann ist $L := K \otimes_A B$ bereits ein Ring, in dem alle Nichtnullteiler Einheiten sind. B ist in L eingebettet. Daher ist L der totale Quotientenring von B . In beiden Fällen hat man $\mathfrak{n}_K^L = K\,\mathfrak{n}_A^B \neq 0$ und daher $\mathfrak{n}_K^L = K$. Also ist L unverzweigt über K . Nach (3.1) ist L direktes Produkt separabler endlicher Erweiterungskörper $K_1,\ldots,K_r$ von K .

Sei x ein Element der ganz abgeschlossenen Hülle $\widetilde{B}$ von B in L und $B' := B[x]$. B' ist ebenfalls eine endliche torsionsfreie A-Algebra des Ranges n . Wir zeigen in beiden Fällen $B = B'$. In Fall (2) sei $F := Ax_1+\ldots+Ax_n$.

Sei P die Menge der minimalen Primideale $\neq 0$ in A . Da B' torsionsfrei ist, ist $B'_{\mathfrak{p}}$ ein freier $A_{\mathfrak{p}}$-Modul des Ranges n über dem Hauptidealring; sei etwa $y_1,\ldots,y_n$ eine Basis. In Fall (1) seien $x_1,\ldots,x_n$ Elemente aus B , die eine Basis von $B_{\mathfrak{p}}$ über $A_{\mathfrak{p}}$ ergeben. Sei $x_j = \sum a_{ij}y_i$ mit $a_{ij} \in A_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $\mathrm{diskr}(x_1,\ldots,x_n) = \det(a_{ij})^2 \cdot \mathrm{diskr}(y_1,\ldots,y_n)$ in $A_{\mathfrak{p}}$. Wegen $\mathfrak{n}_{A_{\mathfrak{p}}}^{B_{\mathfrak{p}}} = A_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{n}_A^B$ in Fall (1) und direkt nach Voraussetzung in Fall (2) erzeugt $d := \mathrm{diskr}(x_1,\ldots,x_n)$ ein reduziertes Ideal $\neq 0$ in $A_{\mathfrak{p}}$, also entweder $A_{\mathfrak{p}}$ oder $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Es ist jetzt klar, daß $\det(a_{ij})$ eine Einheit ist. Das bedeutet aber $B_{\mathfrak{p}} = B'_{\mathfrak{p}}$ bzw. $F_{\mathfrak{p}} = B'_{\mathfrak{p}}$.

Das Ideal $\mathfrak{a} := \mathrm{Ann}_A(B'/B)$ bzw. $\mathfrak{a} := \mathrm{Ann}_A(B'/F)$ hat nach dem gerade Bewiesenen die Kodimension $\geqq 2$. Es ist somit klar, daß $\mathfrak{a}^{2n}\cdot\mathfrak{n}_A^{B'} \subseteq \mathfrak{n}_A^B$ in Fall (1) und $\mathfrak{a}^{2n}\cdot\mathfrak{n}_A^{B'} \subseteq A\cdot d$ in Fall (2). Wegen $\mathrm{codim}\,\mathfrak{a}^{2n} \geqq 2$ gibt es, da $\mathfrak{n}_A^B$ und Ad ungemischte Ideale der Kodimension 1 sind, ein $f \in \mathfrak{a}^{2n}$, das prim zu $\mathfrak{n}_A^B$ bzw. Ad ist. Es folgt jetzt $\mathfrak{n}_A^{B'} = \mathfrak{n}_A^B$ in Fall (1) und $\mathfrak{n}_A^{B'} = Ad = \mathfrak{n}_A^B$ in Fall (2) . Nach (13.5) sind daher B und B' endliche projektive A-Moduln. Mit Hilfe der Gleichheit der Diskriminanten zeigt man nun, indem man (13.6) lokal anwendet, daß $B_{\mathfrak{m}} = B'_{\mathfrak{m}}$ ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A . Dann ist B = B' . (Das Lokalisieren kann man sich in Fall (2) sparen.)

Eine einfache Betrachtung der idempotenten Elemente von L zeigt (vgl. den Schluß des Beweises von (12.7)), daß B in das direkte Produkt der (über A endlichen) Ringe B_i zerfällt, die das Bild von B in K_i sind. Und dabei ist B_i der ganze Abschluß von A in K_i, also ein Krullring. -

Schließlich sei noch ein Hinweis zur Berechnung der Diskriminanten gegeben. Sei B endliche A-Algebra vom Rang n, etwa $B = Ax_1+\ldots+Ax_m$. Dann sei $\mathfrak{n}_1$ das von den Diskriminanten $\operatorname{diskr}(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$ erzeugte A-Ideal in K bezeichnet. Man hat $\mathfrak{n}_1 \subseteq \mathfrak{n}_A^B$. Natürlich hängt $\mathfrak{n}_1$ i.a. von der Auswahl des Erzeugendensystems ab. Es gibt aber Fälle, in denen sich die Verwendung des (einfacher zu berechnenden) Ideals $\mathfrak{n}_1$ lohnt. Ist B beispielsweise endliche projektive A-Algebra (wie das bei den endlichen Erweiterungen von Dedekindringen der Fall ist), so ist notwendig $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_A^B$, wie man durch Lokalisieren und Aussuchen von Basen aus den x_i im Lokalen sofort feststellt. Immerhin ist $\mathfrak{n}_1$ mit Nenneraufnahme verträglich. Es gilt ferner: Ist A normaler Integritätsring, oder enthält $\operatorname{Frei}_A B$ eine offene, quasi-kompakte und vollständige Menge, ist B torsionsfreie A-Algebra und ist $\mathfrak{n}_1$ ein invertierbares Ideal, so ist B projektiv über A und $\mathfrak{n}_A^B = \mathfrak{n}_1$. Die Hilfsmittel für den Beweis stehen in den Sätzen dieses Paragraphen zur Verfügung.

KAPITEL III: DIFFERENTEN

§14. Frobeniusalgebren

In der Differententheorie, die wir in diesem Kapitel besprechen wollen, ist es vorteilhaft, den Begriff der Frobeniusalgebra verwenden zu können.

Definition. Sei A ein Ring. Eine A-Algebra B heißt eine Frobeniusalgebra über A, wenn B endlicher projektiver A-Modul ist und wenn der B-Modul $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ projektiv ist. Eine A-Algebra B heißt eine strikte Frobeniusalgebra über A, wenn B endlicher projektiver A-Modul ist und wenn der B-Modul $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ isomorph zu B ist.

Sei B Frobeniusalgebra über A. Als A-Modul ist $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ endlich. Also ist $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ auch als B-Modul endlich, d.h. $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ ist ein endlicher projektiver B-Modul.

Will man bei einer endlichen projektiven A-Algebra B die Frobeniuseigenschaft nachprüfen, so beachte man, daß $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ notwendig Modul endlicher Darstellung über B ist. Ist nämlich $h : B^m \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(B,A)$ ein surjektiver B-Homomorphismus, so besitzt h als A-Homomorphismus einen Schnitt, d.h. Kern h ist A-projektiv. Dann ist Kern h auch endlicher B-Modul.

(14.1) Direkte Produkte. Ein direktes Produkt von A-Algebren $B_1,\dots,B_r$ ist genau dann eine Frobeniusalgebra über A, wenn $B_1,\dots,B_r$ Frobeniusalgebren über A sind.

Beweis. Das direkte Produkt $\prod_{i=1}^r B_i$ ist genau dann endlich und A-projektiv, wenn es alle Faktoren B_i sind. Ferner ist $\mathrm{Hom}_A(\prod_{i=1}^r B_i, A) \cong \prod_{i=1}^r \mathrm{Hom}_A(B_i,A)$ als Modul über $\prod_{i=1}^r B_i$ genau dann projektiv, wenn die direkten Faktoren $\mathrm{Hom}_A(B_i,A)$ projektiv über B_i sind.

(14.2) Hilfssatz. Sei B eine endliche projektive A-Algebra, A' eine weitere A-Algebra und B' die A'-Algebra $A' \otimes_A B$. Dann sind die kanonischen Abbildungen

$$B' \otimes_B \mathrm{Hom}_A(B,A) \longrightarrow A' \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A) \xrightarrow{\psi'_B} \mathrm{Hom}_{A'}(B',A')$$

bijektive B'-Homomorphismen.

Beweis. Daß ψ'_B bijektiver A'-Homomorphismus ist, wurde in (11.2) bewiesen. Da ψ'_B durch $a' \otimes h \longmapsto a'(A' \otimes h)$ gegeben ist,

ist auch die B'-linearität klar. Wegen der Assoziativität des Tensorproduktes ist schließlich $A' \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A) = A' \otimes_A (B \otimes_B \mathrm{Hom}_A(B,A)) = (A' \otimes_A B) \otimes_B \mathrm{Hom}_A(B,A) = B' \otimes_B \mathrm{Hom}_A(B,A)$, und diese Isomorphien sind B'-Isomorphien.

(14.3) Hilfssatz. Sei B eine endliche projektive Algebra über dem lokalen Ring A. Sei $k := A/\mathfrak{m}_A$ der Restekörper von A und $\bar{B} := k \otimes_A B = B/\mathfrak{m}_A B$. Dann sind äquivalent:

(1) B ist Frobeniusalgebra über A.

(2) $\bar{B}$ ist Frobeniusalgebra über k.

(3) $\bar{B}$ ist strikte Frobeniusalgebra über k.

(4) B ist strikte Frobeniusalgebra über A.

Beweis. Aus (1) folgt (2). $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ ist endlicher projektiver B-Modul. Nach (14.2) ist daher $k \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A) = \mathrm{Hom}_k(\bar{B},k)$ projektiver $\bar{B}$-Modul.

Aus (2) folgt (3). $\bar{B}$ ist als endliche k-Algebra direktes Produkt seiner Lokalisierungen $\bar{B}_i$ nach maximalen Idealen. Nach (14.1) sind alle $\bar{B}_i$ Frobeniusalgebren über k. Über lokalen Ringen sind projektive Moduln frei; ein Dimensionsargument über k zeigt weiter $\mathrm{Hom}_k(\bar{B}_i,k) \cong \bar{B}_i$. Daher ist $\mathrm{Hom}_k(\bar{B},k)$ als direktes Produkt der $\mathrm{Hom}_k(\bar{B}_i,k)$ zyklischer $\bar{B}$-Modul. Ein erneutes Dimensionsargument zeigt $\mathrm{Hom}_k(\bar{B},k) \cong \bar{B}$.

Aus (3) folgt (4). Mittels (14.2) folgt, daß $k \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A) = \bar{B} \otimes_B \mathrm{Hom}_A(B,A) = \mathrm{Hom}_A(B,A)/\mathfrak{m}_A B \cdot \mathrm{Hom}_A(B,A)$ zyklischer $\bar{B}$-Modul ist. Da $\mathfrak{m}_A B$ im Jacobsonradikal von B enthalten ist, folgt nach dem Lemma von Krull-Nakayama, daß $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ zyklischer B-Modul ist. Ein surjektiver Homomorphismus $B \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(B,A)$ von freien A-Moduln desselben Ranges ist aber bijektiv. Daher ist $\mathrm{Hom}_A(B,A) \cong B$ als B-Modul. (1) ist Abschwächung von (4).

(14.4) Satz. Sei B eine endliche projektive A-Algebra. Dann gilt:

(1) Ist A' eine A-Algebra und ist B Frobeniusalgebra über A, so ist $A' \otimes_A B$ Frobeniusalgebra über A'.

(2) B ist genau dann Frobeniusalgebra über A, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A die Lokalisierung $B_{\mathfrak{p}}$ eine Frobeniusalgebra über $A_{\mathfrak{p}}$ ist.

(3) B ist genau dann Frobeniusalgebra über A, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A die Lokalisierung $B_{\mathfrak{m}}$ eine Frobeniusalgebra über $A_{\mathfrak{m}}$ ist.

(4) B ist genau dann eine Frobeniusalgebra über A , wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A die Algebra $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A B$ eine Frobeniusalgebra über dem Restklassenkörper $A/\mathfrak{m}$ ist.

(5) Sei B eine Frobeniusalgebra über A . Dann ist $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ ein projektiver B-Modul des Ranges 1 .

(6) Ist A semilokal und B Frobeniusalgebra über A , so ist B strikte Frobeniusalgebra über A .

(7) Ist B strikte Frobeniusalgebra über A und ist $B_{\mathfrak{m}} \neq 0$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A , so ist A direkter Summand von B .

(8) Ist $\varphi : A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus derart, daß es zu jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A ein Primideal $\mathfrak{p}'$ in A' mit $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{p}'$ gibt, und ist $A' \otimes_A B$ Frobeniusalgebra über A' , so ist B Frobeniusalgebra über A .

(9) Sei $\varphi : A \longrightarrow B$ der Strukturhomomorphismus und $A' :=$ Bild $\varphi \subseteq B$. Dann ist A' endliche projektive A-Algebra und B endliche projektive A'-Algebra.

B ist genau dann Frobeniusalgebra über A , wenn B Frobeniusalgebra über A' ist.

Beweis. Zu (1). Sei B Frobeniusalgebra über A und A' eine beliebige A-Algebra. Dann ist $B' := A' \otimes_A B$ eine endliche projektive A'-Algebra. Mittels (14.2) folgt, daß $\mathrm{Hom}_{A'}(B',A') = B' \otimes_B \mathrm{Hom}_A(B,A)$ projektiver B'-Modul ist.

Zu (2) und (3). Ist B Frobeniusalgebra über A und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A , so ist $B_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \otimes_A B$ Frobeniusalgebra über $A_{\mathfrak{p}}$ nach (1). Zum Beweis der Umkehrungen in (2) und (3) nehmen wir an, daß $B_{\mathfrak{m}}$ Frobeniusalgebra über $A_{\mathfrak{m}}$ ist für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A . Nach (14.2) bedeutet dies, daß jeder $B_{\mathfrak{m}}$-Modul $\mathrm{Hom}_A(B,A)_{\mathfrak{m}}$ projektiv ist. Ist $\mathfrak{M}$ ein maximales Ideal von B mit $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{m}$, so ist erst recht der $B_{\mathfrak{M}}$-Modul $\mathrm{Hom}_A(B,A)_{\mathfrak{M}} = \mathrm{Hom}_A(B,A)_{\mathfrak{M}B_{\mathfrak{m}}}$ projektiv. Da B endlich über A ist, enthält jedes maximale Ideal von B ein maximales Ideal von A . Folglich ist $\mathrm{Hom}_A(B,A)_{\mathfrak{M}}$ projektiver $B_{\mathfrak{M}}$-Modul für jedes maximale Ideal $\mathfrak{M}$ von B . Da $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ ein B-Modul endlicher Darstellung ist, folgt jetzt, daß $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ projektiver B-Modul ist. Also ist B Frobeniusalgebra über A .

Zu (4). Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A , so ist $A/\mathfrak{m} = A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$. Wegen (1) und (3) dürfen wir zum Beweis von (4) also annehmen, daß A lokal ist. In diesem Falle braucht aber nur

(14.3) herangezogen zu werden.

Zu (5). Da jedes maximale Ideal von B über einem maximalen Ideal von A liegt, genügt es wegen der (im Beweis von (2) und (3) näher ausgeführten) Lokalisierungstechniken, (5) für lokale Ringe A zu zeigen. Jetzt braucht aber nur noch (14.3) herangezogen zu werden.

Zu (6). Da B endlich über A ist, ist auch B semilokaler Ring. Ein endlicher projektiver Modul mit Rang über einem semilokalen Ring ist aber frei. (Siehe den Anfang von §8.) Mit (5) ergibt sich nun, daß $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ freier B-Modul des Ranges 1 ist.

Zu (7). Sei $\mathrm{Hom}_A(B,A) = B\eta$ mit einem $\eta \in \mathrm{Hom}_A(B,A)$. Wir brauchen nur zu zeigen, daß η auf A abbildet, da B dann direkte Summe von Kern η und A ist. Machen wir die Annahme, daß $\eta(B)$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A enthalten ist. Sei $k := A/\mathfrak{m}$. Nach (14.2) ist $k \otimes \eta$ ein erzeugendes Element von $\mathrm{Hom}_k(k \otimes_A B, k)$. Wegen $\eta(B) \subseteq \mathfrak{m}$ ist aber $k \otimes \eta = 0$. Es folgt $0 = k \otimes_A B = (A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}) \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} B_{\mathfrak{m}}$, was wegen des Lemmas von Krull-Nakayama $B_{\mathfrak{m}} = 0$ bedeutet. Widerspruch! Also ist η doch surjektiv.

Zu (8). Sei $\varphi : A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus mit den angegebenen Eigenschaften. Sei $\mathfrak{m}$ ein beliebiges maximales Ideal von A und $k := A/\mathfrak{m}$. Wegen (3) brauchen wir nur zu zeigen, daß $\overline{B} := k \otimes_A B$ Frobeniusalgebra über k ist. Über $\varphi(\mathfrak{m})$ liegt nach Voraussetzung ein Primideal und daher auch ein maximales Ideal $\mathfrak{m}'$. Sei $k' := A'/\mathfrak{m}'$. Nach (1) ist $k' \otimes_A B = k' \otimes_{A'} (A' \otimes_A B)$ Frobeniusalgebra über k'. Nun ist aber $A \longrightarrow k'$ nichts anderes als die Abbildung $A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \rightarrow A'/\mathfrak{m}'$. Daher ist $\overline{B}' := k' \otimes_A B = k' \otimes_k (k \otimes_A B) = k' \otimes_k \overline{B}$. Nach (14.2) ist $\overline{B}' \otimes_{\overline{B}} \mathrm{Hom}_k(\overline{B},k) = \mathrm{Hom}_{k'}(\overline{B}',k')$. Da $\overline{B}'$ treuflach über $\overline{B}$ ist, folgt jetzt aus der Voraussetzung: $\mathrm{Hom}_{k'}(\overline{B}',k')$ endlicher projektiver $\overline{B}'$-Modul, daß $\mathrm{Hom}_k(\overline{B},k)$ endlicher projektiver $\overline{B}$-Modul ist. Also ist $\overline{B}$ Frobeniusalgebra über k, und das war noch zu zeigen.

Zu (9). Der Kokern Q von φ ist A-Modul endlicher Darstellung. Sei $\mathfrak{m}$ maximales Ideal in A. Dann ist $A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow B_{\mathfrak{m}} \longrightarrow Q_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$ exakt. Entweder es ist nun $B_{\mathfrak{m}} = 0$, was $Q_{\mathfrak{m}} = 0$ bedeutet, oder es ist $B_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Dann ist aber $B_{\mathfrak{m}}$

frei über $A_{\mathfrak{m}}$, und das Bild von $A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow B_{\mathfrak{m}}$ ist direkter Summand. Wiedrum ist $Q_{\mathfrak{m}}$ projektiver $A_{\mathfrak{m}}$-Modul. Insgesamt erhalten wir, daß Q endlicher projektiver A-Modul ist. Die Ausgangssequenz spaltet auf, und A' ist deswegen ebenfalls A-projektiv. Bei $B_{\mathfrak{m}} \neq 0$ ist $A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (A')_{\mathfrak{m}A'}$ bijektiv. Daher ist B endlicher projektiver A'-Modul.

Ist B Frobeniusalgebra über A, so ist $B = A' \otimes_A B$ auch Frobeniusalgebra über A' nach (1). Ist umgekehrt B Frobeniusalgebra über A' und $\mathfrak{m}$ maximales Ideal in A, so ist $B_{\mathfrak{m}} = 0$ oder $B_{\mathfrak{m}}$ Frobeniusalgebra über $A_{\mathfrak{m}} = (A')_{\mathfrak{m}A'}$. Folglich ist B Frobeniusalgebra nach (3).

(14.5) Transitivität. Sei B eine A-Algebra und C eine B-Algebra. Dann gilt:

(1) Ist B Frobeniusalgebra über A und C Frobeniusalgebra über B, dann ist C Frobeniusalgebra über A.

(2) Sind B und C Frobeniusalgebren über A und ist C projektive B-Algebra, so ist C Frobeniusalgebra über A.

(3) Ist C Frobeniusalgebra über A und über B und gilt $C_{\mathfrak{M}} \neq 0$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{M}$ von B, so ist B Frobeniusalgebra über A.

Beweis. Zu (1). Nach (14.4) dürfen wir sofort annehmen, daß A lokal ist. Nach (14.4) ist dann sogar $\mathrm{Hom}_A(B,A) \cong B$ als B-Modul und $\mathrm{Hom}_B(C,B) \cong C$ als C-Modul. Die kanonische Abbildung $\mathrm{Hom}_A(C,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(C,\mathrm{Hom}_A(B,A))$ durch $h \longmapsto (c \longmapsto (b \longmapsto h(bc)))$ mit der Umkehrabbildung durch $g \longmapsto (c \longmapsto g(c)(1))$ ist, wie man leicht verifiziert, eine C-Isomorphie. Weiter ergibt Einsetzen, daß $\mathrm{Hom}_B(C,\mathrm{Hom}_A(B,A)$ $\cong \mathrm{Hom}_B(C,B)$ als C-Modul. Insgesamt ergibt sich nun, daß $\mathrm{Hom}_A(C,A)$ als C-Modul isomorph zu C ist.

Zu (2). Man geht wie im Beweis zu (1) vor und benutzt die C-Isomorphie $\mathrm{Hom}_B(C,\mathrm{Hom}_A(B,A)) = \mathrm{Hom}_A(C,A)$.

Zu (3). Nach Voraussetzung über C zeigt (14.4), daß B direkter Summand von C als B-Modul ist. Dann ist B natürlich endlicher projektiver A-Modul. Weiter ist $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ direkter Summand von $\mathrm{Hom}_A(C,A)$ als B-Modul. Wegen $\mathrm{Hom}_A(C,A) \cong C$ als C-Modul ist somit $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ projektiver B-Modul, was den Beweis beendet.

Bemerkung. Im Beweis von (3) haben wir nicht voll ausgenutzt, daß C Frobeniusalgebra ist, sondern nur, daß B direkter Summand von C ist und daß C projektiver B-Modul ist.

(14.6) Tensorprodukte. Sind B und C Frobeniusalgebren über A, so ist $B \otimes_A C$ Frobeniusalgebra über A .

Beweis. Nach (14.4) ist $B \otimes_A C$ Frobeniusalgebra über B . (14.5) ergibt jetzt, daß $B \otimes_A C$ Frobeniusalgebra über A ist. -

Wegen der Kriterien aus (14.4) ist es angebracht, endliche Algebren über Körpern in bezug auf die Frobenius-Eigenschaft näher zu studieren. Dies geschieht in den nächsten nachfolgenden Aussagen. Man beachte, daß endliche Algebren über Körpern Ringe endlicher Länge sind.

(14.6) Frobeniusringe. Sei R ein Ring von endlicher Länge. Für jeden R-Modul M bezeichne $M^* := \mathrm{Hom}_R(M,R)$ den Dualmodul zu M . Äquivalent sind:

(1) Das Dualisieren ist exakter Funktor.

(2) R ist als R-Modul injektiv.

(3) Jeder endliche R-Modul ist reflexiv.

(4) Jeder endliche R-Modul ist torsionslos.

(5) Das Dualisieren ist längentreu.

Besitzt R diese Eigenschaft, so heißt R ein Frobeniusring.

Beweis. (1) und (2) sind unmittelbar nach den Definitionen äquivalent.

Aus (2) folgt (3). Sei M endlicher R-Modul und $F_1 \longrightarrow F_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz mit ~~freien~~ endl. R-Moduln F_o, F_1 . Mit der Voraussetzung erhält man nach zweimaligem Dualisieren die kanonische exakte Sequenz $F_1^{**} \longrightarrow F_o^{**} \longrightarrow M^{**} \longrightarrow 0$. Von der ersten Sequenz gibt es einen kanonischen Homomorphismus in die zweite Sequenz. Die kanonischen Homomorphismen $F_i \longrightarrow F_i^{**}$ sind bijektiv. Nach dem 5er-Lemma ist dann auch $M \longrightarrow M^{**}$ bijektiv. (4) ist Abschwächung von (3).

Aus (4) folgt (5). Zunächst eine Vorüberlegung. Die Länge eines endlichen R-Moduls M sei mit $l_R M$ bezeichnet. Ist $h : M \longrightarrow M_2$ ein surjektiver, aber nicht injektiver Homomorphismus (was $l_R M > l_R M_2$ bedeutet) endlicher R-Moduln, so ist $l_R M^* > l_R M_2^*$. Beweis. Mit $M \xrightarrow{h} M_2 \longrightarrow 0$ ist auch $0 \longrightarrow M_2^* \xrightarrow{h^*} M^*$ exakt. Bei $l_R M^* \leq l_R M_2^*$ wäre h^* und folglich h^{**} bijektiv. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & M_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^{**} & \xrightarrow{h^{**}} & M_2^{**} \end{array}$$

sind die kanonischen vertikalen Homomorphismen nach Voraussetzung injektiv. Es folgt h injektiv. Widerspruch!

Zunächst überlegen wir uns nun durch Induktion über die Länge, daß generell $l_R M^* \geq l_R M$ gilt. Sei $l_R M = n+1$ und M_1 ein Untermodul der Länge 1 in M . Nach der Vorüberlegung und der Induktionsvoraussetzung über M/M_1 ist dann
$l_R M^* > l_R (M/M_1)^* \geq n$.

Sei schließlich F ein endlicher freier R-Modul und $U \neq 0$ ein minimaler Untermodul von F derart, daß $l_R (F/U)^* > l_R (F/U)$ ist. Sei V ein Untermodul von U derart, daß $l_R (U/V) = 1$ ist. Dann ist nach der Vorüberlegung $l_R (F/V)^* > l_R (F/U)^* > l_R (F/U)$ und somit $l_R (F/V)^* > l_R (F/V)$. Widerspruch! Also ist
$l_R M^* = l_R M$ für alle endlichen R-Moduln M .

Aus (5) folgt (1). Ist $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{h} M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz endlicher R-Moduln, so ist auch $0 \longrightarrow M_2^* \longrightarrow M^* \xrightarrow{h^*} M_1^*$ exakt. Aus Längengründen ist aber h^* surjektiv. Das beendet den Beweis.

<u>(14.7) Hilfsatz</u>. Sei R ein Frobeniusring und E ein endlicher R-Modul derart, daß $Hom_R(M,E)$ exakter Funktor in der ersten Variablen M ist. Dann ist E projektiver R-Modul.

<u>Beweis</u>. E ist nach (14.6) torsionslos, somit Untermodul eines freien endlichen R-Moduls F . Nach Voraussetzung über E ist nun $Hom_R(F,E) \longrightarrow Hom_R(E,E) \longrightarrow 0$ exakt. Daher ist E direkter Summand von F .

<u>(14.8) Direkte Produkte</u>. Ein direktes Produkt von Ringen $R_1,\dots,R_m$ endlicher Länge ist genau dann Frobeniusring, wenn die Ringe $R_1,\dots,R_m$ Frobeniusringe sind.

<u>Beweis</u>. Jeder endliche Modul M über $R := \prod_{i=1}^m R_i$ ist direktes Produkt von R_i-Moduln M_i , und man hat $Hom_R(M,R) = \prod_{i=1}^m Hom_{R_i}(M_i,R_i)$. Es ist nun leicht zu sehen, daß R genau dann injektiver R-Modul ist, wenn jedes R_i injektiver R_i-Modul ist. –

Untersucht man einen Ring R endlicher Länge darauf, ob er Frobeniusring ist, so braucht man nur die lokalen Komponenten anzusehen; denn R ist direktes Produkt seiner Lokalisierungen. Hier interessiert nun konkret:

(14.9) Aussage. Sei R ein lokaler Ring von endlicher Länge. R ist genau dann Frobeniusring, wenn $\mathrm{Ann}_R \mathfrak{m}_R$ ein Hauptideal ist.

Beweis. Sei R Frobeniusring. Da $R/\mathfrak{m}_R$ die Länge 1 besitzt, besitzt nach (14.6) auch $\mathrm{Ann}_R \mathfrak{m}_R \cong (R/\mathfrak{m}_R)^*$ die Länge 1 . Insbesondere ist $\mathrm{Ann}_R \mathfrak{m}_R$ zyklischer R-Modul, also ein Hauptideal.

Sei umgekehrt $(R/\mathfrak{m}_R)^* \cong \mathrm{Ann}_R \mathfrak{m}_R$ ein Hauptideal. Wegen $\mathfrak{m}_R \cdot \mathrm{Ann}_R \mathfrak{m}_R = 0$ ist dann $\mathrm{Ann}_R \mathfrak{m}_R \cong R/\mathfrak{m}_R$. Es ist also $l_R(R/\mathfrak{m}_R)^* = 1$. Ein einfaches Induktionsargument zeigt dann $l_R M^* \leq l_R M$ für alle endlichen R-Moduln M . Sei schließlich F ein endlicher freier R-Modul und $U \neq 0$ ein minimaler Untermodul von F derart, daß $l_R(F/U)^* < l_R(F/U)$ ist. Sei V ein Untermodul von U derart, daß $l_R(U/V) = 1$ ist. Dann gibt es eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow R/\mathfrak{m}_R \longrightarrow F/V \longrightarrow F/U \longrightarrow 0$, woraus man nach dem Dualisieren $l_R(F/V)^* \leq l_R(R/\mathfrak{m}_R)^* + l_R(F/U)^* < 1 + l_R(F/U) = l_R(F/V)$ erhält. Widerspruch!

(14.10) Korollar. Sei R ein Ring endlicher Länge, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist. Dann ist R Frobeniusring.

Der Beweis ergibt sich leicht mit (14.8) und (14.9) .

(14.11) Satz. Sei A ein Frobeniusring und B eine endliche projektive A-Algebra. Genau dann ist B Frobeniusalgebra über A , wenn B Frobeniusring ist.

Beweis. Vorbemerkung: Sei M ein endlicher B-Modul. Die kanonische Abbildung $\mathrm{Hom}_A(M,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M,\mathrm{Hom}_A(B,A))$ durch $h \longmapsto (m \longmapsto (b \longmapsto h(bm)))$ mit der Umkehrabbildung durch $g \longmapsto (m \longmapsto g(m)(1))$ ist, wie man leicht verifiziert, eine B-Isomorphie. Sie ist außerdem funktoriell in M .

Sei B Frobeniusalgebra über A . Nach (14.4),(6) ist dann $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ als B-Modul isomorph zu B . Nach unserer Vorbemerkung ist folglich der in M exakte Funktor $\mathrm{Hom}_A(M,A)$ isomorph zum Dualisieren über B. Nach (14.6) ist B Frobeniusring.

Sei umgekehrt B Frobeniusring. $\mathrm{Hom}_A(M,A)$ ist exakt in M . Nach unserer Vorbemerkung ist $\mathrm{Hom}_B(M,\mathrm{Hom}_A(B,A))$ exakt in M . Da B Frobeniusring ist, zeigt Hilfssatz (14.7), daß $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ projektiver B-Modul ist. Das heißt aber: B ist Frobeniusalgebra über A . -

Da Körper stets Frobeniusringe sind, ziehen wir aus (14.11) den wichtigen Schluß, daß eine endliche Algebra B über dem Körper k genau dann Frobeniusalgebra ist, wenn B Frobeniusring ist. Es handelt sich hierbei also um eine "innere" Eigenschaft von B . Vollständiger erhalten wir mit (14.4):

(14.12) Korollar. Eine endliche projektive Algebra B über dem Ring A ist genau dann Frobeniusalgebra über A , wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A der Restklassenring $B/\mathfrak{m}B$ ein Frobeniusring ist.

Wir wollen nun mit (14.11) den Schluß, daß die Frobeniuseigenschaft endlicher Algebren über Körpern unabhängig ist von den betrachteten Grundkörpern, auf eine wichtige Klasse von Algebren verallgemeinern.

Sei R ein noetherscher lokaler Ring. R heißt Macaulayring, wenn codh R = dim R ist. Sei R ein Macaulayring der Dimension r und $a_1,\dots,a_r$ eine Primfolge in $\mathfrak{m}_R$. Sei $\mathfrak{q}$ das $\mathfrak{m}_R$-primäre Ideal $Ra_1+\dots+Ra_r$. Die endliche Dimension q des $(R/\mathfrak{m}_R)$-Vektorraumes $(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{q}))/\mathfrak{q}$ ist, wie man leicht sieht, unabhängig von der Wahl der Primfolge der Länge r . Somit ist q eine Invariante von R . Man nennt R einen MC_q-Ring.

Ein Sonderfall liegt vor, wenn q = 1 ist. Dann ist offenbar $R/\mathfrak{q}$ ein Frobeniusring (wegen (14.9)), wie auch die Primfolge $a_1,\dots,a_r$ gewählt war. In diesem Fall heißt R auch ein Gorensteinring. Zu diesem Begriff sei auf [4] verwiesen.

Sei R ein (noetherscher lokaler) Gorensteinring und $a_1,\dots,a_s$ irgendeine Primfolge in $\mathfrak{m}_R$. Es ist $s \leq \dim R$. Da man jede Primfolge in $\mathfrak{m}_R$ zu einer solchen der Länge dim R verlängern kann, ist augenscheinlich auch $R/Ra_1+\dots+Ra_s$ ein Gorensteinring.

Ist P ein regulärer lokaler (noetherscher) Ring, d.h. wird $\mathfrak{m}_P$ von dim P Elementen erzeugt, die dann notwendigerweise eine Primfolge bilden, so ist P offenbar ein Gorensteinring. Der vorstehende Absatz zeigt dann, daß jeder lokale noethersche Ring, der vollständiger Durchschnitt ist, d.h. ein Restklassenring eines regulären lokalen Ringes modulo einer Primfolge ist, ein Gorensteinring ist. Den Begriff des vollständigen Durchschnitts werden wir in einem späteren Kapitel besprechen; vgl. auch [13], §1.

Für unsere Zwecke greifen wir zu der folgenden Definition.

Definition. Ein Ring A heiße Gorensteinring, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A die Lokalisierung $A_{\mathfrak{m}}$ ein noetherscher lokaler MC_1-Ring ist.

(14.13) Satz. Sei A ein Gorensteinring und B eine endliche projektive A-Algebra. Genau dann ist B Frobeniusalgebra über A , wenn B Gorensteinring ist.

Beweis. Unter allen maximalen Idealen von B liegen maximale Ideale von A , nach denen man zunächst einmal lokalisieren darf, was (14.4) zuläßt. Wir nehmen jetzt also an, daß A ein noetherscher lokaler Gorensteinring der Dimension r ist und daß $B \neq 0$ ist. B ist dann eine freie endliche A-Algebra des Ranges ≥ 1 und ebenfalls noethersch. Sei $a_1,\ldots,a_r$ eine Primfolge in $\mathfrak{m}_A$ und $\mathfrak{q} := Aa_1+\ldots+Aa_r$. Dann ist $\bar{A} := A/\mathfrak{q}$ ein Frobeniusring und $\bar{B} := B/\mathfrak{q}B$ eine endliche freie $\bar{A}$-Algebra. Nach (14.4) ist B genau dann Frobeniusalgebra über A , wenn $\bar{B}$ Frobenuisalgebra über $\bar{A}$ ist. Nach Satz (14.11) ist $\bar{B}$ genau dann Frobeniusalgebra über $\bar{A}$, wenn $\bar{B}$ Frobenius ring ist. Wir haben daher noch zu zeigen: $\bar{B}$ ist Frobeniusring genau dann, wenn B Gorensteinring ist.

Da $\mathfrak{q}B$ im Jacobsonradikal von B enthalten ist, entsprechen sich die maximalen Ideale von B und $\bar{B}$. Sei $\mathfrak{M}$ ein maximales Ideal in B und $\overline{\mathfrak{M}} := \mathfrak{M}/\mathfrak{q}B$. Es ist dann $\bar{B}_{\overline{\mathfrak{M}}} = \bar{B}_{\mathfrak{M}} = (B/\mathfrak{q}B)_{\mathfrak{M}} = B_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{M}}$. Hierbei ist $B_{\mathfrak{M}}$ ein noetherscher lokaler Ring. Da B frei vom Rang ≥ 1 über A ist, ist $a_1,\ldots,a_r$ auch eine Primfolge im Jacobsonradikal von B . Beim (exakten) Lokalisieren wird daraus eine Primfolge im maximalen Ideal von $B_{\mathfrak{M}}$. Der Kern von $B_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \bar{B}_{\overline{\mathfrak{M}}}$ wird also von einer Primfolge der Länge $\dim B_{\mathfrak{M}}$ erzeugt. Daher ist $\bar{B}_{\overline{\mathfrak{M}}}$ genau dann Frobeniusring, wenn $B_{\mathfrak{M}}$ Gorensteinring ist. Wendet man noch (14.8) auf $\bar{B}$ an, so ergibt sich nun das gewünschte Resultat.-

Wir besprechen nun noch einige hinreichende Kriterien auf Frobeniusalgebren. (12.5) lautet mit den in diesem Paragraphen entwickelten Begriffen wie folgt:

(14.14) Satz. Sei B eine unverzweigte endliche projektive A-Algebra mit Rang. Dann ist B strikte Frobeniusalgebra über A .

Ist die Rangvoraussetzung nicht gegeben, so ist sie doch lokal stets erfüllt. Deshalb gilt:

(14.15) Korollar. Sei B eine unverzweigte endliche projektive A-Algebra. Dann ist B Frobeniusalgebra über A .

Beispiele für verzweigte Frobeniusalgebren erhält man leicht unter Benutzung der folgenden Kriterien.

(14.16) Satz. Sei A ein Ring $\neq 0$ und α ein normiertes Polynom des Grades $n \geq 1$ über A . Dann ist $B := A[X]/\alpha A[X]$ eine freie endliche A-Algebra des Ranges n über A . Mit x sei die Restklasse der Unbestimmten X in B bezeichnet. Sei η diejenige A-Linearform auf B , die das Element x^i der A-Basis $1, x, \dots, x^{n-1}$ auf $\delta_{i,n-1}$ (Kroneckerdelta) abbildet. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(B,A) = B\eta \cong B$. Insbesondere ist B strikte Frobeniusalgebra über A .

Beweis. Da B frei über A ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ von η erzeugt wird. Dieses braucht nach (14.2) und (14.4) nur modulo maximaler Ideale von A nachgeprüft zu werden. Sei daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit A = k ein Körper.

Sei $b = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in B$, $a_i \in k$, $b \neq 0$. Wir behaupten: $b\eta \neq 0$. Beweis: Sei $a_m \neq 0$, $a_i = 0$ für $i > m$. Dann ist $(b\eta)(x^{n-1-m}) = \eta(bx^{n-1-m}) = a_m \neq 0$, also $b\eta = 0$. Aus Dimensionsgründen ist nun $B\eta = \mathrm{Hom}_k(B,k)$.

(14.17) Korollar. Sei B eine einfache projektive A-Algebra. Dann ist B Frobeniusalgebra über A .

Beweis. Durch Lokalisieren führt man (14.17) auf (14.16) zurück. Als Variante sei der folgende Beweis angegeben: Die Techniken von (14.4) erlauben es, A = k als Körper anzunehmen. Dann ist aber B Restklassenring des Hauptidealringes $k[X]$ und deswegen auch ein Ring, in dem jedes Ideal Hauptideal ist. Nach (14.10) und (14.11) ist dann B Frobeniusalgebra über k .-

Die Variante gibt jetzt auch sofort den Beweis für den folgenden Satz an.

(14.18) Satz. Sei B endliche projektive A-Algebra. Ist jedes Ideal in B ein Hauptideal, dann ist B Frobeniusalgebra über A.

Schließlich interessiert noch für die algebraische Zahlentheorie:

(14.19) Satz. Sei A ein Dedekindring und B ein endlicher Erweiterungsring von A , der ebenfalls Dedekindring ist. Dann ist B eine Frobeniusalgebra über A .

Beweis. Die Behauptung läßt sich lokal nachprüfen. Sei also A lokal. In diesem Falle ist B semilokal. Ein semilokaler Dedekindring ist aber ein Hauptidealring. Nun verwende man (14.18) .

Variante: Sei A lokal. Dann sind A und die Lokalisierungen von B nach maximalen Idealen diskrete Bewertungsringe des Ranges 1 , also reguläre lokale Ringe der Dimension 1 . Wir haben also einen trivialen Spezialfall von (14.13) vorliegen. -

Zum Schluß besprechen wir noch ein Kriterium aus [13] auf Frobeniusalgebren, das ein Spezialfall eines auch an sich interessanten Lemmas über noethersche Regel ist:

(14.20) Satz. Sei B eine endliche projektive Algebra über dem noetherschen Ring A . Ist $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ ein projektiver B-Modul, so ist B Frobeniusalgebra über A .

Zum Beweis hat man zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ ein reflexiver B-Modul ist. Dafür braucht man zunächst überhaupt ein Kriterium auf reflexive B-Moduln, das sich auf A bezieht:

(14.21) Lemma. Sei B eine endliche projektive Algebra über dem noetherschen Ring A und M ein endlicher B-Modul. M ist genau dann reflexiver B-Modul, wenn er die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(1) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A mit codh $A_{\mathfrak{p}} \leq 1$, so ist $M_{\mathfrak{p}}$ reflexiver $B_{\mathfrak{p}}$ -Modul.

(2) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A mit codh $A_{\mathfrak{p}} \geq 2$, so ist $M_{\mathfrak{p}} = 0$ oder $\mathrm{codh}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \geq 2$.

Beweis. Im Beweis wollen wir B-Duale $\mathrm{Hom}_B(N,B)$ einfach mit N^* bezeichnen, entsprechend bei den Lokalisierungen von B . Die kanonische Abbildung σ von M in das Bidual $M^{**} = (M^*)^*$ ist mit der Nenneraufnahme verträglich, wie man leicht nachrechnet.

Sei M reflexiver B-Modul und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A . Da $\sigma_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (M^{**})_{\mathfrak{p}}$ nichts anderes ist als die kanonische Abbildung von $M_{\mathfrak{p}}$ in $(M_{\mathfrak{p}})^{**}$ und da σ schon bijektiv ist, ist $M_{\mathfrak{p}}$ reflexiver $B_{\mathfrak{p}}$-Modul. Bei codh $A_{\mathfrak{p}} \leq 1$ ist also (1) erfüllt. Sei nun codh $A_{\mathfrak{p}} \geq 2$. Als reflexiver $B_{\mathfrak{p}}$-Modul ist $M_{\mathfrak{p}}$ erst recht ein Dual. Daher folgt (2) un mit der folgenden einfachen (wohlbekannten) Überlegung: Ist R ein Ring, N ein beliebiger R-Modul und f,g eine Primfolge in S , so ist f,g eine Primfolge von $\mathrm{Hom}_S(N,S)$.

Zum Beweis der Umkehrung bemerken wir zuerst, daß σ genau dann bijektiv ist, wenn dies bezüglich aller Lokalisierungen von A richtig ist. Wir dürfen daher annehmen, daß A lokal ist, und zeigen dann durch Induktion über dim A , daß (1) und (2) hinreichend sind. Wegen (1) können wir gleich codh A $\geq$ 2 und auch codh M $\geq$ 2 annehmen. Die Induktionsvoraussetzung liefert, daß Kern σ und Kokern σ beim Lokalisieren nach Primidealen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_A$ verschwinden. Diese endlichen B-Moduln haben also $\{\mathfrak{m}_A\}$ als Träger. Wegen Kern $\sigma \subseteq M$ und codh M ≥ 1 folgt daher sofort Kern σ = 0 . Bei Kokern $\sigma \neq 0$ wäre codh Kokern σ = 0 im Widerspruch dazu, daß $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\sigma} M^{**} \longrightarrow$ Kokern $\sigma \longrightarrow 0$ exakt ist mit codh M $\geq$ 2 . Also ist σ bijektiv. -

Mit Hilfe von (14.21) beweisen wir jetzt das angekündigte Lemma, das (14.20) verallgemeinert:

<u>(14.22) Lemma</u>. Sei B eine endliche projektive Algebra über dem noetherschen Ring A und M ein endlicher B-Modul, der als A-Modul projektiv ist. Ist $\mathrm{Hom}_B(M,B)$ projektiver B-Modul, dann ist auch M projektiver B-Modul.

<u>Beweis.</u>Es genügt zu zeigen, daß M reflexiver B-Modul ist. Wir verwenden hierzu (14.21) und die im Beweis dazu vereinbarten Bezeichnungen.

Die Voraussetzungen über (14.22) übertragen sich auf alle Lokalisierungen nach Primidealen von A . Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A . Ist codh $A_\mathfrak{p} \geq 2$, so ist $M_\mathfrak{p} = 0$ oder $\mathrm{codh}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \geq 2$; denn $M_\mathfrak{p}$ ist freier $A_\mathfrak{p}$-Modul. Also ist (2) aus dem Kriterium (14.21) erfüllt.

Die einzige Mühe macht es, (1) aus (14.21) nachzuweisen. Sei also jetzt codh $A_\mathfrak{p} \leq 1$. Wir kürzen ab R := $A_\mathfrak{p}$ und S := $B_\mathfrak{p}$. Wir dürfen S $\neq$ 0 annehmen. Ist codh R = 0 , so ist $\mathfrak{m}_R$ zu R assoziiert, d.h. es gibt eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow R/\mathfrak{m}_R \longrightarrow R$ von R-Moduln. Durch Tensoieren mit dem freien R-Modul S wird daraus die exakte Sequenz $0 \longrightarrow S/\mathfrak{m}_R S \longrightarrow S$. Da die maximalen Ideale von S alle über $\mathfrak{m}_R$ liegen, bedeutet dies, daß jedes maximale Ideal $\mathfrak{M}$ von S assoziiertes Primideal von S ist, daß also codh $S_{\mathfrak{m}} = 0$ ist. Sei nun codh $R = 1$ und $f \in \mathfrak{m}_R$ Nichtnullteiler. Da S frei über R ist, ist f auch NNT im Jacobsonradikal $\mathfrak{m}_S$ von S . Schließlich ist $\bar{S} := S/fS$ frei über R/fR , und die obige Überlegung zeigt wegen codh $R/fR = 0$, daß für jedes maximale Ideal $\bar{\mathfrak{m}}$ von $\bar{S}$ gilt: codh $\bar{S}_{\bar{\mathfrak{m}}} = 0$. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von S . Dann ist f NNT von $S_{\mathfrak{m}}$ und nicht Einheit in $S_{\mathfrak{m}}$. Ferner ist $S_{\mathfrak{m}}/fS_{\mathfrak{m}} = (S/fS)_{\mathfrak{m}} = \bar{S}_{\mathfrak{m}/fS}$ von der homologischen Kodimension 0. Daher ist codh $S_{\mathfrak{m}} = 1$. Insgesamt folgt aus codh $R \leq 1$ also codh $S_{\mathfrak{m}} \leq 1$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von S . Wir nützen dies in der folgenden Form aus: Ist N Untermodul eines endlichen freien S-Moduls und ist $dh_S N \leq 1$, so ist N projektiver S-Modul. Man braucht dies nur in den Lokalisierungen $S_{\mathfrak{m}}$ von S nach maximalen Idealen $\mathfrak{m}$ zu prüfen. Dort ist aber codh $S_{\mathfrak{m}} \leq 1$ und $N_{\mathfrak{m}} = 0$ oder codh $N_{\mathfrak{m}} \geq 1$, was wegen (9.11) bedeutet, daß $N_{\mathfrak{m}}$ frei ist.

Sei $F_1 \xrightarrow{g} F_0 \xrightarrow{h} M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von $B_{\mathfrak{p}}$-Homomorphismen und endlichen freien $B_{\mathfrak{p}}$-Moduln F_i . Durch Dualisieren mit $B_{\mathfrak{p}}$ erhalten wir die exakte Sequenz $0 \longrightarrow (M_{\mathfrak{p}})^* \xrightarrow{h^*} F_0^* \xrightarrow{g^*} F_1^*$ und hieraus eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow (M_{\mathfrak{p}})^* \xrightarrow{h^*} F_0^* \longrightarrow N \longrightarrow 0$ mit einem Untermodul N von F_1^* . Da $(M_{\mathfrak{p}})^* \cong (M^*)_{\mathfrak{p}}$ projektiver $B_{\mathfrak{p}}$-Modul ist, zeigt die Überlegung des vorangehenden Absatzes, daß N projektiver $B_{\mathfrak{p}}$-Modul ist. Die Sequenz spaltet daher auf. Insbesondere erhält man durch weiteres Dualisieren einen surjektiven Homomorphismus $h^{**} : F_0^{**} \longrightarrow (M_{\mathfrak{p}})^{**}$. Daher ist auch der kanonische Homomorphismus $M \longrightarrow (M_{\mathfrak{p}})^{**}$ surjektiv. Als surjektiver Homomorphismus von endlichen freien $A_{\mathfrak{p}}$-Moduln ist dieser Homomorphismus auch injektiv, wenn beide Moduln über $A_{\mathfrak{p}}$ den gleichen Rang haben. Um diese Ranggleichheit zu beweisen, lokalisieren wir weiter nach einem assoziierten Primideal von $A_{\mathfrak{p}}$. Es genügt also, unter der Voraussetzung codh $A_{\mathfrak{p}} = 0$ weiter zu zeigen, daß $M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (M_{\mathfrak{p}})^{**}$ injektiv ist. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von $B_{\mathfrak{p}}$, so ist codh$(B_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{m}} = 0$, wie wir im vorangehenden Absatz sahen. Mit (10.11) erhalten wir daher, daß F_1^*/N in den Lokalisierungen von $B_{\mathfrak{p}}$ nach maximalen Idealen frei ist. Daher ist F_1^*/N projektiv und folglich direkter Summand von F_1^* . Aus $0 \longrightarrow N \longrightarrow F_1^*$ wird somit beim Dualisieren eine exakte Sequenz $F_1^{**} \longrightarrow N^* \longrightarrow 0$. Wegen $N^* =$ Kern h^{**} ist daher die Sequenz $F_1^{**} \xrightarrow{g^{**}} F_0^{**} \xrightarrow{h^{**}} (M_{\mathfrak{p}})^{**} \longrightarrow 0$ exakt, woraus mit dem 5er-Lemma folgt, daß $M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (M_{\mathfrak{p}})^{**}$ bijektiv ist.

Insgesamt haben wir unter der Voraussetzung codh $A_{\mathfrak{p}} \leq 1$ gezeigt, daß die kanonische Abbildung von $M_{\mathfrak{p}}$ in $(M_{\mathfrak{p}})^{**} = (M^{**})_{\mathfrak{p}}$ bijektiv ist. Also ist auch (1) aus (14.21) erfüllt. Das beendet den Beweis.

§15. Kählersche und Noethersche Differente

Sei B eine A-Algebra. Von den verschiedenen Differenten von B über A ist vielleicht die Kählersche die begrifflich bequemste.

Definition. Sei $D_A(B)$ endlicher B-Modul. Dann heißt das O-te Fittingideal $\mathfrak{F}_0^B(D_A(B))$ des B-Moduls $D_A(B)$ die (Kählersche) Differente von B über A . Sie werde mit ϑ_A^B bezeichnet.

Beispiel. Sei A ein Ring, α ein normiertes Polynom des Grades $n \geq 1$ über A und $B := A[X]/\alpha A[X]$. Dann ist B freie endliche A-Algebra des Ranges n . Es ist $D_A(B) = A[X]/(\alpha A[X] + \alpha' A[X])$, wobei α' die Ableitung von α nach X ist. Bezeichnet also x die Restklasse von X in B , so ist $\vartheta_A^B = \alpha'(x)B$.

Man beachte die Bemerkungen über Fittingideale zu Aussage (2.1). Wegen (1.9), Grundringerweiterung, und da das Bilden von Fittingidealen ebenfalls mit Grundringerweiterungen verträglich sind, gilt:

(15.1) Grundringerweiterung. Sei $\varphi : A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus und $B' := A' \otimes_A B$. Ist $D_A(B)$ endlicher B-Modul, so ist auch $D_{A'}(B')$ endlicher B'-Modul, und es gilt:

$$\vartheta_{A'}^{B'} = B' \cdot \vartheta_A^B \quad .$$

Wegen (1.10), Nenneraufnahme, gilt über (15.1) hinaus:

(15.2) Nenneraufnahme. Sei $D_A(B)$ endlicher B-Modul, und sei S ein multiplikatives System in B . Dann gilt:

$$\vartheta_A^{B_S} = (\vartheta_A^B)_S = B_S \cdot \vartheta_A^B \quad .$$

Ist übrigens T ein multiplikatives System in A , das in B_S Einheiten ergibt, so ist $D_{A_T}(B_S) = D_A(B)$ und folglich $\vartheta_A^{B_S} = \vartheta_{A_T}^{B_S}$; dies zeigt, daß (15.2) eine Ergänzung zu (15.1) ist.

Mit der neuen Bezeichnung soll (2.1) noch einmal aufgeführt werden; Differenten beschreiben den Verzweigungsort:

(15.3) Satz. Sei $D_A(B)$ endlicher B-Modul. Dann ist

$$\mathrm{Vzw}_A^B = V(\vartheta_A^B) .$$

Die Kählersche Differente ist nahe verwandt mit der Noetherschen Differenten.

Definition. Sei $B^e := B \otimes_A B$ die einhüllende Algebra von B über A . Mit $\mu : B^e \longrightarrow B$ sei der surjektive Ringhomomorphismus bezeichnet, der Tensoren $b \otimes c$ aus B^e auf $bc \in B$ abbildet. (μ wird kurz die "Multiplikation" genannt.) Sei $I := \mathrm{Kern}\,\mu$ und $\mathfrak{A} := \mathrm{Ann}_{B^e} I$. Dann heißt $\mu(\mathfrak{A})$ die Noethersche Differente von B über A . Sie werde mit ${}_N\vartheta_A^B$ bezeichnet.

(15.4) Satz. Das B^e-Ideal $I = \mathrm{Kern}\,\mu$ werde von n Elementen erzeugt. Dann gilt:

$$({}_N\vartheta_A^B)^n \subseteq \vartheta_A^B \subseteq {}_N\vartheta_A^B .$$

Insbesondere ergibt sich für den Verzweigungsort:

$$\mathrm{Vzw}_A^B = V(\vartheta_A^B) = V({}_N\vartheta_A^B) .$$

Beweis. I ist ein B^e-Ideal; wird B bezüglich μ als B^e-Algebra aufgefaßt, so wird aus I durch Tensoieren mit B der B-Modul $B \otimes_{B^e} I = I/I^2$. Dieser B-Modul ist nach (1.4) nichts anderes als $D_A(B)$. Nach der Theorie der Fittingideale hat man $\mathfrak{A}^n \subseteq \mathfrak{f}_0^{B^e}(I) \subseteq \mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A}$ der Annullator des B^e-Ideals I in B^e ist. Anwenden der Multiplikation ergibt $\mu(\mathfrak{A}^n) \subseteq \mu(\mathfrak{f}_0^{B^e}(I)) \subseteq \mu(\mathfrak{A})$. Nun ist aber $\mu(\mathfrak{A}^n) = \mu(\mathfrak{A})^n = ({}_N\vartheta_A^B)^n$ und $\mu(\mathfrak{f}_0^{B^e}(I)) = \mathfrak{f}_0^B(B \otimes_{B^e} I) = \mathfrak{f}_0^B(D_A(B)) = \vartheta_A^B$.

(15.5) Grundringerweiterung. Sei $\varphi : A \longrightarrow A'$ ein flacher Ringhomomorphismus und $B' := A' \otimes_A B$. Das B^e-Ideal I werde von endlich vielen Elementen erzeugt. Dann gilt:

$${}_N\vartheta_{A'}^{B'} = B' \cdot {}_N\vartheta_A^B .$$

Beweis. $A' \otimes_A B^e$ läßt sich in kanonischer Weise mit $B'^e = B' \otimes_{A'} B'$ identifizieren. Dabei geht $A' \otimes \mu$ in die Multiplikation μ' über und $A' \otimes I$ in $I' = \mathrm{Kern}\,\mu'$, da das Tensoieren mit A' exakt ist. Aus demselben Grunde, und weil I endlich ist, ist $A' \otimes \mathfrak{A}$ nichts anderes als der Annullator $\mathfrak{A}'$ von I' . Nun ist $\mu'(\mathfrak{A}') = (A' \otimes \mu)(A' \otimes \mathfrak{A}) = A' \otimes \mu(\mathfrak{A}) = B' \cdot {}_N\vartheta_A^B$.

(15.6) Nenneraufnahme. Sei S ein multiplikatives System in B .

Das B^e-Ideal I werde von endlich vielen Elementen erzeugt. Dann gilt:

$$ {}_N\vartheta_A^{B_S} = ({}_N\vartheta_A^{B})_S = B_S \cdot {}_N\vartheta_A^{B} \quad . $$

Beweis. Sei $S \otimes S$ das multiplikative System in B^e das aus allen $s \otimes t$ mit $s,t \in S$ besteht. Offenbar ist $(B_S)^e = (B^e)_{S\otimes S}$ und $B_{S\otimes S} = B_S$. Daher ist die Multiplikation $\tilde{\mu}$ von $(B_S)^e$ nichts anderes als die Erweiterung $\mu_{S\otimes S}$. Nenneraufnahme ist exakt, und da $I = \mathrm{Kern}\,\mu$ endlich ist, ist die Nenneraufnahme mit dem Annullator vertauschbar. Somit ist $\mathrm{Ann}_{(B_S)^e}\,\mathrm{Kern}\,\tilde{\mu} = (B^e)_{S\otimes S} \cdot \mathrm{Ann}_{B^e}\,\mathrm{Kern}\,\mu$ und folglich ${}_N\vartheta_A^{B_S} = B_S \cdot {}_N\vartheta_A^{B}$ wie gewünscht.-

Die vorstehenden Aussagen benutzen die Voraussetzung, daß $I = \mathrm{Kern}\,\mu$ endlicher B^e-Modul ist. Deshalb interessiert noch:

(15.7) Aussage. Die A-Algebra B entstehe durch Nenneraufnahme aus einer endlich erzeugten A-Algebra. Dann ist $\mathrm{Kern}(B^e \longrightarrow B)$ endlicher B^e-Modul.

Beweis. Im Beweis von (15.6) haben wir gesehen, daß die Erzeugendensysteme der Kerne der Multiplikation bei der Nenneraufnahme erhalten bleiben. Wir dürfen daher gleich annehmen, daß B selbst endlich erzeugte A-Algebra ist. Nun ist aber $x \longmapsto x \otimes 1 - 1 \otimes x$ eine A-lineare Abbildung von B in I , und für $x,y \in B$ gilt $xy \otimes 1 - 1 \otimes xy = (x \otimes 1 - 1 \otimes x)(y \otimes 1) + (1 \otimes x)(y \otimes 1 - 1 \otimes y)$. Daher ist klar: Durchläuft x ein (endliches) Algebra-Erzeugendensystem von B , so durchläuft $x \otimes 1 - 1 \otimes x$ ein (endliches) Erzeugendensystem für den B^e-Modul I .-

In vielen Fällen gibt Satz (15.4) keine genügende Auskunft über die Feinstrukturen der beiden Differenten. Wir werden in der im Vorwort erwähnten Fortsetzung dieses Heftes sehen, daß die beiden Differenten übereinstimmen, wenn B lokal vollständiger Durchschnitt über A ist. Siehe [13] . Diese Voraussetzung ist in der klassischen Zahlentheorie bei Erweiterungen von Dedekindringen stets erfüllt - und damit steht eine wichtige Information über die Vielfachheit der Primteiler der Differenten zur Verfügung. Wir wollen hier schon (unter der zusätzlichen, aber nicht ganz einfach zu eliminierenden Voraussetzung, daß die Restekörpererweiterungen separabel sind) einen direkten Beweis für den genannten klassischen Satz geben.

(15.8) Satz. Sei A ein Dedekindring und B ein endlicher Erweiterungsring von A , der ebenfalls Dedekindring ist. Die Restekörper von B seien separabel über den Restekörpern von A . Dann ist $\vartheta_A^B = {}_N\vartheta_A^B$.

Beweis. Beim Lokalisieren in A ändern sich die Voraussetzungen nicht. Wegen (15.1) und (15.5), das sich anwenden läßt, da B endlicher A-Modul ist, darf man annehmen, daß A lokaler Ring ist.

Über dem maximalen Ideal von A liegen nur endlich viele maximale Ideale in B . Daher ist B sogar ein Hauptidealring. Wir überlegen uns zunächst, daß $D_A(B)$ ein zyklischer B-Modul ist. Sei $k := A/\mathfrak{m}_A$. Die endliche Algebra $\overline{B} := B/\mathfrak{m}_A B$ über dem Körper k zerfällt in ein direktes Produkt von lokalen k-Algebren $\overline{B}_i$. Sei R eine dieser endlichen lokalen k-Algebren und $\mathfrak{M}$ sein maximales Ideal. Da R Restklassenring von B ist, gibt es ein $z \in \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} = Rz$. Da $R/\mathfrak{M}$ separabel über k ist, hat man $0 = D_k(R/\mathfrak{M}) = D_k(R)/(Rdz+\mathfrak{M})$ und folglich $D_k(R) = Rdz$ nach Krull-Nakayama. $D_k(\overline{B})$ ist das direkte Produkt der $D_k(\overline{B}_i)$ und folglich zyklischer $\overline{B}$-Modul. Nun ist aber $D_k(\overline{B}) = D_A(B)/Bd\,\mathfrak{m}_A B = D_A(B)/\mathfrak{m}_A D_A(B)$. Da $\mathfrak{m}_A B$ im Jacobsonradikal von B enthalten ist, zeigt das Lemma von Krull-Nakayama, daß $D_A(B)$ zyklischer B-Modul ist.

Es gibt eine treuflache Erweiterung von A durch einen lokalen Ring A' mit unendlichem Restekörper. Nach (15.4) ist $\vartheta_A^B \subseteq {}_N\vartheta_A^B \subseteq B$. Aus diesen Einbettungen werden in kanonischer Weise die Einbettungen $\vartheta_{A'}^{B'} \subseteq {}_N\vartheta_{A'}^{B'} \subseteq B' = A' \otimes_A B$ nach (15.1) und (15.5). Da A' treuflach über A ist, gelten Gleichheitszeichen dieser Inklusionen genau dann über A , wenn sie über B gelten. Ferner ist $D_{A'}(B') = A' \otimes_A D_A(B)$ zyklischer B'-Modul. Wir dürfen deshalb von nun an annehmen, daß A einen unendlichen Restekörper hat. Nach Lemma (4.2) ist dann B einfache A-Algebra. Aus (15.4) folgt nun (n = 1) die gewünschte Behauptung.

§16. Dedekindsche Differente

Sei B eine endliche A-Algebra mit Rang. Mit K sei der totale Quotientenring von A bezeichnet. $L := K \otimes_A B$ ist nach Voraussetzung über B projektive K-Algebra mit Rang; deshalb ist die Spur $Sp : L \longrightarrow K$ wohldefiniert.

Die kanonische Abbildung $K \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(L,K)$ ist bijektiv. Ist B ein A-Modul von endlicher Darstellung, so ist das bekanntlich der Fall, da K flach über A ist. In dem besonderen Fall hier betrachten wir eine exakte Sequenz $O \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow O$ von A-Homomorphismen, wobei F ein endlicher freier A-Modul ist. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & K \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A) \arrow[r] \arrow[d, "h_B"] & K \otimes_A \mathrm{Hom}_A(F,A) \arrow[r] \arrow[d, "h_F"] & K \otimes_A \mathrm{Hom}_A(G,A) \arrow[d, "h_G"] \\
O \arrow[r] & \mathrm{Hom}_K(L,K) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_K(K \otimes_A F,K) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_K(K \otimes_A G,K)
\end{tikzcd}$$

mit den kanonischen Homomorphismen sind die horizontalen Sequenzen exakt. h_F ist trivialerweise bijektiv. h_G ist injektiv, wie man sofort bestätigt, da das Tensorieren mit K Nenneraufnahme von Nichtnullteilern ist. Das 5er-Lemma zeigt nun, daß auch h_B bijektiv ist.

Wir erhalten somit kanonische Homomorphismen
$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A),L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(L,K),L)$. Das Bild von $\Phi \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ unter diesen Homomorphismen in $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(L,K),L)$ sei als $K \otimes \Phi$ bezeichnet. Schließlich sei

$$\vartheta : \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) \longrightarrow L$$

durch $\vartheta(\Phi) := (K \otimes \Phi)(Sp)$ definiert. (Wert auf der Spur nehmen!)

$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ besitzt zwei B-Modul-Strukturen. Für $b \in B$ kann man $b\Phi$ durch das Multiplizieren der Argumente von Φ mit b und $b*\Phi$ durch das Multiplizieren der Werte von Φ mit b definieren. Bezüglich der zweiten B-Modulstruktur ist ϑ ein B-Homomorphismus. Der größte Untermodul von $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$, auf dem beide Modulstrukturen übereinstimmen, ist $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$, das B-Dual des A-Duals von B .

<u>Definition</u>. Der B-Untermodul $\vartheta(\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B))$ von L heißt die <u>Dedekindsche Differente</u> von B über A . Sie werde mit ${}_D\vartheta_A^B$ bezeichnet.

Ist B torsionsfrei, so ist $B \longrightarrow L$ injektiv, und L ist augenscheinlich der totale Quotientenring von B . Besitzt ${}_D\vartheta_A^B$ außerdem noch einen universellen Nenner, so läßt sich diese Differente auch als gebrochenes Ideal auffassen.

(16.1) Grundringerweiterung. Sei B eine endliche A-Algebra mit dem Rang n und $\varphi : A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus. Weiter sei B ein A'-Modul von endlicher Darstellung und φ sei flach, oder aber A' entstehe aus A durch Nenneraufnahme von Nichtnullteilern. Dann ist $B' := A' \otimes_A B$ eine endliche A'-Algebra mit dem Rang n , und es gilt:

$$_D\vartheta^{B'}_{A'} \supseteq B' \cdot {_D\vartheta^B_A} \quad .$$

Ist außerdem A noethersch oder ist B projektiv über A , so gilt:

$$_D\vartheta^{B'}_{A'} = B' \cdot {_D\vartheta^B_A} \quad .$$

Beweis. Unter den Anfangsvoraussetzungen ist B' ein A'-Modul vom Rang n , siehe (10.1) . Sei K der totale Quotientenring von A , $L := K \otimes_A B$, und K' der totale Quotientenring von A', $L' := K' \otimes_{A'} B' = K' \otimes_K L$. Mit den Überlegungen zu Beginn dieses Paragraphen sieht man sofort, daß $A' \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A)$ kanonisch isomorph zu $\mathrm{Hom}_{A'}(B',A')$ ist. Dann hat man ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(L,K),L) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{A'}(A' \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B,A),B') & & \mathrm{Hom}_{K'}(K' \otimes_K \mathrm{Hom}_K(L,K),L') \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_{A'}(B',A'),B') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{K'}(\mathrm{Hom}_{K'}(L',K'),L')
\end{array}$$

mit den uns bereits bekannten horizontalen Homomorphismen. Links vertikal werden B-Homomorphismen in B'-Homomorphismen abgebildet, rechts vertikal ist das Auswerten auf Sp^L_K mit dem Auswerten auf $\mathrm{Sp}^{L'}_{K'}$ verträglich. Siehe Schlußbemerkung von §8.) Hieraus folgt $_D\vartheta^{B'}_{A'} \supseteq B' \cdot {_D\vartheta^B_A}$.

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen (A noethersch, oder B A-projektiv) ist $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ ein A-Modul endlicher Darstellung, womit sich dann die kanonische Isomorphie von $A' \otimes_A \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ mit $\mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_{A'}(B',A'),B')$ ergibt. Unter den Voraussetzungen ist $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ aber auch ein B-Modul endlicher Darstellung, womit denn bei der genannten Isomorphie $A' \otimes_A \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ in $\mathrm{Hom}_{B'}(\mathrm{Hom}_{A'}(B',A'),B')$ übergeht. Hieraus folgt, wenn man die ϑ- bzw. ϑ'-Bilder betrachtet, $_D\vartheta^{B'}_{A'} = B' \cdot {_D\vartheta^B_A}$.

(16.2) Aussage. Sei B eine torsionsfreie endliche A-Algebra mit Rang. A sei ganz abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring K, oder $\mathrm{Frei}_A B$ enthalte eine offene vollständige Menge. Dann läßt sich ${}_D\vartheta_A^B$ in kanonischer Weise als B-Ideal auffassen.

Beweis. Unter den gemachten Voraussetzungen ist $Sp_K^{K\otimes B} = K\otimes h$ mit einem $h \in \mathrm{Hom}_A(B,A)$ wegen (10.4) und (10.5); wir können h als Sp_A^B bezeichnen. Offenbar kann man sich jetzt die ϑ-Bilder bereits in B ausrechnen. Man erhält ein B-Ideal, das bei der kanonischen Abbildung $B \longrightarrow K \otimes_A B$ auf ${}_D\vartheta_A^B$ abgebildet wird. $B \longrightarrow K \otimes_A B$ ist nach Voraussetzung über B injektiv. -

Den Anschluß zur klassischen Definition der Dedekindschen Differente gewinnen wir mit dem folgenden Satz.

(16.3) Satz und Definition. Sei B eine torsionsfreie endliche A-Algebra mit Rang. Der totale Quotientenring von A sei mit K bezeichnet. Der totale Quotientenring $L := K \otimes_A B$ von B sei unverzweigt über K. Dann heißt

$$\mathcal{C}_A^B := \{x \in L : Sp_K^L(xB) \subseteq A\}$$

der Komplementärmodul ("Complementärmodul") von B über A. Es gilt:

$${}_D\vartheta_A^B = (\mathcal{C}_A^B)^{-1} := \{y \in L : y\,\mathcal{C}_A^B \subseteq B\}.$$

Ist B freier A-Modul, ist $f_1, \ldots, f_n$ eine A-Basis von B und damit eine K-Basis von L und ist $f_1', \ldots, f_n'$ die zugehörige Dualbasis von L über K bezüglich der Spur, dann ist $\mathcal{C}_A^B = Af_1' + \ldots + Af_n'$.

Beweis. Nach (12.3) und (12.4) ist Sp_K^L eine L-Basis von $\mathrm{Hom}_K(L,K)$.

Da B endlicher A-Modul ist, ist $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ Untermodul eines endlichen freien A-Moduls, mithin torsionsfrei. Somit läßt sich $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ mit einem Untermodul von $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ identifizieren. Es gilt dabei:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(B,A) &= \{h \in \mathrm{Hom}_K(L,K) : h(B) \subseteq A\} \\ &= \{xSp_K^L : (xSp_K^L)(B) \subseteq A\} \\ &= \{xSp_K^L : Sp_K^L(xB) \subseteq A\} = \mathcal{C}_A^B \cdot Sp_K^L .\end{aligned}$$

Die Nichtnullteiler aus A repräsentieren alle Nichtnullteiler von B wegen (8.2); dies ist ja auch der Grund, weshalb L der totale Quotientenring von B ist. Es folgt nun, daß

$\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ kanonisch in $\mathrm{Hom}_L(\mathrm{Hom}_K(L,K),L)$ eingebettet ist. Der letztere L-Modul ist $\mathrm{Hom}_L(L\cdot Sp_K^L,L) = L\cdot(Sp_K^L)^*$, wobei $(Sp_K^L)^*$ diejenige L-Linearform auf $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ bezeichnet, die Sp_K^L auf 1 abbildet. Daher ist insgesamt

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) &= \{H \in \mathrm{Hom}_L(L\cdot Sp_K^L,L) \;:\; H(\mathrm{Hom}_A(B,A)) \subseteq B\} \\ &= \{y\cdot(Sp_K^L)^* \;:\; y\cdot(Sp_K^L)^*(\mathcal{C}_A^B\cdot Sp_K^L) \subseteq B\} \\ &= \{y\cdot(Sp_K^L)^* \;:\; y\mathcal{C}_A^B \subseteq B\} = (\mathcal{C}_A^B)^{-1}\cdot(Sp_K^L)^* .\end{aligned}$$

Auswerten auf der Spur ergibt nun die Dedekindsche Differente ${}_D\vartheta_A^B = (\mathcal{C}_A^B)^{-1}$, als "inverses Ideal" zum "gebrochenen Ideal" $\mathcal{C}_A^B$.

Sei jetzt B eine freie endliche A-Algebra und $f_1,\dots,f_n$ eine A-Basis von B . Mit $f_1^*,\dots,f_n^*$ bezeichnen wir die zugehörige gewöhnliche Dualbasis von $\mathrm{Hom}_A(B,A)$. Es ist $f_j^*(f_i) = \delta_{ij}$ (Kroneckerdelta). Beim Tensorieren mit K geht $f_1,\dots,f_n$ in eine K-Basis von L und $f_1^*,\dots,f_n^*$ in die zugehörige gewöhnliche Dualbasis von $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ über. $f_j' \in L$ ist durch $Sp_K^L(f_i f_j') = \delta_{ij}$ bestimmt, das ist dasjenige Element von L , das bei der kanonischen Abbildung $\sigma: L \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(L,K)$, die zur mit der Spur gebildeten Bilinearform gebildet wird, auf f_j^* abgebildet wird; vgl. §11 . (Dabei ist σ nach Voraussetzung bijektiv.) Es ist $f_j'\cdot Sp_K^L = f_j^*$. Sei nun $x = a_1 f_1' + \dots + a_n f_n'$, $a_j \in K$, ein beliebiges Element von L . Genau dann ist $x \in \mathcal{C}_A^B$, wenn $xSp_K^L(B) \subseteq A$ ist, wenn also $Sp_K^L(f_i x) = xSp_K^L(f_i) \in A$ ist für alle i. Es ist aber $Sp_K^L(f_i x) = \sum_{j=1}^n a_j Sp_K^L(f_i f_j') = a_i$. Dies zeigt $\mathcal{C}_A^B = Af_1' + \dots + Af_n'$, wie behauptet. -

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen von (14.2) wird B von Sp_K^L in A abgebildet und man erhält trivialerweise $B \subseteq \mathcal{C}_A^B$ (und damit wieder ${}_D\vartheta_A^B = (\mathcal{C}_A^B)^{-1} \subseteq B$).

Dem Vergleich von Dedekindscher und Noetherscher Differente liegt ein Hilfssatz aus [13] zugrunde, dem wir uns nun zuwenden wollen.

Mit $\varkappa$ bezeichnen wir den kanonischen A-Homomorphismus

$$\varkappa : B \otimes_A B \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$$

mit $\varkappa(b \otimes c) = (h \longmapsto h(b)c)$. Entsprechend den beiden B-Modulstrukturen auf $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ gibt es zwei B-Modulstrukturen auf $B^e = B \otimes_A B$, nämlich durch das Multiplizieren mit $a\otimes 1$ (das wir kurz in der Form $a(b\otimes c) := ab\otimes c$ schreiben) bzw. mit

$1 \otimes a$ (das wir kurz in der Form $a * (b \otimes c) := b \otimes ac$ schreiben) für $a \in B$. Es gilt dann offenbar $\varkappa(a(b \otimes c)) = a\varkappa(b \otimes c)$ und $\varkappa(a * (b \otimes c)) = a * \varkappa(b \otimes c)$. Also ist $\varkappa$ bezüglich entsprechend gewählter B-Modulstrukturen B-Homomorphismus. Insbesondere bildet $\varkappa$ den größten Untermodul von B^e , auf dem beide B-Modulstrukturen übereinstimmen, in den entsprechenden Untermodul von $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ ab.

Sei I der Kern der Multiplikation $B^e \xrightarrow{\mu} B$ und $\mathfrak{a} := \mathrm{Ann}_{B^e} I$. Beide B-Modulstrukturen stimmen offenbar auf $\mathfrak{a}$ überein. Umgekehrt: Gilt $ax = a * x$ für ein $x \in B^e$ und für alle $a \in B$, so gilt $x \cdot (a \otimes 1 - 1 \otimes a) = 0$ für alle $a \in B$ und damit $x \in \mathfrak{a}$; denn $a \otimes 1 - 1 \otimes a$, $a \in B$, erzeugen ja das B^e-Ideal I . Der größte Untermodul von B^e , auf dem beide genannten B-Modulstrukturen übereinstimmen, ist also $\mathfrak{a}$. Es folgt $\varkappa(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$. Das Gleichheitszeichen gilt hierbei natürlich, wenn $\varkappa$ bijektiv ist, was bekanntlich der Fall ist, wenn B endliche projektive A-Algebra ist.

<u>(16.4) Hilfssatz</u>. Sei B eine A-Algebra, $I := \mathrm{Kern}(B^e \xrightarrow{\mu} B)$ und $\mathfrak{a} := \mathrm{Ann}_{B^e} I$. Dann bildet der kanonische Homomorphismus

$$\varkappa : B^e \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$$

der Annulator in $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ ab.

Sei B außerdem endlicher projektiver A-Modul mit Rang. Dann wird der (mit einer eindeutig festgelegten B-Modulstruktur versehene) B-Modul $\mathfrak{a}$ von $\varkappa$ bijektiv auf den B-Modul $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ abgebildet, und die Einschränkungen von μ, $\varkappa$ und ϑ (Wert auf der Spur) ergeben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[drr, "\mu"] \arrow[d, "\varkappa"'] & & \\
 & & B \\
\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) \arrow[urr, "\vartheta"'] & &
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u>. Nur noch der letzte Teil des Hilfssatzes ist zu beweisen. Sei B endlicher projektiver A-Modul mit Rang. Gleichheit von Homomorphismen läßt sich lokal testen. Da I jetzt endlicher B^e-Modul ist, bleibt die Situation beim Lokalisieren erhalten, was μ, I und $\mathfrak{a}$ angeht; vgl. (15.5) . Wie zu Beginn dieses Paragraphen sieht man, daß auch $\varkappa$ und ϑ mit dem Lokalisieren verträglich sind; vgl. (16.1). Daher dürfen wir annehmen, daß B eine freie endliche A-Algebra ist.

Sei $f_1,\dots,f_n$ eine A-Basis von B und $f_1^*,\dots,f_n^*$ die zugehörige Dualbasis von $\mathrm{Hom}_A(B,A)$. Es ist $f_i^*(f_j) = \delta_{ij}$. Die Multiplikation in B ist durch Konstanten aus A bestimmt. Sei $f_if_j = \sum_{k=1}^n b_{ij}^k f_k$. Die Kommutativität von B bedeutet $b_{ij}^k = b_{ji}^k$, wovon wir im folgenden stillschweigend Gebrauch machen.

Sei nun $x = \sum_{i,j} a_{ij}\, f_i \otimes f_j$ ein Element von $\mathfrak{a}$, wobei $a_{ij} \in A$ ist. Einerseits hat man $\mu(x) = \sum_{i,j,k} a_{ij} b_{ij}^k\, f_k$, andererseits $\vartheta\varkappa(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, \varkappa(f_i \otimes f_j)(\mathrm{Sp}) = \sum_{i,j} a_{ij} \mathrm{Sp}(f_i) f_j = \sum_{i,j,m} a_{ij} b_{im}^m\, f_j$. Es genügt also zu zeigen, daß für alle k die Summen $S := \sum_{i,j} a_{ij}\, b_{ij}^k$ und $T := \sum_{i,m} a_{ik}\, b_{im}^m$ gleich sind. Wegen $x \in \mathfrak{a}$ ist $(1 \otimes f_i)x = (f_i \otimes 1)x$, also $\sum_{r,s,t} a_{rs}\, b_{is}^t\, f_r \otimes f_t = \sum_{r,s,t} a_{rs}\, b_{ir}^t\, f_t \otimes f_s$. Koeffizientenvergleich beim Basiselement $f_i \otimes f_k$ ergibt die Formel $\sum_s a_{is}\, b_{is}^k = \sum_r a_{rk}\, b_{ir}^i$ für alle i,k. Hiermit ergibt sich $S = \sum_i (\sum_j a_{ij}\, b_{ij}^k) = \sum_i (\sum_r a_{rk}\, b_{ir}^i)$. Dies ist aber T, wie man durch Umnummerieren feststellt.

<u>(16.5) Satz</u>. Sei B eine strikte Frobeniusalgebra mit Rang über A. Sei $\mathrm{Hom}_A(B,A) = B\eta$, ferner sei $f \in B$ durch $\mathrm{Sp}_A^B = f\eta$ bestimmt. Dann ist ${}_D\vartheta_A^B = Bf$.

Sei außerdem B frei über A. Es sei $f_1,\dots,f_n$ eine A-Basis von B und $f_1',\dots,f_n'$ die mit η gebildete zugehörige Dualbasis von B über A. (Man hat $\eta(f_if_j') = \delta_{ij}$.) Dann erzeugt $\Delta := \sum_{i=1}^n f_i \otimes f_i'$ den Annulator $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_{B^e} I$ des Kerns I der Multiplikation $\mu\colon B^e \longrightarrow B$ und man hat $\mu(\Delta) = \sum_{i=1}^n f_if_i' = f$. Ferner gilt:

$$f_j = \sum_{i=1}^n \eta(f_if_j)f_i' \quad , \quad 1 \le j \le n \quad .$$

Schließlich gilt noch für die mit der Spur und die mit η gebildeten Bilinearform:

$$\mathrm{diskr}_{\mathrm{Spur}}(f_1,\dots,f_n) = N_A^B(f)\cdot \mathrm{diskr}_\eta(f_1,\dots,f_n) \quad .$$

<u>Beweis</u>. Aus Ranggründen ist $B\eta \cong B$. Daher wird $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ von $\eta \longmapsto 1$ erzeugt. ${}_D\vartheta_A^B$ ist das Bild von $\mathrm{Hom}_B(B\eta, B)$ unter dem Auswerten ϑ auf der Spur, und das ist der B-Modul $\vartheta(B\cdot(\eta \longmapsto 1)) = B\vartheta(\eta \longmapsto 1) = B\cdot(\eta \longmapsto 1)(\mathrm{Sp}_A^B) = Bf$.

Sei jetzt B frei über A und $f_1,\dots,f_n$ eine A-Basis von B. Die bijektive Abbildung $g \longmapsto g\eta$ von B in $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ ist die zur Bilinearform $(x,y) \longmapsto \eta(xy)$ gehörende kanonische Abbildung σ_B ; vgl. §11 . Das Urbild unter σ_B der gewöhnlichen Dualbasis $f_1^*,\dots,f_n^*$ von $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ über A ist die A-Basis $f_1',\dots,f_n'$ von B . Man hat $f_j^* = f_j'\eta$.

Es ist nun $\varkappa(\Delta)(f_j^*) = \sum_i f_j^*(f_i)f_i'$ $= f_j'$, also $\varkappa(\Delta)(f_j'\eta) = f_j'$. Daher ist $\varkappa(\Delta)(g\eta) = g$ für jedes $g \in B$, d.h. $\varkappa(\Delta)$ ist das erzeugende Element $\eta \longmapsto 1$ des B-Moduls $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$. Nach dem ersten Teil von (16.4) ist somit Δ ein erzeugendes Element des B^e-Ideals $\mathfrak{a}$. Schließlich ist $\mu(\Delta) = \nu\varkappa(\Delta) = \nu(\eta \longmapsto 1) = f$.

Sei $f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}f_i'$ mit $a_{ij} \in A$. Dann gilt:
$\eta(f_if_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj}\,\eta(f_if_k') = \sum_{k=1}^n a_{kj}\,\delta_{ki} = a_{ij}$. Ist $ff_j = \sum_{k=1}^n c_{kj}f_k$ mit $c_{kj} \in A$, so wird

$$\begin{aligned}(\mathrm{Sp}_A^B(f_if_j))_{1\le i,j\le n} &= (f\,\eta(f_if_j)) = (\eta(f_iff_j))\\ &= (\textstyle\sum_{k=1}^n \eta(f_if_k)c_{kj}) = (\eta(f_if_j))(c_{kj})\end{aligned}$$

und hieraus durch Determinantenbildung $\mathrm{diskr}_{\mathrm{Spur}}(f_1,\dots,f_n) = \mathrm{diskr}_\eta(f_1,\dots,f_n)\cdot\det(c_{kj})$. Es ist aber $\det(c_{kj}) = N_A^B(f)$.

<u>(16.6) Satz</u>. Sei B eine endliche projektive A-Algebra und I der Kern der Multiplikation $B^e \longrightarrow B$.

Ist B eine Frobeniusalgebra über A , dann ist $\mathrm{Ann}_{B^e}I$ ein projektiver B-Modul des Ranges 1 . Ist umgekehrt $\mathrm{Ann}_{B^e}I$ ein projektiver B-Modul und ist A zudem noethersch, dann ist B Frobeniusalgebra über A .

Bezeichne K den totalen Quotientenring von A . Sei $L := K \otimes_A B$ unverzweigt über K . Ist B eine Frobeniusalgebra über A , dann ist ${}_N\vartheta_A^B$ invertierbares Ideal in B . Ist umgekehrt ${}_N\vartheta_A^B$ invertierbares Ideal in B und ist A zudem noethersch, dann ist B Frobeniusalgebra über A .

<u>Beweis</u>. Die erste Aussage folgt mit (14.4), (5) direkt aus (16.4), da mit $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ auch $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B)$ ein projektiver B-Modul des Ranges 1 ist. Die Umkehrung ist nicht trivial; man erhält sie mit Satz (14.20) aus (16.4).

Zum Beweis des zweiten Teiles des Satzes dürfen wir gleich annehmen, daß A lokal ist und daß somit B einen Rang besitzt. Unter der Unverzweigtheitsvoraussetzung ist die Abbildung $\nu : \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) \to B$ als Teil der entsprechend gebildeten

Abbildung über K ebenfalls injektiv. Zusammen mit (16.4) erhalten wir daher, daß $\mathrm{Ann}_{B^e} I$ von μ bijektiv auf ${}_N\vartheta_A^B$ abgebildet wird. Der Rest der Behauptung folgt jetzt aus dem bereits bewiesenen ersten Teil des Satzes. -

Zur Verwendung beim Rechnen von Beispielen bemerken wir noch:

<u>(16.7) Aussage</u>. Sei B eine freie endliche A-Algebra des Ranges n . Es seien $f_1,\dots,f_n$ und $f_1',\dots,f_n'$ A-Basen von B derart, daß $\Delta := \sum_{i=1}^n f_i \otimes f_i'$ in $\mathrm{Ann}_{B^e} I$ liegt, wobei I der Kern der Multiplikation $B^e \longrightarrow B$ ist.

Dann ist B eine strikte Frobeniusalgebra über A . Im einzelnen gilt: Ist $1 = a_1 f_1' + \dots + a_n f_n'$ mit $a_i \in A$, so ist $\mathrm{Hom}_A(B,A) = B\eta$, wobei η die A-Linearform $f_i \longmapsto a_i$ ist. $\varkappa(\Delta)$ ist die B-Linearform $\eta \longmapsto 1$ auf $\mathrm{Hom}_A(B,A)$.

<u>Beweis</u>. Sei $f_1^*,\dots,f_n^*$ die gewöhnliche Dualbasis von $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ zu $f_1,\dots,f_n$. Man hat dann $\varkappa(\Delta) = (f_j^* \longmapsto f_j')$. Insbesondere ist $\varkappa(\Delta)$ eine Isomorphie, sogar eine B-Isomorphie nach (16.4) wegen $\Delta \in \mathrm{Ann}_{B^e} I$. (Übrigens wird $\mathrm{Ann}_{B^e} I$ von Δ erzeugt.) Die restlichen Behauptungen sind jetzt klar. -

Wir wenden uns nun dem angekündigten Vergleich von Noetherscher und Dedekindscher Differente zu.

<u>(16.8) Satz</u>. Sei B eine endliche A-Algebra mit Rang . Sei K der totale Quotientenring von A und $L := K \otimes_A B$. Mit I sei der Kern der Multiplikation $B^e \longrightarrow B$ bezeichnet. Dann ist das kanonisch gebildete Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ann}_{B^e} I \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varkappa"] & B \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) \arrow[r, "\nu"] & L
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Insbesondere ist

$${}_N\vartheta_A^B \subseteq {}_D\vartheta_A^B \quad ,$$

was heißen soll: Bei $B \longrightarrow L$ wird ${}_N\vartheta_A^B$ in ${}_D\vartheta_A^B$ abgebildet.

Ist B endliche projektive A-Algebra mit Rang, so ist

$${}_N\vartheta_A^B = {}_D\vartheta_A^B \subseteq B \ .$$

<u>Beweis</u>. Sei $x \in \mathrm{Ann}_{B^e} I$ und $\tilde{x} := (B \longrightarrow L)\circ\mu\ (x)$. Man kann $\tilde{x}$ auch ausrechnen, indem man x durch $\mu' \circ (B^e \longrightarrow L^e)$ abbildet,

wobei μ' die Multiplikation $L^e \longrightarrow L$ ist. Nach dem Beweis von (15.5) ist $x' := (B^e \longrightarrow L^e)(x) \in \mathrm{Ann}_{L^e} I'$, wobei $I' := \mathrm{Kern}\,\mu'$ ist. Nach (14.4), angewandt auf die projektive K-Algebra L, ist $\mu'(x') = \nu'\varkappa'(x')$, wobei $\varkappa', \nu'$ in kanonischer Weise gebildet sind. Man hat auch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} B^e \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) \arrow[d] \arrow[r, "\nu"] & L \\ L^e \arrow[r, "\varkappa'"] & \mathrm{Hom}_K\ \mathrm{Hom}_K(L,K),B) \arrow[ru, "\nu'"'] & \end{tikzcd},$$

wobei an die Vorüberlegung zu Beginn des Paragraphen zu erinnern ist. Es folgt $\tilde{x} = \mu'(x) = \nu'\varkappa'(x') = \nu\varkappa(x)$. Der Rest der Behauptung ist nun klar.-

Die Dedekindsche Differente ist für manchen Zweck zu ungenau, wie folgender Satz zeigt.

<u>(16.9) Korollar</u>. Sei A ein noetherscher normaler Integritätsring und B eine endliche A-Algebra, die ebenfalls normaler Integritätsring ist. Der Quotientenkörper L von B sei separabel über dem Quotientenkörper K von A. Sei

$${}_N\vartheta_A^B = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$$

die Lasker-Noether-Zerlegung der Noetherschen Differente mit $\mathfrak{P}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Die Nummerierung der Primideale $\mathfrak{P}_i$ sei so getroffen, daß $\mathrm{codim}\,\mathfrak{P}_i = 1$ genau für $1 \le i \le m$ gilt. Dann ist

$${}_D\vartheta_A^B = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_m ,$$

d.h. die Dedekindsche Differente ist das zur Noetherschen Differenten gehörige divisorielle Ideal.

<u>Beweis</u>. Nach (16.2) ist ${}_D\vartheta_A^B$ ein Ideal im noetherschen Ring B. Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal in B und $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$. Nach (15.5) und (16.1) ist $({}_N\vartheta_A^B)B_{\mathfrak{p}} = {}_N\vartheta_{A_{\mathfrak{p}}}^{B_{\mathfrak{p}}}$ bzw. $({}_D\vartheta_A^B)B_{\mathfrak{p}} = {}_D\vartheta_{A_{\mathfrak{p}}}^{B_{\mathfrak{p}}}$.

Sei $\mathrm{codim}\,\mathfrak{P} = 1$. Dann ist $B_{\mathfrak{p}}$ ein freier $A_{\mathfrak{p}}$-Modul, und mit (16.8) folgt $({}_N\vartheta_A^B)B_{\mathfrak{p}} = ({}_D\vartheta_A^B)B_{\mathfrak{p}}$. Erst recht werden die Differenten in der Lokalisierung $B_{\mathfrak{P}}$ von $B_{\mathfrak{p}}$ gleich. Das bedeutet nun, daß $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ die minimalen Primärkomponenten von ${}_D\vartheta_A^B$ sind.

Sei $\mathrm{codim}\,\mathfrak{P} \geqslant 1$. $\mathfrak{P}$ kommt genau dann nicht in der Lasker-Noether-Zerlegung von ${}_D\vartheta_A^B$ vor, wenn $\mathfrak{P}B_{\mathfrak{P}}$ nicht in der Lasker-Noether-Zerlegung von $({}_D\vartheta_A^B)B_{\mathfrak{P}}$ vorkommt. Da L über K separabel ist und da B Integritätsring ist, zeigen die Überlegungen von (16.3), daß $\nu : \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) \to B \subseteq L$ injektiv ist. Daher ist ${}_D\vartheta_A^B$ ein Dualmodul über B . Dasselbe gilt dann auch in der Lokalisierung $B_{\mathfrak{p}}$. Dann ist aber $\operatorname{codh}({}_D\vartheta_A^B)B_{\mathfrak{p}} \geq 2$ und $\operatorname{codh} B_{\mathfrak{p}} \geq 2$, woraus $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \notin \operatorname{Ass}(B_{\mathfrak{p}}/({}_D\vartheta_A^B)B_{\mathfrak{p}})$ folgt. -

Bei $\dim A = \dim B = 1$ im vorliegenden Satz müssen die beiden Differenten natürlich gleich sein. Das ist bei klassischen Erweiterungen von Dedekindringen der Fall. Aus (16.8) folgt sogar ohne Separabilitätsvoraussetzung sofort:

<u>(16.10) Korollar</u>. Sei A ein Dedekindring und B ein endlicher Erweiterungsring von A , der ebenfalls Dedekindring ist. Dann ist

$$ {}_N\vartheta_A^B = {}_D\vartheta_A^B \quad . $$

In der klassischen algebraischen Zahlentheorie spielt der Begriff der Norm von Elementen und Idealen eine große Rolle. Über die Norm hängen Differenten und Diskriminanten zusammen. Wir besprechen dies kurz noch.

Sei B eine projektive A-Algebra mit Rang. Dann ist die Norm $N = N_A^B : B \longrightarrow A$ wohldefiniert. Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal in B . Das von den Normen $N(b), b \in \mathfrak{b}$, erzeugte Ideal in A bezeichnen wir mit $N(\mathfrak{b})$. Dieses Ideal heißt die <u>Norm des Ideals</u> $\mathfrak{b}$. Ist $\mathfrak{b} = Bb$ ein Hauptideal, so ist offenbar $N(\mathfrak{b}) = A\cdot N(b)$. Mit beliebigen Grundringerweiterungen ist die Norm von Idealen nicht verträglich, jedoch mit Nenneraufnahme. Sei nämlich S ein multiplikatives System in A . Dann wird $N(\mathfrak{b}_S)$ wegen $\mathfrak{b}_S = \{ b/s : b \in \mathfrak{b}, s \in S \}$ über A_S erzeugt von Elementen der Form $N(b/s) = N(b)/N(s)$, also von den Elementen $N(b), b \in \mathfrak{b}$, da $N(s)$ eine Potenz von s und damit ebenfalls Einheit in A_S ist. Also ist wirklich $N(\mathfrak{b}_S) = N(\mathfrak{b})_S$.

<u>(16.11) Satz</u>. Sei B eine Frobeniusalgebra mit Rang über A . Dann ist

$$ N({}_N\vartheta_A^B) = N({}_D\vartheta_A^B) = \mathfrak{d}_A^B \ , $$

in Worten: Die Norm der Differente ist die Diskriminante.

<u>Beweis</u>. Beim Beweis können wir gleich annehmen, daß A lokal ist, da die drei benutzten Begriffe mit dem Lokalisieren verträglich sind.

Sei also A lokal. Dann ist B eine freie A-Algebra. Sei

$f_1,\dots,f_n$ eine A-Basis von B . Andererseits ist B semilokal und $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ daher nicht nur projektiv vom Rang 1 über B , sondern sogar isomorph zu B . Sei $\mathrm{Hom}_A(B,A) = B\eta$. Ferner sei $\mathrm{Sp}_A^B = f\eta$ mit $f \in B$.

Nach (16.8) ist ${}_N\vartheta_A^B = {}_D\vartheta_A^B$. Nach (16.5) ist ferner ${}_D\vartheta_A^B = Bf$. Daher ist $N({}_N\vartheta_A^B) = N({}_D\vartheta_A^B) = A\cdot N(f)$.

Andererseits wird aber auch $\mathfrak{n}_A^B$ nach (16.5) von $N(f)$ erzeugt, denn $\mathrm{diskr}_\eta(f_1,\dots,f_n)$ ist ja Einheit in A .-

Der vorstehende Satz läßt sich insbesondere auf endliche Erweiterungen von Dedekindringen anwenden: Siehe (14.19).

§17. Einfache freie Algebren

Bei den einfachen freien Algebren hat man im allgemeinen keine Schwierigkeiten, Verzweigungsprobleme konkret durchzurechnen. Wir wollen das in diesem Paragraphen genauer besprechen.

Sei $A \neq 0$ ein Ring, α ein normiertes Polynom des Grades $n \geq 1$ aus $A[X]$ und $B := A[X]/\alpha A[X]$. Weiter sei x die Restklasse von X in B . Dann ist $1, x, \dots, x^{n-1}$ eine A-Basis von B. Es gilt:

<u>(17.1) Satz</u>. Äquivalent sind:

(1) B ist unverzweigt über A .

(2) α und die Ableitung α' erzeugen in $A[X]$ das Einheitsideal.

(3) $\alpha'(x)$ ist eine Einheit in B .

(4) $N_A^B(\alpha'(x))$ ist eine Einheit in A .

(5) $\mathrm{diskr}(1, x, \dots, x^{n-1})$ ist eine Einheit in A .

<u>Beweis</u>. Es ist $D_A(B) \cong A[X]/(\alpha A[X] + \alpha' A[X]) = B/\alpha'(x)B$. Daher sind (1),(2) und (3) äquivalent. Am Ende von §8 haben wir als Folgerung aus (8.2) gesehen, daß ein Element von B genau dann Einheit ist, wenn seine Norm Einheit ist. Also sind (3) und (4) äquivalent. Die Äquivalenz von (5) und (1) folgt aus Satz (12.4) und Hilfssatz (11.3) . -

Ohne Benutzung von Satz (12.4) kann man die Äquivalenz von (4) und (5) im vorstehenden Satz der folgenden Formel entnehmen, die sich direkt beweisen läßt.

<u>(17.2) Satz</u>. $\mathrm{diskr}(1, x, \dots, x^{n-1}) = (-1)^{\binom{n}{2}} N_A^B(\alpha'(x))$.

Beweis. Es gibt einen Erweiterungsring A' von A , über dem α in Linearfaktoren zerfällt: $\alpha = \prod_{s=1}^{n}(X-b_s)$ mit $b_s \in A'$. Offenbar ist $\alpha = \chi_x$, das charakteristische Polynom des Multiplizierens mit x in B . Nach Lemma (9.1) ist $\chi_{x^{i+j}} = \prod_{s=1}^{n}(X-b_s^{i+j})$, woraus sich $Sp(x^{i+j}) = \sum_{s=1}^{n} b_s^{i+j}$ ergibt. Folglich ist $\operatorname{diskr}(1,\ldots,x^{n-1}) = \det(Sp(x^i x^j)) = \det(\sum_{s=1}^{n} b_s^i b_s^j) = \det(b_s^i)^2 = \prod_{s<r}(b_s-b_r)^2$. (Vandermonde.) Andererseits ergibt Lemma (9.1), daß $\chi_{\alpha'(x)} = \prod_{s=1}^{n}(X-\alpha'(b_s))$, also $N(\alpha'(x)) = \prod_{s=1}^{n}\alpha'(b_s)$ ist. Aus $\alpha' = \sum_{m=1}^{n}\prod_{r\neq m}(X-b_r)$ erhält man $\alpha'(b_s) = \prod_{r\neq s}(b_s-b_r)$. Daher ist $N(\alpha'(x)) = \prod_{s,r,s\neq r}(b_s-b_r) = \prod_{s<r}(-(b_s-b_r)^2) = (-1)^{\binom{n}{2}}\prod_{s<r}(b_s-b_r)^2$. Das beendet den Beweis. -

Wir werden weiter unten nach entsprechenden Vorbereitungen einen einfacheneren Beweis für (17.2) geben können.

(17.3) Satz. Alle Differenten von B über A sind gleich:

$$\alpha'(x)B = \vartheta_A^B = {}_N\vartheta_A^B = {}_D\vartheta_A^B \quad .$$

Beweis. Es ist $D_A(B) = B/\alpha'(x)B$ und daher $\vartheta_A^B = \alpha'(x)B$. Der Kern der Multiplikation $B^e \longrightarrow B$ wird, da $B = A[x]$ ist, von $x\otimes 1 - 1\otimes x$ erzeugt. Nach (15.4) ist daher $\vartheta_A^B = {}_N\vartheta_A^B$. Nach (14.16) und (16.11) ist schließlich ${}_N\vartheta_A^B = {}_D\vartheta_A^B$. -

Aus (16.11) folgt übrigens noch $N(\alpha'(x)B) = \mathfrak{n}_A^B$ und damit auf einfache Weise die Äquivalenz von (4) und (5) in Satz (17.1). Eine genauere Untersuchung dieser Methode gibt dann sogar die scharfe Aussage (17.2), wie wir gleich sehen werden.

Wir betrachten die einhüllende Algebra $B^e = B\otimes_A B$ und die Multiplikation $\mu : B^e \longrightarrow B$ mit dem Kern I . Bezeichnet $\pi : A[X] \longrightarrow B$ die Restklassenabbildung, so ist $B\otimes\pi$ ein A-Algebra-Homomorphismus von $B\otimes_A A[X]$ auf $B\otimes_A B = B^e$. Nun läßt sich $B\otimes_A A[X]$ kanonisch mit $B[X]$ identifizieren. Dabei geht $B\otimes\pi$ in das Substituieren $X \longmapsto 1\otimes x$ des Polynomringes $B[X]$ über, das wir mit φ bezeichnen wollen. $\operatorname{Kern}(B\otimes\pi) = B\otimes\alpha A[X]$ geht in $\alpha B[X]$ über. Wegen $\alpha(x) = 0$ gibt es ein $\beta\in B[X]$ mit $\alpha = \beta\cdot(X-x)$. Man hat $\varphi(X-x) = 1\otimes x - x\otimes 1$. Daher ist $\varphi^{-1}(I) = (X-x)B[X]$, $\varphi^{-1}(\operatorname{Ann}_{B^e} I) = \beta B[X]$, $\operatorname{Ann}_{B^e} I = \varphi(\beta)B^e$, $\varphi^{-1}(\operatorname{Ann}_{B^e}\varphi(\beta)) = (X-x)B[X]$ und somit $\operatorname{Ann}_{B^e}(\varphi(\beta)B^e) = I$.

Sei $\Delta := \varphi(\beta)$. Zur Berechnung von Δ brauchen wir nur $\beta = b_o + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}$ mit $b_i \in B$ zu schreiben; dann ist $\Delta = \sum_{i=o}^{n-1} b_i \otimes x^i$. Die Koeffizienten von $\alpha = a_o + a_1X + \ldots + a_nX^n$, $a_i \in A$, $a_n = 1$, stehen mit denen von β in der Beziehung $-b_\nu x + b_{\nu-1} = a_\nu$, woraus man (von unten beginnend)

$$\begin{aligned} b_o &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + \ldots + 1 \cdot x^{n-1} \\ &\vdots \\ b_{n-2} &= a_{n-1} \cdot 1 + 1 \cdot x \\ b_{n-1} &= \quad 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

erhält. Folglich ist die Übergangsmatrix von der Basis $1, \ldots, x^{n-1}$ zu den $b_o, \ldots, b_{n-1}$ eine Matrix, in deren Nebendiagonalen überall 1 und darunter überall 0 steht. Ihre Determinante ist $(-1)^{\binom{n}{2}}$. Also ist $b_o, \ldots, b_{n-1}$ eine A-Basis von B . Nach (16.7) ist nun $\mathrm{Hom}_A(B,A) = B\eta$, wobei η die A-Linearform $x^i \longmapsto \delta_{i,n-1}$ ist und $\varkappa(\Delta)$ die B-Linearform $\eta \longmapsto 1$ auf $\mathrm{Hom}_A(B,A)$. (Vgl. auch den direkten Beweis von (14.16).) Die x^i und b_j sind η-duale Basen nach (16.5), und es ist außerdem $\mathrm{diskr}_\eta(b_o, \ldots, b_{n-1}) = (-1)^{n-1} = \mathrm{diskr}_\eta(1, \ldots, x^{n-1})$.

Die Abbildung $B[X] \xrightarrow{\varphi} B \otimes_A B \xrightarrow{\mu} B$ ist nichts anderes als die Substitution $X \longmapsto x$. Aus $\alpha = \beta \cdot (X-x)$ erhält man daher $\alpha' = \beta' \cdot (X-x) + \beta$ und $\mu\varphi(\alpha') = \mu\varphi(\beta)$ wegen $\mu\varphi(X-x) = 0$. Somit ist $\mu(\Delta) = \mu\varphi(\beta) = \mu\varphi(\alpha') = \alpha'(x)$.

(16.5) liefert nun $\mathrm{diskr}_{\mathrm{Spur}}(1, \ldots, x^{n-1}) = (-1)^{\binom{n}{2}} N(\alpha'(x))$. Dieses ergibt den oben angekündigten zweiten Beweis von (17.2).

Sei nun B unverzweigt über A , so daß $\alpha'(x)$ Einheit in B ist. Wir haben $\mathrm{Sp}_A^B = \alpha'(x) \cdot \eta$ und daher $\mathrm{Sp}(x^ib_j/\alpha'(x)) = \alpha'(x)\,\eta(x^ib_j/\alpha'(x)) = \eta(x^ib_j) = \delta_{ij}$. Also ist $b_o/\alpha'(x), \ldots, b_{n-1}/\alpha'(x) = 1/\alpha'(x)$ die Dualbasis zu $1, x, \ldots, x^{n-1}$ bezüglich der Spur.

Ist nur $K \otimes_A B$ über dem totalen Quotientenring K von A unverzweigt, so ist $\alpha'(x)$ Nichtnullteiler in B , und $b_o/\alpha'(x), \ldots, b_{n-1}/\alpha'(x)$ ist die Dualbasis von $K \otimes_A B$ zu $1, \ldots, x^{n-1}$ bezüglich der Spur, die nach (16.3) über A den Komplementärmodul $\mathfrak{C}_A^B$ erzeugt.

Die Benutzung von η in der Verzweigungstheorie einfacher, freier Algebren scheint eine lange Tradition zu haben, vgl.

P. Roquette [10], §3. Auf den Überbau der Verzweigungstheorie vollständiger Durchschnitte gehen wir in der im Vorwort erwähnten Fortsetzung dieses Heftes ein. Siehe auch [13] und die dort angegebene Literatur.

§18. Beispiele

Beispiel 1. Sei k ein Körper und B der formale Potenzreihenring $k[[X,Y]]$ in den Unbestimmten X,Y über k . In B liegt $A := k[[X^2,XY,Y^2]]$. Man kann A auch als Restklassenring eines freien Potenzreihenringes $k[[U,V,W]]$ nach dem von V^2-UW erzeugten Hauptideal darstellen (Behnke-Kegel). Da dieser normal ist, stimmt er aus Dimensionsgründen mit A überein.

Als A-Modul wird B von 1,X,Y erzeugt. Man sieht sofort, daß die Relationen dieser Elemente von $\langle 0,-XY,X^2\rangle$ und $\langle 0,-Y^2,XY\rangle$ erzeugt werden. Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$. Der Körper $L := \mathrm{Quot}(B)$ wird wegen $Y = (XY/X^2)\cdot X$ von X über K erzeugt mit dem Minimalpolynom $T^2-X^2 \in K[T]$. (Daß T^2-X^2 irreduzibel ist, folgt daraus, daß X^2 als Basiselement von $\mathfrak{m}_A$ kein Quadrat in A und deswegen (A normal) auch kein Quadrat in K ist.) Sei $f \in B$. Dann besitzt f eine Darstellung $f = f_o+f_1X+f_2Y$ mit $f_o,f_1,f_2 \in A$. Hierbei ist f_o eindeutig bestimmt. Die A-Linearform $f \longmapsto f_o$ nennen wir η . In der Basis 1,X von L über K rechnet man einfach aus: $Sp_K^L(f) = 2f_o$ und $N(f)= f_o^2-(f_1X+f_2Y)^2$. Somit ist $Sp_K^L|B = 2\eta$.

Es ist $D_A(B)$ isomorph zu B^2/M , wobei M von den Paaren $\langle 2X,0\rangle$, $\langle Y,X\rangle$, $\langle 0,2Y\rangle$ erzeugt wird. Also ist $\vartheta_A^B = B2X^2 + B4XY + B2Y^2$.

Schließlich wird $\mathrm{Ann}_{B^e}I$ in B^e erzeugt von den Elementen $1\otimes X^2 + X\otimes X$, $1\otimes XY + X\otimes Y$, $1\otimes XY + Y\otimes X$ und $1\otimes Y^2 + Y\otimes Y$, wie man sich ausrechnet, indem man die mit den weiter oben angegebenen Relationen eine Darstellung $A^2 \longrightarrow A^3 \longrightarrow B \longrightarrow 0$ macht, diese mit B tensoriert und dann mit B-Moduln rechnet. Es ist nun ${}_N\vartheta_A^B = B2X^2 + B2XY + B2Y^2$.

Sei jetzt char k = 2 . Dann ist $\vartheta_A^B = {}_N\vartheta_A^B = {}_D\vartheta_A^B = 0$, $Sp_K^L = 0$ und folglich auch $\mathfrak{N}_A^B = 0$.

Sei daher nun char k $\neq$ 2 . Dann ist L separabel über K . Wir haben $\vartheta_A^B = {}_N\vartheta_A^B = \mathfrak{m}_B^2$. Nach (16.9) ist ${}_D\vartheta_A^B = B$. Wir haben $N({}_D\vartheta^B_A) = A$. Ist $f \in \mathfrak{m}^2_B$, $f = f_o+f_1X+f_2Y$ mit $f_o, f_1, f_2 \in A$, so ist $N(f) = f_o^2 - (f_1X+f_2Y)^2$. Da A normal ist, hat man $f_1X+f_2Y \in A \cap \mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A$. Folglich ist $N(f) \in \mathfrak{m}^2_A$. Weiter ist $N(X^2) = X^4$, $N(XY) = X^2Y^2$ und $N(Y^2) = Y^4$. Daher ist $N(\mathfrak{m}^2_B) = \mathfrak{m}^2_A$, wenn man die Norm des Ideals als das von den Normen der Idealelemente erzeugte Ideal definiert. Andererseits rechnet man leicht $\mathfrak{n}^B_A = \mathfrak{m}_A$ aus.

Es sei darauf hingewiesen, daß $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ als B-Modul zu B isomorph ist. η ist ein Basiselement (auch bei char $k = 2$). B ist aber keine Frobeniusalgebra über A , da B nicht frei über A ist.

<u>Beispiel 2</u>. Sei k ein Körper der Charakteristik O und B der Restklassenring des formalen Potenzreihenringes $k[[X,Y,Z]]$ nach dem von X^3-YZ, Y^2-XZ und Z^2-X^2Y erzeugten Ideal. B ist ein eindimensionaler lokaler Integritätsring (mit Normalisierung $k[[t]]$, $X = t^3$, $Y = t^4$, $Z = t^5$). Die Restklassen von X,Y,Z in B seien mit x bzw. y bzw. z bezeichnet. B ist freie Algebra über $A := k[[x]] \subseteq B$ mit A-Basis $1,y,z$. Der Quotientenkörper L von B ist separabel algebraisch von Grad 3 über dem Quotientenkörper K von A .

B ist der Restklassenring des Polynomringes $A[Y,Z]$ nach dem von x^3-YZ, Y^2-xZ und Z^2-x^2Y erzeugten Ideal. Daher ist $D_A(B)$ der Restklassenmodul von B^2 nach dem von den Tupeln $\langle -z,-y\rangle$, $\langle 2y,-x\rangle$, $\langle -x^2,2z\rangle$ erzeugten Untermodul und $\vartheta^B_A = Bx^3+By^2+Bz^2$. Der Annulator des Kernes der Multiplikation $B^e \longrightarrow B$ wird von $x^3\otimes 1 + y\otimes z + z\otimes y$, $x^2\otimes y + x^2y\otimes 1 + z\otimes z$ und $xz\otimes 1 + y\otimes y + x\otimes z$ erzeugt. Daher ist $\vartheta^B_A = {}_N\vartheta^B_A$. Nach (16.8) ist ${}_N\vartheta^B_A = {}_D\vartheta^B_A$. Alle Differenten stimmen überein.

Mit Hilfe von (14.12) und (14.9) ist leicht direkt zu sehen, daß B keine Frobeniusalgebra über A ist. Wir können das aber auch daran feststellen, daß die Norm der Differenten von $\mathfrak{n}^B_A$ verschieden ist. Einerseits ist $\mathrm{diskr}(1,y,z) = -27x^6$ und daher $\mathfrak{n}^B_A = Ax^6$. Andererseits kann man sich leicht ausrechnen, daß $N(f) \in Ax^8$ liegt für alle $f \in \vartheta^B_A$. Es ist $N(y^2) = x^8$ und somit $N(\vartheta^B_A) = Ax^8$.

<u>Beispiel 3</u>. Wir besprechen eine ganze Klasse von Beispielen. Sei im folgenden k ein Körper und B eine lokale endliche k-Algebra. (Wir wollen uns auf lokale k-Algebren beschränken; bei beliebi-

gen endlichen k-Algebren kommt man sofort durch Zerlegung in direkte Produkte auf diesen Fall.) Mit K bezeichnen wir den Restekörper $B/\mathfrak{m}_B$.

Wegen (16.8) ist natürlich ${}_N\vartheta^B_A = {}_D\vartheta^B_A$. Hiervon kann ϑ^B_A sehr wohl verschieden sein. Aus [13] zitieren wir folgendes Resultat (das wir auch in der im Vorwort genannten Fortsetzung dieses Heftes beweisen und das im übrigen in jedem Einzelfall leicht direkt bestätigt werden kann): Ist K nicht separabel über k , so ist $\vartheta^B_A = 0$. (Dies folgt wegen $\vartheta^B_A \subseteq {}_N\vartheta^B_A$ auch aus den Ausführungen unten.) Ist K separabel über k , so ist $\vartheta^B_A \neq 0$ genau dann, wenn B vollständiger Durchschnitt über k ist und wenn außerdem $\dim_k B/\dim_k K$ kein Vielfaches der Charakteristik von k ist; in diesem Falle ist $\vartheta^B_A = \mathrm{Ann}_B \mathfrak{m}_B$.

Wir zeigen nun: Ist K nicht separabel über k , so ist ${}_N\vartheta^B_A = 0$. Ist K separabel über k , so ist ${}_N\vartheta^B_A \neq 0$ genau dann, wenn B Frobeniusalgebra über k ist (wenn B also Frobeniusring ist, vgl. (14.11) und wenn außerdem $\dim_k B/\dim_k K$ kein Vielfaches der Charakteristik von k ist; in diesem Falle ist ${}_N\vartheta^B_A = \mathrm{Ann}_B \mathfrak{m}_B$.

Zum Beweis betrachten wir eine Kompositionsreihe von B in der Form $B = \mathfrak{a}_q \supset \mathfrak{a}_{q-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_o = 0$ mit Idealen $\mathfrak{a}_i$, wobei $\mathfrak{a}_i = Bf_i + \mathfrak{a}_{i-1}$ sei, $f_q = 1$. Die Kompositionsfaktoren sind isomorph zum B-Modul K . Restklassen von Elementen aus B in K werden durch Überqueren gekennzeichnet. Weiter seien $x_1,\ldots,x_m$ Elemente aus B mit $K = k\bar{x}_1+\ldots+k\bar{x}_m$, $m = \dim_k K$. Wir dürfen annehmen, daß $\mathrm{Sp}^K_k(x_j) = 0$ ist für $j \geq 2$. Es ist $q = \dim_k B/\dim_k K$.

Die $f_i x_j$ bilden eine k-Basis von B . Wegen $\mathfrak{m}_B \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}_{i-1}$ gilt offenbar $\mathrm{Sp}^B_k(x) = q \cdot \mathrm{Sp}^K_k(\bar{x})$ für jedes $x \in B$. Ist K nicht separabel über k oder ist q ein Vielfaches der Charakteristik von k , so ist $\mathrm{Sp}^B_k = 0$. Dann ist natürlich auch ${}_D\vartheta^B_A = 0$, da das Auswerten auf der Spur trivial ist.

Wir wollen von nun an annehmen, daß $qk \neq 0$ ist und daß K separabel über k ist. Es ist dann $a := \mathrm{Sp}^K_k(\bar{x}_1) \neq 0$.

Sei η diejenige k-Linearform auf B , die f_1x_1 auf 1 und alle übrigen Basiselemente f_ix_j auf 0 abbildet. Offenbar ist $\mathrm{Sp}^B_k = qaf_1 \cdot \eta$.

Sei B keine Frobeniusalgebra über k . Ist $\Phi : \mathrm{Hom}_k(B,k) \longrightarrow B$ ein B-Homomorphismus, dann ist notwendig

Bild $\Phi \subsetneq \mathfrak{m}_B$ und deswegen $\Phi(Sp_k^B) = qaf_1 \Phi(\eta) = 0$. Folglich ist ${}_D\vartheta_A^B = 0$.

Sei schließlich B Frobeniusalgebra über k . Dann wird $Ann_B \mathfrak{m}_B$ von f_1 erzeugt, und jedes Ideal $\neq 0$ in B enthält f_1 . Aus $f_1\eta \neq 0$ folgt daher $Ann_B \eta = 0$ und aus Dimensionsgründen $Hom_k(B,k) = B\eta$. Dann ist aber ${}_D\vartheta_A^B = Bqaf_1 = Bf_1 = Ann_B \mathfrak{m}_B$, wormit der Beweis beendet ist. -

Das einfachste Beispiel einer Frobeniusalgebra, die kein vollständiger Durchschnitt ist, erhält man in $B := k[X,Y,Z]/\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ von $X^2-Y^2, Y^2-Z^2, XY, YZ, ZX$ erzeugt wird. Hier ist $B/\mathfrak{m}_B \cong k$ und $q = \dim_k B = 5$. Bei char $k \neq 5$ ist ${}_N\vartheta_A^B = {}_D\vartheta_A^B \neq 0$, aber $\vartheta_A^B = 0$.

KAPITEL IV: OPERATION ENDLICHER GRUPPEN

§19. Allgemeines über Fixringe

Seien B eine A-Algebra und G eine endliche Gruppe. G operiere auf B als Gruppe von A-Automorphismen, d.h. gegeben sei ein Gruppenhomomorphismus $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{A\text{-}Alg} B$. Wir schreiben häufig kurz σb für $\alpha(\sigma)(b)$, $\sigma \in G, b \in B$. Überdies schreiben wir kurz σ für $\alpha(\sigma)$ auch dann, wenn α nicht injektiv ist (und keine Mißverständnisse zu befürchten sind). Der Fixring

$$B^G := \{b \in B : \sigma b = b \text{ für alle } \sigma \in G\}$$

ist eine A-Unteralgebra von B .

Operiert die endliche Gruppe G auf einem Ring B (als Gruppe von $\mathbb{Z}$-Automorphismen) und ist A ein Unterring von B^G , so operiert G auf B auch als Gruppe von A-Automorphismen.

Die endliche Gruppe G operiere auf B . Für $b \in B$ liegen die Koeffizienten des Polynoms

$$\prod_{\sigma \in G} (X - \sigma b)$$

im Fixring B^G . Insbesondere liegen die Elemente $\sum_{\sigma \in G} \sigma b$ und $\nu(b) := \prod_{\sigma \in G} \sigma b$ in B^G . Da das angegebene Polynom normiert ist und b als Nullstelle besitzt (wegen $\varepsilon b = b$ für das Einselement $\varepsilon \in G$), folgt

(19.1) Aussage. B ist ganz über B^G .

Operiere G als Gruppe von A-Automorphismen auf B . Für eine A-Algebra A' operiert dann G als Gruppe von A'-Automorphismen auf $B' := A' \otimes_A B$ mittels $\sigma(a' \otimes b) := a' \otimes \sigma b$. Das Bild des kanonischen Homomorphismus $A' \otimes_A B^G \longrightarrow A' \otimes_A B$ liegt offenbar in $(A' \otimes_A B)^G$. Es gilt:

(19.2) Aussage. Der kanonische Homomorphismus $A' \otimes_A B^G \longrightarrow (A' \otimes_A B)^G$ ist bijektiv in folgenden Fällen:

(1) A' ist flach über A .

(2) ord G ist eine Einheit in B .

Beweis. Sei n := ord G . Im Fall (1) betrachten wir den A-Homomorphismus $\Phi : B \longrightarrow B^n$ mit $b \longmapsto (b - \sigma b)_{\sigma \in G}$. Offenbar ist Kern $\Phi = B^G$, d.h. die Sequenz

$$0 \longrightarrow B^G \longrightarrow B \xrightarrow{\Phi} B^n$$

ist exakt. Ist A' flach über A , so ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \otimes_A B^G \longrightarrow A' \otimes_A B \xrightarrow{id \otimes \Phi} (A' \otimes_A B)^n$$

exakt, und das ist die Behauptung.

Im Fall (2) ist offenbar $\frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} \sigma$ eine A-lineare Projektion von B auf B^G . Dann ist aber $id \otimes (\frac{1}{n} \sum \sigma) = \frac{1}{n} \sum (id \otimes \sigma)$ eine A'-lineare Projektion von $A' \otimes_A B$ auf $A' \otimes_A B^G$. Da Bild $(\frac{1}{n} \sum id \otimes \sigma) = (A' \otimes_A B)^G$ ist, folgt die Behauptung. -

Sei S ein multiplikatives System in B , das invariant unter G ist, für das also $\sigma(S) = S$ ist für alle $\sigma \in G$. In diesem Fall operiert G in natürlicher Weise auch auf B_S . Da die Abbildung $B \longrightarrow B^G$, $b \longmapsto \nu(b)$, $\nu(b) = \prod \sigma b$, multiplikativ ist, ist $\nu(S)$ ein multiplikatives System in B^G . Jedes Element von S ist Teiler eines Elements von $\nu(S)$. Somit ist der kanonische Homomorphismus $B_{\nu(S)} \longrightarrow B_S$ bijektiv. Aus (19.2) folgt

$$(B_S)^G = (B_{\nu(S)})^G = (B^G)_{\nu(S)} \ .$$

Ist $S' \subsetneq B^G$ ein multiplikatives System mit $\nu(S) \subseteq S' \subsetneq S$, so gilt außerdem noch $(B_S)^G = (B^G)_{\nu(S)} = (B^G)_{S'}$.

<u>Beispiel</u>. Seien B ein Integritätsring mit Quotientenkörper L, $A := B^G$ und K der Quotientenkörper von A . Dann ist mit $S := B \setminus \{0\}$ und $S' := A \setminus \{0\}$:

$$L^G = (B_S)^G = (B^G)_{S'} = A_{S'} = K \ .$$

Der Quotientenkörper des Fixringes ist also der Fixkörper des Quotientenkörpers. Ist B normal, d.h. ganz abgeschlossen in L, so ist wegen $A = B^G = L^G \cap B = K \cap B$ auch A normal. Da B ganz über A ist, ist in diesem Fall B der ganze Abschluß von A in L.

Wir wollen zwei (geometrisch) wichtige Fälle angeben, in denen B (nicht nur ganz sondern sogar) endlich über B^G ist.

<u>(19.3) Aussage</u>. Sei B eine A-Algebra endlichen Typs. Die endliche Gruppe G operiere auf B als Gruppe von A-Automorphismen. Dann ist B endlich über B^G . Ist A noethersch, so ist überdies B^G ebenfalls eine A-Algebra endlichen Typs.

<u>Beweis</u>. Sei $B = A[b_1, \ldots, b_r]$. Da B^G eine A-Unteralgebra von B ist, gilt auch $B = B^G[b_1, \ldots, b_r]$. Somit ist B ganz und von endlichem Typ über B^G , also endlich. Sei nun A noethersch.

$c_1,\ldots,c_s$ seien die Koeffizienten der Polynome $\prod_{\sigma\in G}(X-\sigma b_i)$, $i = 1,\ldots,r$. Die A-Unteralgebra $A' := A[c_1,\ldots,c_s] \subseteq B^G$ von B ist von endlichem Typ über A und damit noethersch. Außerdem ist B ganz und von endlichem Typ über A', also endlich. Da B^G zwischen A' und B liegt, ist B^G ebenfalls endlich über A' und insgesamt von endlichem Typ über A .

(19.4) Aussage. Sei k ein bewerteter Körper und B eine analytische k-Algebra. Die endliche Gruppe G operiere auf B als Gruppe von k-Automorphismen. Dann ist B endlich über B^G, und B^G ist ebenfalls eine analytische k-Algebra.

Beweis. Unter einer analytischen k-Algebra verstehen wir definitionsgemäß eine k-Algebra, die endlich über einer Potenzreihenalgebra von k ist. Sei nun $b_1,\ldots,b_r$ ein Erzeugendensystem des Jacobson-Radikals $\mathfrak{m}_B$ von B . Mit $c_1,\ldots,c_s$ bezeichnen wir die vom Leitkoeffizienten verschiedenen Koeffizienten der Polynome $\prod_{\sigma\in G}(X-\sigma b_i)$, $i = 1,\ldots,r$. Es ist $c_j \in \mathfrak{m}_B$ für alle j . Sei $A' := k\langle\langle c_1,\ldots,c_s\rangle\rangle$ das Bild des k-Homomorphismus $k\langle\langle X_1,\ldots,X_s\rangle\rangle \longrightarrow B$ mit $X_j \longmapsto c_j$. Es ist A' eine analytische k-Unteralgebra von B . Ferner ist $A' \subseteq B^G$ (wegen $b-\sigma b \in \bigcap_{\nu\geq 0}\mathfrak{m}_B^\nu = 0$ für alle $b\in A'$ und alle $\sigma\in G$). Die Algebra B ist endlich über A' . Um dies einzusehen, genügt es nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz in der Serreschen Fassung zu zeigen, daß $\overline{B} := B/\mathfrak{m}_{A'}B = B/(c_1,\ldots,c_s)B$ endlich über k ist. B ist eine semilokale noethersche k-Algebra, deren Restekörper endlich über k sind. Es genügt somit zu zeigen, daß $\mathfrak{m}_{\overline{B}} = \mathfrak{m}_B/(c_1,\ldots,c_s)B$ nilpotent ist. Ist $n := \operatorname{ord} G$ und $\alpha_i := \prod_\sigma(X-\sigma b_i)$, so ist $0 = \alpha_i(b_i)$, woraus $b_i^n \in (c_1,\ldots,c_s)B$ folgt. Das ergibt die Behauptung. Da nun B^G zwischen A' und B liegt, ist B^G endlich über A' und damit insgesamt eine analytische k-Algebra.

§20. Hilbertsche Zerlegungstheorie

Seien B eine A-Algebra und G eine endliche Gruppe, die auf B als Gruppe von A-Algebra-Automorphismen operiert. Dann operiert G in natürlicher Weise auch auf der Menge der Ideale von B . Ist $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal, so bezeichnet $G_Z(\mathfrak{b})$ die Isotropiegruppe von $\mathfrak{b}$, also

$$G_Z(\mathfrak{b}) := \{\sigma\in G : \sigma(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}\}.$$

$G_Z(\mathfrak{P})$ heißt die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$. $G_Z(\mathfrak{P})$ operiert auf $B/\mathfrak{P}$. Der Normalteiler der Elemente $\sigma \in G_Z(\mathfrak{P})$, die die Identität auf $B/\mathfrak{P}$ induzieren, heißt die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ und wird mit $G_T(\mathfrak{P})$ bezeichnet, also

$$G_T(\mathfrak{P}) := \{\sigma \in G : \sigma(b) - b \in \mathfrak{P} \text{ für alle } b \in B\}.$$

Die Faktorgruppe $G_Z(\mathfrak{P})/G_T(\mathfrak{P})$ operiert auf $B^{G_T(\mathfrak{P})}$ mit Fixring $B^{G_Z(\mathfrak{P})}$. Man nennt $B^{G_T(\mathfrak{P})}$ den Trägheitsring und $B^{G_Z(\mathfrak{P})}$ den Zerlegungsring von $\mathfrak{P}$. Man hat die folgende Kette von A-Algebren:

$$B^G \subseteq B^{G_Z(\mathfrak{P})} \subseteq B^{G_T(\mathfrak{P})} \subseteq B .$$

(20.1) Aussage. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal in B und $\mathfrak{q} := \mathfrak{P} \cap B^G$, so gilt:

$$G_Z(\mathfrak{P}) = G_Z(\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}}) \ , \ G_T(\mathfrak{P}) = G_T(\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}}) .$$

Ferner gilt

$$(B_{\mathfrak{q}})^{G_Z(\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}})} = (B^{G_Z(\mathfrak{P})})_{\mathfrak{q}} \ , \ (B_{\mathfrak{q}})^{G_T(\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}})} = (B^{G_T(\mathfrak{P})})_{\mathfrak{q}} .$$

Beweis. Der zweite Teil der Aussage folgt aus dem ersten Teil zusammen mit (19.2). Es genügt somit, den ersten Teil zu zeigen. Die Inklusionen $G_Z(\mathfrak{P}) \subseteq G_Z(\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}})$ und $G_T(\mathfrak{P}) \subseteq G_T(\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}})$ sind trivial. Ist umgekehrt $\sigma \in G_Z(\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}})$, so ist $\sigma(\mathfrak{P}) \subseteq B \cap (\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{P}$, also $\sigma \in G_Z(\mathfrak{P})$. Und ist $\sigma \in G_T(\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}})$, so gilt für $b \in B$: $\sigma(b) - b \in B \cap (\mathfrak{P}B_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{P}$, also $\sigma \in G_T(\mathfrak{P})$.

(20.2) Lemma. Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal in B^G. Dann operiert G transitiv auf der Menge der Primideale in B, die über $\mathfrak{q}$ liegen. Ist $\mathfrak{P}$ irgendein Primideal in B über $\mathfrak{q}$ (ein solches existiert stets, da B ganz über B^G ist), so ist die Anzahl der verschiedenen Primideale von B über $\mathfrak{q}$ gleich dem Index $[G : G_Z(\mathfrak{P})]$.

Beweis. Der zweite Teil folgt offenbar aus dem ersten. Sei $P := \bigcup_{\sigma \in G} \sigma\mathfrak{P}$. Dann ist P eine G-invariante Teilmenge von B. Ferner ist $(\sigma\mathfrak{P}) \cap B^G = \sigma(\mathfrak{P} \cap B^G) = \sigma\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$. Wir haben zu zeigen, daß jedes Primideal $\mathfrak{Q}$ in B über $\mathfrak{q}$ mit einem $\sigma\mathfrak{P}$, $\sigma \in G$, übereinstimmt. Angenommen, dies sei falsch. Dann ist $\mathfrak{Q} \not\subseteq \sigma\mathfrak{P}$ für alle $\sigma \in G$ (Aus $\mathfrak{Q} \subseteq \sigma\mathfrak{P}$ folgte wegen der Ganzheit von B über B^G, daß $\mathfrak{Q} = \sigma\mathfrak{P}$ ist.), und es gibt ein $b \in \mathfrak{Q}$, $b \notin P$. Da P invariant unter G ist, gilt auch $\sigma b \notin P$ für alle $\sigma \in G$. Dann ist $\nu(b) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(b) \notin P$. Andererseits ist aber $\nu(b) \in \mathfrak{q} \cap B^G = \mathfrak{q} \subseteq P$. Widerspruch! -

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in B . Ein Element $\sigma \in G$ induziert dann einen Isomorphismus $B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\sigma\mathfrak{p}}$. Insbesondere sind die Lokalisierungen $B_{\mathfrak{p}}$ nach Primidealen $\mathfrak{p} \subsetneq B$, die über einem festen Primideal $\mathfrak{q} \subseteq B^G$ liegen, wegen (20.2) alle untereinander isomorph. Ferner operiert $G_Z(\mathfrak{p})$ auf $B_{\mathfrak{p}}$, und offenbar ist $G_T(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}) = G_T(\mathfrak{p})$ und $G_Z(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}) = G_Z(\mathfrak{p})$. Nach den Bemerkungen hinter (19.2) ist ferner

$$(B_{\mathfrak{p}})^{G_Z(\mathfrak{p})} = (B^{G_Z(\mathfrak{p})})_{\mathfrak{p} \cap B^{G_Z(\mathfrak{p})}} .$$

<u>(20.3) Lemma</u>. Sei B ein semilokaler Ring, der endliches direktes Produkt von lokalen Ringen ist, für den also der kanonische Homomorphismus $B \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} B_{\mathfrak{m}_i}$, wobei $\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_r$ die verschiedenen maximalen Ideale von B sind, bijektiv ist. Ferner sei B^G lokal. Dann sind die $B_{\mathfrak{m}_i}$ untereinander isomorphe B^G-Algebren, und es ist $B^G \longrightarrow B'_{\mathfrak{m}'}$ ein Isomorphismus für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq B$, $B' := B^{G_Z(\mathfrak{m})}$, $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cap B'$.

<u>Bemerkung</u>. Die Voraussetzungen von (20.3) sind zum Beispiel immer erfüllt, wenn B^G ein henselscher lokaler Ring ist, vgl. §7 , insbesondere (7.1).

<u>Beweis von (20.3)</u>. Es ist nur der angegebene Isomorphismus zu bestätigen. Dieser identifiziert sich mit dem kanonischen Homomorphismus $B^G \longrightarrow (B_{\mathfrak{m}})^{G_Z(\mathfrak{m})}$. Zunächst die Injektivität. Dafür ist zu zeigen, daß $B^G \longrightarrow B_{\mathfrak{m}}$ injektiv ist. Sei $a \in B^G$, $a/1 = 0$ in $B_{\mathfrak{m}}$. Für $\sigma \in G$ ist dann $\sigma(a/1) = a/1 = 0$ in $B_{\sigma(\mathfrak{m})}$. Da mit $\sigma \in G$ die $\sigma(\mathfrak{m})$ alle maximalen Ideale von B durchlaufen, ist $a = 0$ in B . Sei nun $\tilde{b} \in (B_{\mathfrak{m}})^{G_Z(\mathfrak{m})}$. Es gibt ein $b \in B$ mit $b/1 = \tilde{b}$ in $B_{\mathfrak{m}}$ und $b/1 = 0$ in $B_{\mathfrak{n}}$ für alle von $\mathfrak{m}$ verschiedenen maximalen Ideale $\mathfrak{n} \subsetneq B$. Offenbar ist $b \in B^{G_Z(\mathfrak{m})}$. Sei $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ ein Repräsentantensystem für die Linksnebenklassen von G bezüglich $G_Z(\mathfrak{m})$ und $a := \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(b)$. Für ein beliebiges $\tau \in G$ bilden dann auch die Elemente $\tau\sigma_1,\ldots,\tau\sigma_r$ ein Repräsentantensystem für diese Linksnebenklassen. Es ist also $\tau\sigma_i = \sigma_{\mu(i)}\tilde{\sigma}_i$ mit $\tilde{\sigma}_i \in G_Z(\mathfrak{m})$ und $\mu \in \Upsilon_r$. Folglich ist $\tau a = \sum_{i=1}^{r} \tau\sigma_i(b) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_{\mu(i)}\tilde{\sigma}_i(b) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_{\mu(i)}(b) = a$, d.h. es ist $a \in B^G$. Überdies ist $a/1 = b/1 = \tilde{b}$ in $B_{\mathfrak{m}}$ wegen $\sigma_i(b)/1 = 0$ in $B_{\mathfrak{m}}$ für $\sigma_i \notin G_Z(\mathfrak{m})$. Damit ist gezeigt, daß $B^G \longrightarrow (B_{\mathfrak{m}})^{G_Z(\mathfrak{m})}$ auch surjektiv ist.

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieses Paragraphen.

(20.4) Satz. Die endliche Gruppe G operiere auf dem Ring B als Gruppe von Automorphismen. Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal in B. Ferner sei $G' := G_Z(\mathfrak{P})$, $G'' := G_T(\mathfrak{P})$; $B' := B^{G'}$, $B'' := B^{G''}$; $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap B^G$, $\mathfrak{P}' := \mathfrak{P} \cap B'$, $\mathfrak{P}'' := \mathfrak{P} \cap B''$. Für die Ringkette

$$B^G \subseteq B' \subseteq B'' \subseteq B$$

mit den Primidealen

$$\mathfrak{p} \qquad \mathfrak{P}' \qquad \mathfrak{P}'' \qquad \mathfrak{P}$$

gilt dann:

(1) $\mathfrak{P}$ ist das einzige Primideal in B über $\mathfrak{P}'$.

(2) Die Restekörpererweiterung $\varkappa(\mathfrak{P}'') \longrightarrow \varkappa(\mathfrak{P})$ ist rein inseparabel.

(3) Die Erweiterung $B'_{\mathfrak{P}'} \longrightarrow B''_{\mathfrak{P}''}$ ist endlich, unverzweigt und frei vom Rang $[G' : G'']$. Die Restekörpererweiterung $\varkappa(\mathfrak{P}') \longrightarrow \varkappa(\mathfrak{P}'')$ ist galoissch mit Galoisgruppe G'/G''. (Insbesondere gilt, wobei wir zur Formulierung die Begriffe von §21 verwenden: $B'_{\mathfrak{P}'} \longrightarrow B''_{\mathfrak{P}''}$ ist eine Galoiserweiterung, und zwar operiert G'/G'' galoissch auf $B''_{\mathfrak{P}''}$ mit Fixring $B'_{\mathfrak{P}'}$.)

(4) Die Erweiterung $(B^G)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B'_{\mathfrak{P}'}$ ist lokal etale mit trivialer Restekörpererweiterung $\varkappa(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} \varkappa(\mathfrak{P}')$. (Insbesondere gilt: Ist $(B^G)_{\mathfrak{p}}$ henselsch, so ist $(B^G)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B'_{\mathfrak{P}'}$ bijektiv.)

Wir erinnern daran, daß eine Erweiterung $C \longrightarrow D$ lokaler Ringe lokal etale heißt, wenn D treuflach und unverzweigt über C ist und wenn D überdies Lokalisierung einer endlichen C-Algebra ist; vgl. § 7.

Beweis von (20.4). Zu (1). Diese Aussage folgt aus (20.2), angewandt auf die Gruppe $G_Z(\mathfrak{P})$.

Im weiteren können wir wegen (20.1) gleich annehmen, daß B^G lokal mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ ist. Dann sind auch die Ideale $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}''$ jeweils maximal.

Zu (2). Sei $b \in B$. Es ist b Nullstelle von $\prod_{\sigma \in G''}(X - \sigma(b)) \in B''[X]$. Modulo $\mathfrak{P}$ sind die Elemente $\sigma(b)$ alle gleich. Das Minimalpolynom von b modulo $\mathfrak{P}$ zerfällt also über $\varkappa(\mathfrak{P})$ in ein Produkt identischer Linearfaktoren. Folglich ist b modulo $\mathfrak{P}$

rein inseparabel über $\varkappa(\mathfrak{p}'')$.

Zu (3). G' operiert auf B" und $B''_{\mathfrak{p}''}$. Sei $\sigma \in G'$ ein Element, das trivial auf $B''/\mathfrak{p}''$ operiert. Dann operiert σ wegen (2) auch trivial auf $B/\mathfrak{p}$. Somit ist $\sigma \in G''$. Es folgt: G'/G'' operiert treu auf $B''/\mathfrak{p}''$ als Gruppe von $(B'/\mathfrak{p}')$-Automorphismen. Außerdem operiert G'/G'' auf $B''_{\mathfrak{p}''}$ mit Fixring $B'_{\mathfrak{p}'}$. Sei $m := \operatorname{ord} G'/G''$. Wir erhalten also über die Erweiterung $B'_{\mathfrak{p}'} \longrightarrow B''_{\mathfrak{p}''}$ lokaler Ringe folgende Aussagen: Jedes Element von B erfüllt eine Ganzheitsgleichung des Grades $\leq m$. Die Erweiterung $B'/\mathfrak{p}' \longrightarrow B''/\mathfrak{p}''$ der Restekörper hat einen Grad $\geq m$. (Dies letztere folgt daraus, daß eine algebraische Körpererweiterung $K \subseteq L$ höchstens so viele K-Automorphismen besitzt wie der Grad der separablen Hülle von K in L angibt.) Mit Lemma (4.5) erhalten wir: $B''_{\mathfrak{p}''}$ ist endlich und unverzweigt über $B'_{\mathfrak{p}'}$, und der Grad von $B''/\mathfrak{p}''$ über $B'/\mathfrak{p}'$ ist genau m . Damit ist $B''/\mathfrak{p}''$ galoissch über $B'/\mathfrak{p}'$ mit Galoisgruppe G'/G'' . Zu zeigen bleibt noch, daß $B''_{\mathfrak{p}''}$ frei über $B'_{\mathfrak{p}'}$ ist. Seien $\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_m$ die Elemente von G'/G'' . Wegen $B''/\mathfrak{p}'B'' = B''/\mathfrak{p}''$ ist die symmetrische Bilinearform $B''_{\mathfrak{p}''} \times B''_{\mathfrak{p}''} \xrightarrow{\Phi} B'_{\mathfrak{p}'}$, $(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{m} \bar{\sigma}_i(xy)$ modulo $\mathfrak{p}'$ die Spurform und vermittelt somit modulo $\mathfrak{p}'$ eine Dualität. Dann gilt dies auch für Φ selbst, und $B''_{\mathfrak{p}''}$ ist frei über $B'_{\mathfrak{p}'}$ vom Rang $m = [B''/\mathfrak{p}'' : B'/\mathfrak{p}']$ nach (11.5).

Zu (4). Nach Lemma (20.3) gilt (4), wenn $B^G = (B^G)_{\mathfrak{q}}$ henselsch ist. Wir führen den allgemeinen Fall darauf zurück. Sei $C := B^G$ beliebig und C^h die Henselisierung von C . Es ist C^h eine henselsche lokale treuflache Erweiterung von C mit $C^h/\mathfrak{m}_C C^h = C^h/\mathfrak{m}_{C^h}$, vgl. (7.5). (Ist C noethersch, so könnte man an dieser Stelle für C^h auch die Komplettierung $\hat{C}$ von C benutzen.) G operiert auf $C^h \otimes_C B$ mit Fixring C^h , vgl. (19.2). Die maximalen Ideale in $C^h \otimes_C B$ entsprechen umkehrbar eindeutig denjenigen in B . Sei $\tilde{\mathfrak{p}} \subseteq C^h \otimes_C B$ dasjenige mit $\tilde{\mathfrak{p}} \cap B = \mathfrak{p}$. Es ist $G_Z(\tilde{\mathfrak{p}}) = G_Z(\mathfrak{p})$. Nach (19.2) ist deshalb wieder $(C^h \otimes_C B)^{G_Z(\tilde{\mathfrak{p}})} = C^h \otimes_C B^{G_Z(\tilde{\mathfrak{p}})} = C^h \otimes_C B'$. Ferner ist $\tilde{\mathfrak{p}}' := \tilde{\mathfrak{p}} \cap (C^h \otimes_C B')$ dasjenige Primideal in $C^h \otimes_C B'$ mit $\tilde{\mathfrak{p}}' \cap B' = \mathfrak{p}'$. Nach (20.3) ist $C^h \longrightarrow (C^h \otimes_C B')_{\tilde{\mathfrak{p}}'}$ bijektiv. Da die Erweiterung $B'_{\mathfrak{p}'} \longrightarrow (C^h \otimes_C B')_{\tilde{\mathfrak{p}}'}$ treuflach ist und auch die Erweiterung $C \longrightarrow C^h$, ist auch $C \longrightarrow B'_{\mathfrak{p}'}$ treuflach. Da C^h und C überdies denselben Restekörper haben, gilt dies notwendigerweise auch für C und $B'_{\mathfrak{p}'}$. Ferner ist $\mathfrak{m}_C B'_{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{m}_C (C^h \otimes_C B')_{\tilde{\mathfrak{p}}'} \cap B'_{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{p}' B'_{\mathfrak{p}'}$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $B'_{\mathfrak{p}'}$ Lokalisierung einer endlichen C-Algebra ist. Seien dazu $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ die von $\mathfrak{p}'$ verschiedenen max. Ideale von B' und $x \in B'$ ein Element mit $x \equiv 1$ modulo $\mathfrak{p}'$ und $x \equiv 0$ modulo $\mathfrak{p}'_i$, $i = 1,\dots,s$. In $\bar{B} := C[x]$ ist $\bar{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}' \cap \bar{B}$ ein Primideal, über dem in B' nur das Primideal $\mathfrak{p}'$ liegt. Deshalb ist $B'_{\mathfrak{p}'} = B'_{\bar{\mathfrak{p}}}$. Ebenso liegt über $\tilde{\bar{\mathfrak{p}}} := \tilde{\mathfrak{p}}' \cap (C^h \otimes_C \bar{B})$ nur das Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}'$, so daß $(C^h \otimes_C B')_{\tilde{\mathfrak{p}}'} = (C^h \otimes_C B')_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}}$ ist. Es ist $(C^h \otimes_C \bar{B})_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}} \longrightarrow (C^h \otimes_C B')_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}}$ sicherlich surjektiv, aber auch injektiv, da $\bar{B} \longrightarrow B'$ injektiv ist und C^h flach über C ist. Also ist $(C^h \otimes_C \bar{B})_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}} \longrightarrow (C^h \otimes_C B')_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}}$ bijektiv. Nun ist offenbar

$$(C^h \otimes_C B')_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}} = B'_{\bar{\mathfrak{p}}} \otimes_{\bar{B}_{\bar{\mathfrak{p}}}} (C^h \otimes_C \bar{B})_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}} ,$$

so daß die Erweiterung $(C^h \otimes_C \bar{B})_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}} \longrightarrow (C^h \otimes_C B')_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}}$ durch Tensorieren mit der treuflachen Erweiterung $\bar{B}_{\bar{\mathfrak{p}}} \longrightarrow (C^h \otimes_C \bar{B})_{\tilde{\bar{\mathfrak{p}}}}$ aus $\bar{B}_{\bar{\mathfrak{p}}} \longrightarrow B'_{\bar{\mathfrak{p}}}$ entsteht. Mit der ersten ist deshalb auch die letzte eine Isomorphie.

(20.5) Korollar. Die endliche Gruppe G operiere auf B . Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq B$ mit $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap B^G$ sei $G_T(\mathfrak{p}) = \{1\}$. Dann ist $B_{\mathfrak{p}}$ lokal etale über $(B^G)_{\mathfrak{q}}$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von (20.4) ist $B''_{\mathfrak{p}''} = B_{\mathfrak{p}}$ und $B''_{\mathfrak{p}''}$ ist Komposition der beiden lokal etale Erweiterungen $(B^G)_{\mathfrak{q}} \longrightarrow B'_{\mathfrak{p}'} \longrightarrow B''_{\mathfrak{p}''}$.

Bemerkung. In der Situation des Korollars (20.5) kann $B_{\mathfrak{p}}$ auch bei treuer Operation von G lokal etale sein, ohne daß $G_T(\mathfrak{p}) = \{1\}$ ist. Beispielsweise gilt das für die maximalen Ideale der Algebra $B = A^n$, $n \geq 3$, wo A ein lokaler Ring ist und die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durch Vertauschen der Komponenten operiert. Man vergleiche aber Satz (21.7).

§21. Galoiserweiterungen

Bei der Definition und Charakterisierung der Galoiserweiterungen von Ringen folgen wir Teichmüller und Auslander/Goldman [3] .

Definition. Die endliche Gruppe G der Ordnung n operiere auf dem Ring B als Gruppe von Ring-Automorphismen. (Vgl. Beginn von §19.) G operiert <u>galoissch</u> auf B , wenn B unverzweigt und projektiv vom Rang n über dem Fixring B^G ist. Eine Ringerweiterung $A \subseteq B$ heißt <u>Galoiserweiterung</u>, wenn es eine galoissch operierende Gruppe G auf B gibt mit $B^G = A$.

G operiere galoissch auf B . Wir haben bei der Definition nicht verlangt, daß G treu auf B operiert.

Wir werden später sehen, daß G notwendig treu operiert.

Einfache Beispiele für galoissch operierende Gruppen sind aus der Körpertheorie bekannt: Jede endliche Automorphismengruppe eines Körpers operiert galoissch; Satz von E. Artin.

<u>(21.1)Grundringerweiterung</u>. Sei B eine A-Algebra und G eine endliche Gruppe, die auf B als Gruppe von A-Algebra-Automorphismen operiert. Ferner sei $A \longrightarrow A'$ ein Homomorphismus von Ringen.

Operiert G galoissch und ist $A \longrightarrow A'$ flach, so operiert G galoissch auf $A' \otimes_A B$ mit Fixring $(A' \otimes_A B)^G = A' \otimes_A (B^G)$. Umgekehrt: Operiert G galoissch auf $A' \otimes_A B$ und ist $A \longrightarrow A'$ treuflach, so operiert G galoissch auf B .

<u>Beweis</u>. Sei n die Ordnung von G . In beiden Teilaussagen ist $A \longrightarrow A'$ flach, so daß wir statt $(A' \otimes_A B)^G \longrightarrow A' \otimes_A B$ die nach (19.2) äquivalente Erweiterung $A' \otimes_A B^G \longrightarrow A' \otimes_A B$ betrachten können. $A' \otimes_A B = (A' \otimes_A B^G) \otimes_{B^G} B$ entsteht aus der B^G-Algebra B durch Erweitern mit der B^G-Algebra $A' \otimes_A B^G$.

Operiert daher G galoissch auf B , so bleiben die Eigenschaften "unverzweigt" und "projektiv vom Rang n" von B über B^G nach (2.5) bzw. (8.1) beim Tensorieren mit der B^G-Algebra $A' \otimes_A B^G$ erhalten. Folglich operiert G galoissch auf $A' \otimes_A B$. Dieser Teil der Aussage (21.1) ist übrigens auch ohne die Flachheitsvoraussetzung richtig, wie wir weiter unten sehen werden: (21.8).

Umgekehrt operiere G galoissch auf B , und $A \longrightarrow A'$ sei treuflach. Dann ist zunächst $A' \otimes_A B^G$ nicht nur flach, sondern sogar treuflach über B^G . Nach dem zweiten Teil von (2.5) ist dann mit $A' \otimes_A B$ über $A' \otimes_A B^G$ auch B über B^G unverzweigt. Projektivität und Rang kann man ebenfalls erschließen (vgl. die Zitate zu Beginn von §8).

(21.2) Lemma. Die Gruppe G operiere galoissch auf dem Ring B. Dann läßt sich das charakteristische Polynom eines Elementes $x \in B$ über B^G wie folgt berechnen:

$$\chi_x = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma x) \in B^G[X] .$$

Insbesondere gilt für Spur und Norm:

$$\mathrm{Sp}\; x = \sum_{\sigma \in G} \sigma x \quad , \quad N\; x = \prod_{\sigma \in G} \sigma x$$

Beweis. Sei $A := B^G$. Die Polynome $\prod_{\sigma \in G} (X - \sigma x)$ und χ_x gehen bei Grundringerweiterung $A \longrightarrow A'$ koeffizientenweise in die entsprechend zu $1 \otimes x \in A' \otimes_A B$ gebildeten Polynome über. Sie sind deshalb gleich, wenn sie über allen Lokalisierungen von A nach maximalen Idealen gleich sind. Wir dürfen daher wegen (21.1) annehmen, daß A lokal ist. Es gibt eine treuflache Erweiterung von A durch einen lokalen Ring mit unendlichem Restekörper. Wegen (21.1) dürfen wir somit auch annehmen, daß der Restekörper $A/\mathfrak{m}_A$ unendlich ist.

Da B unverzweigt und frei über $A = B^G$ ist und da A einen unendlichen Restekörper hat, gibt es nach Lemma (4.3) ein normiertes Polynom $\alpha \in A[X]$ mit $B = A[X]/\alpha A[X]$. Der Grad von α stimmt mit dem Rang von B über A überein, das ist $n = \mathrm{ord}\; G$. Sei z ein Element von B mit $B = A[z]$ und $\alpha(z) = 0$. Dann ist $1, \ldots, z^{n-1}$ eine Basis von B , und die Koeffizienten eines normierten Polynoms des Grades n mit Nullstelle z sind durch die Koeffizienten einer Darstellung von z^n in den Basiselementen eindeutig bestimmt. Solche Polynome sind α, χ_z und $\prod_{\sigma \in G} (X - \sigma z)$. Daher ist $\chi_z = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma z)$. Das Element x ist ein Polynom in z , d.h. es gibt ein $P \in A[X]$ mit $x = P(z)$. Nach Lemma (9.1) ist nun

$$\chi_x = \prod_{\sigma \in G} (X - P(\sigma z)) = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma P(z)) = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma x) .$$

Die Zusätze sind klar. -

Lemma (21.2) ist auch unter abgeschwächten Voraussetzungen noch gültig; wir gehen darauf in einem Anhang am Ende des Paragraphen ein.

Lemma (21.2) ist hier vor allem deswegen von Bedeutung, weil sich mittels der Gruppe eine Beschreibung der Spur und damit auch der Diskriminante ergibt.

<u>(21.3) Aussage</u>. Es sei A ein Ring und B ein Erweiterungsring von A , der projektiv vom Rang n über A sei. Die Gruppe $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ der Ordnung n operiere als Gruppe von A-Algebra-Automorphismen auf B . Ferner sei $Sp_A^B = \sum_{\sigma \in G} \sigma$. Für Elemente $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ aus B gilt:

$$\det(Sp(x_i y_j))_{1 \le i,j \le n} = \det(\sigma_k x_i)_{1 \le k,i \le n} \cdot \det(\sigma_k y_j)_{1 \le k,j \le n}.$$

Insbesondere gilt für die Diskriminante bezüglich der Spur:

$$\operatorname{diskr}(x_1, \ldots, x_n) = \det(\sigma_i x_j)^2_{1 \le i,j \le n} .$$

<u>Beweis</u>. Es ist $Sp(x_i x_j) = \sum_{k=1}^n \sigma_k(x_i x_j) = \sum_{k=1}^n \sigma_k(x_i)\sigma_k(y_j)$, woraus sich bereits für die Matrizen $(Sp(x_i y_j)) = {}^t(\sigma_k x_i)(\sigma_k y_j)$ ergibt. -

Wir geben in den nachfolgenden Sätzen eine Reihe von Charakterisierungen der Galoisoperation an.

<u>(21.4) Lokalisierung-Delokalisierung</u>. Sei B eine A-Algebra. Die endliche Gruppe G operiere auf B als Gruppe von A-Algebra-Automorphismen. Dann sind äquivalent:

(1) G operiert galoissch auf B .

(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A operiert G galoissch auf $B_{\mathfrak{p}}$.

<u>Beweis</u>. (2) folgt aus (1) nach (21.1).

Sei umgekehrt (2) erfüllt. Ist $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein Primideal von B^G und $\mathfrak{p} := \tilde{\mathfrak{p}} \cap A$, so ist $B_{\mathfrak{p}}$ galoissch über $(B^G)_{\mathfrak{p}}$; da $(B^G)_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ eine Lokalisierung von $(B^G)_{\mathfrak{p}}$ ist, ist erst recht $B_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ galoissch über $(B^G)_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ nach (21.1). Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $A = B^G$ ist.

Sei n := ord G . Es genügt nun zu zeigen, daß B endlicher Modul über B^G ist. Denn für einen endlichen Modul ist Projektivität vom Rang n eine lokale Eigenschaft. Dasselbe gilt für die Unverzweigtheit.

Sei $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, $\sigma_1 = \mathrm{id}$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von B^G seien $x_1^{\mathfrak{p}}, \ldots, x_n^{\mathfrak{p}} \in B$ so gewählt, daß $x_1^{\mathfrak{p}}/1, \ldots, x_n^{\mathfrak{p}}/1$ eine Basis von $B_{\mathfrak{p}}$ über $(B^G)_{\mathfrak{p}}$ bilden. Nach (21.3) ist

$$\operatorname{diskr}(x_1^{\mathfrak{p}}/1, \ldots, x_n^{\mathfrak{p}}/1) = \det(\sigma_i x_j^{\mathfrak{p}}/1)^2 = \det(\sigma_i x_j^{\mathfrak{p}})^2/1 .$$

Da $B_{\mathfrak{p}}$ über $(B^G)_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt ist, ist die Diskriminante eine Einheit in $B_{\mathfrak{p}}$. Die Determinanten $\det(\sigma_i x_j^{\mathfrak{p}})^2$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek} B^G$, erzeugen daher in jeder Lokalisierung das Einheitsideal. Dann erzeugen sie aber B^G . Es gibt also eine endliche Teilmenge E von Spek B^G derart, daß B^G von den $\det(\sigma_i x_j^{\mathfrak{p}})^2$, $\mathfrak{p} \in E$, erzeugt wird. Wir behaupten nun, daß B von den $x_1^{\mathfrak{p}},\ldots,x_n^{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in E$ erzeugt wird. Das wiedrum kann lokal nachgeprüft werden. Sei also $\mathfrak{q} \in$ Spek B^G vorgegeben. Es gibt dann ein $\mathfrak{p} \in E$ mit $\det(\sigma_i x_j^{\mathfrak{p}})^2 \notin \mathfrak{q}$. Dann ist nach (21.3) $\mathrm{diskr}(x_1^{\mathfrak{p}}/1,\ldots,x_n^{\mathfrak{p}}/1)$ in $B_{\mathfrak{q}}$ eine Einheit. Das Gramsche Kriterium (11.4) zeigt nun, daß $B_{\mathfrak{q}}$ von den $x_1^{\mathfrak{p}},\ldots,x_n^{\mathfrak{p}}$ erzeugt wird. Das beendet den Beweis. -

Die nächste Charakterisierung von Galoisoperationen benutzt verschränkte Gruppenringe. Sei B ein Ring und G eine Gruppe, die auf B als Gruppe von Ringautomorphismen operiert. Der verschränkte Gruppenring $B[G]$ ist dann der freie B-Modul mit der Basis e_σ , $\sigma \in G$, in dem man eine Multiplikation durch

$$(xe_\sigma)(ye_\tau) := x\,\sigma(y)e_{\sigma\tau}\ , \quad \sigma,\tau \in G\ , \quad x,y \in B$$

definiert und distributiv auf den ganzen Modul erweitert. Operiert G trivial auf B , so ist $B[G]$ der gewöhnliche Gruppenring von G mit Koeffizienten in B .

B läßt sich vermittels der Einbettung $x \longmapsto xe_\varepsilon$, wobei ε das neutrale Element von G ist, als Unterring von $B[G]$ auffassen. Jedoch ist $B[G]$ i.a. keine B-Algebra, vielmehr ist der Durchschnitt von B mit dem Zentrum von $B[G]$ gerade der Invariantenring B^G , wie man unmittelbar sieht.

Sei B^G eine Algebra über dem Ring A . Dann ist,wie wir gerade sahen, auch $B[G]$ eine A-Algebra. Ferner gibt es eine kanonische Abbildung

$$\lambda : B[G] \longrightarrow \mathrm{End}_A B\ ,$$

die xe_σ auf $y \longmapsto x\,\sigma y$ abbildet, $\sigma \in G$, $x \in B$, und dadurch als additive Abbildung auf $B[G]$ festgelegt ist. Offensichtlich ist λ sogar A-linear. Wir behaupten nun, daß λ sogar ein A-Algebra-Homomorphismus ist. Zum Beweis braucht wegen der A-Linearität nur noch die Multiplikativität auf Elementen der Form xe_σ , ye_τ mit $x,y \in B$, $\sigma,\tau \in G$ nachgeprüft zu werden. Sei $z \in B$. Dann ist einerseits $\lambda(xe_\sigma ye_\tau)(z) = \lambda(x\,\sigma(y)e_{\sigma\tau})(z) = x\sigma(y)\sigma\tau z$ und andererseits $\lambda(xe_\sigma)\lambda(ye_\tau)(z) = \lambda(xe_\sigma)(y\tau z) = x\,\sigma(y\tau z) = x\,\sigma(y)\sigma\tau z$, woraus sich $\lambda(xe_\sigma ye_\tau) = \lambda(xe_\sigma)\lambda(ye_\tau)$ wie gewünscht ergibt. Schließlich ist λ sogar ein Homomorphismus von B-Moduln, wenn man die B-Modulstruktur auf $\mathrm{End}_A B$ des Multiplizierens auf Werten heranzieht.

Sei $A \longrightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist $A' \otimes_A B[G]$ nichts anderes als $(A' \otimes_A B)[G]$. Offenbar ist die Komposition von $A' \otimes \lambda$ mit der kanonischen Abbildung ψ von $A' \otimes_A \mathrm{End}_A B$ in $\mathrm{End}_{A'}(A' \otimes_A B)$ gerade die kanonische Abbildung von $(A' \otimes_A B)[G]$ in $\mathrm{End}_{A'}(A' \otimes_A B)$. Ist ψ bijektiv, was beispielsweise der Fall ist, wenn B von endlicher Darstellung über A ist oder wenn B endlich über A ist und A' durch Nenneraufnahme mit Nichtnullteilern aus A hervorgeht, so kann man also sagen, daß λ mit Grundringerweiterung verträglich ist.

So viel Struktur auf $B[G]$ und λ muß Bedeutung haben:

<u>(21.5) Satz</u>. Die Gruppe G der Ordnung n operiere auf dem Ring B . Dann sind äquivalent:

(1) G operiert galoissch auf B .

(3) B ist ein endlicher projektiver B^G-Modul, und $\lambda : B[G] \longrightarrow \mathrm{End}_{B^G} B$ ist bijektiv.

<u>(21.6) Zusatz</u>. Sei A ein Unterring von B , und die Gruppe G der Ordnung n operiere auf B als Gruppe von A-Algebra-Homomorphismen. Eine der beiden folgenden Bedingungen sei erfüllt:

(3') B ist endlicher projektiver A-Modul, und die Abbildung $\lambda' : B[G] \longrightarrow \mathrm{End}_A B$ ist bijektiv.

(4) B ist unverzweigt und projektiv vom Rang n über A , und es ist $Sp_A^B = \sum_{\sigma \in G} \sigma$.

Dann ist $A = B^G$, und G operiert galoissch auf B .

<u>Beweis der beiden Sätze</u>. Aus (1) folgt (3). Daß λ bijektiv ist, bedeutet, daß die Elemente von G eine B-Basis im B^G-Endomorphismenring von B bilden. Dies läßt sich wegen (21.1) in allen Lokalisierungen nach Primidealen von B^G nachprüfen. Wir dürfen daher annehmen, daß B^G lokal ist und daß demzufolge B freier B^G-Modul des Ranges n ist.

Sei $x_1,\dots,x_n$ eine Basis von B über B^G und $x_1^*,\dots,x_n^*$ die gewöhnliche Dualbasis dazu in $\mathrm{Hom}_{B^G}(B,B^G)$. Faßt man diesen Dualmodul als Untermodul von $\mathrm{End}_{B^G}(B)$ auf, so ist $x_1^*,\dots,x_n^*$ eine B-Basis von $\mathrm{End}_{B^G}(B)$. Für jedes $\sigma \in G$ gilt $\sigma = \sum_{j=1}^n \sigma(x_j)x_j^*$. Die Elemente $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ von G bilden daher genau dann eine B-Basis von $\mathrm{End}_{B^G}(B)$, wenn $z := \det(\sigma_i x_j)_{1\le i,j\le n}$ eine Einheit in B ist. $z \in B$ ist Einheit genau dann, wenn z^2 Einheit in B ist. Nach (21.2) und (21.3) ist $z^2 = \mathrm{diskr}(x_1,\dots,x_n)$. Dies ist aber eine Einheit (sogar in

B^G) , da B unverzweigt über B^G ist.

Sei nun (3) erfüllt. Wir kommen damit sofort in die Situation von (21.6), indem wir B als B^G-Algebra auffassen.

Sei also (3') für die A-Algebra B erfüllt. Diese Eigenschaft bleibt auch in Lokalisierungen erhalten. Da B endlicher projektiver A-Modul ist, ist (4) auch eine lokale Eigenschaft. Wir dürfen daher annehmen, daß B freier A-Modul eines Ranges r ist. Folglich ist $B[G]$ freier A-Modul des Ranges rn und $\mathrm{End}_A B$ freier A-Modul des Ranges r^2 . Da λ' bijektiv ist, gilt $rn = r^2$. Bei B = O ist unsere Aussage überhaupt trivial. Bei $B \neq O$ ist $r \neq O$ und man kann r = n folgern.

Wir zeigen jetzt zunächst, daß $\sum_{\sigma\in G}\sigma$ die Spur von B über A ist. Sei $x_1,\ldots,x_n$ eine Basis von B über A und $x_1^*,\ldots,x_n^*$ die zugehörige gewöhnliche Dualbasis. Wir fassen den Dualmodul $\mathrm{Hom}_A(B,A)$ als A-Untermodul von $\mathrm{End}_A B$ auf. $\mathrm{End}_A B$ selbst ist ein B-Modul bezüglich des Multiplizierens der Werte von Endomorphismen. Beispielsweise läßt sich unter diesen beiden Konventionen schreiben: $\mathrm{id}_B = \sum_{i=1}^n x_i x_i^*$.

Die Elemente aus G bilden eine B-Basis von $\mathrm{End}_A B$, da λ' surjektiv ist. Es gibt daher Darstellungen $x_i^* = \sum_{\sigma\in G} b_{\sigma i}\sigma$ mit $b_{\sigma i} \in B$. Diese Koeffizienten hängen noch voneinander ab. Um dies nachzuweisen, betrachten wir Elemente $y \in B$ und $x_i^*(y) = \sum_{\sigma\in G} b_{\sigma i}\,\sigma y$ von $A \subseteq B^G$. Für ein beliebiges $\tau\in G$ ist $x_i^*(y) = \tau x_i^*(y)$ und folglich $\sum_{\sigma\in G} b_{\sigma i}\,\sigma y = \sum_{\sigma\in G}\tau(b_{\sigma i})\tau\sigma y$. Da hierin y beliebig war und da die $\sigma\in G$ linear unabhängig über B sind, ergibt sich $\tau b_{\sigma i} = b_{\tau\sigma\, i}$. Setzen wir also $b_i := b_{\varepsilon i}$ für das neutrale Element ε von G , so ist $b_{\tau i} = \tau b_i$ für alle $\tau\in G$, $1 \leq i \leq n$. Nun haben wir

$$\mathrm{id}_B = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{\sigma\in G} \sigma(b_i)\sigma = \sum_{\sigma\in G} (\sum_{i=1}^n x_i\, \sigma b_i)\sigma .$$

Da $\varepsilon = \mathrm{id}_B$ ist, ergibt ein Koeffizientenvergleich $1 = \sum_{i=1}^n x_i b_i$. Dann ist aber für $x \in B$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}_A^B(x) &= \sum_{i=1}^n x_i^*(xx_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma\in G} \sigma(b_i)\, \sigma(xx_i)\\ &= \sum_{\sigma\in G} (\sum_{i=1}^n \sigma(b_i)\, \sigma(x_i))\, \sigma x = \sum_{\sigma\in G} (\sigma \sum_{i=1}^n b_i x_i)\, \sigma x\\ &= \sum_{\sigma\in G} \sigma x ,\end{aligned}$$

woraus $\mathrm{Sp}_A^B = \sum_{\sigma\in G}\sigma$ folgt.

Sei z : $\det(\sigma x_i)_{\sigma\in G, 1\leq i\leq n}$, wobei irgendeine Reihenfolge der $\sigma \in G$ festgelegt sei. Es ist $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i)x_i^*$. Daher ist (σx_i) als Übergangsmatrix von der B-Basis $x_1^*,\ldots,x_n^*$ zu den $\sigma \in G$, die wegen der Bijektivität von λ' eine B-Basis bilden, invertierbar. Folglich ist z und damit auch z^2 eine Einheit in B . Nach (21.3) ist $z^2 \in A$ und $z^2 = \mathrm{diskr}(x_1,\ldots,x_n)$. Offenbar ist z^2 auch Einheit in A . Daher ist B unverzweigt über A .

Zum vollständigen Beweis von (21.5) und (21.6) ist jetzt noch (21.6) unter der Voraussetzung (4) zu beweisen. Die Identität $A = B^G$ braucht wegen (21.1) nur lokal nachgewiesen zu werden. Ebensolches gilt wegen (21.4) für die Galoisoperation. Da sich auch (4) lokalisieren läßt, dürfen wir von nun an annehmen, daß A lokal ist. Sei $x_1,\ldots,x_n$ eine A-Basis von B . Die Betrachtung von $\det(\sigma x_i)^2 = \mathrm{diskr}(x_1,\ldots,x_n)$ zeigt wegen der Unverzweigtheit von B über A , daß (σx_i) eine invertierbare $(n\times n)$-Matrix ist. Da $x_1^*,\ldots,x_n^*$ eine B-Basis von $\mathrm{End}_A B$ ist, folgt nun aus $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i)x_i^*$, daß auch die $\sigma\in G$ eine B-Basis von $\mathrm{End}_A B$ bilden. Folglich ist der B-Homomorphismus und A-Algebra-Homomorphismus λ' von $B[G]$ in $\mathrm{End}_A B$ bijektiv! Das Zentrum von $B[G]$ wird bijektiv auf das Zentrum von $\mathrm{End}_A B$ abgebildet, und das ist einfach A . Daher ist A auch das Zentrum von $B[G]$. Da B^G im Zentrum von $B[G]$ liegt, folgt wegen $A \subseteq B^G$ nun $A = B^G$. Das beendet den Beweis, da ja B unverzweigt und projektiv vom Rang n über A vorausgesetzt war. -

Zur nächsten Charakterisierung der Galoisoperation ziehen wir die Hilbertsche Zerlegungstheorie aus §20 heran.

<u>(21.7) Satz</u>. Die Gruppe G operiere auf dem Ring B als Gruppe von Ring-Automorphismen. Dann sind äquivalent:

(1) G operiert galoissch auf B .

(5) G operiert trägheitslos auf B , d.h. für jedes Primideal $\mathfrak{P}$ von B besteht die Trägheitsgruppe $G_T(\mathfrak{P})$ nur aus der Identität.

Ist Spek B zusammenhängend, d.h. hat B außer 0 und 1 keine idempotenten Elemente, und ist $B \neq 0$, so sind (1) und (5) auch äquivalent zu

(6) G operiert treu auf B , und B ist endlich und unverzweigt über B^G .

Beweis. Sei $n := \operatorname{ord} G$. Aus (1) folgt (5). Zum Beweis betrachten wir ein Primideal $\mathfrak{P}$ in B und $\mathfrak{p} := B^G \cap \mathfrak{P}$. Da B unverzweigt über B^G ist, was beim Lokalisieren mit $(B^G)_{\mathfrak{p}}$ und Übergang zum Restekörper $k := \varkappa(\mathfrak{p})$ erhalten bleibt, ist $K := \varkappa(\mathfrak{P})$ endlich separabel über k . Nach Satz (20.4) ist daher $G_Z(\mathfrak{P})/G_T(\mathfrak{P})$ die Galoisgruppe von K über k . Seien nun $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ die verschiedenen Primideale von B über $\mathfrak{p}$; nach (20.2) ist $r = [G : G_Z(\mathfrak{P})]$. Da $k \otimes_{B^G} B$ unverzweigt und endlich vom Rang n über dem Körper k ist, ist $k \otimes_{B^G} B$ einfach direktes Produkt der Restekörper $K = \varkappa(\mathfrak{P}_1), \dots, \varkappa(\mathfrak{P}_r)$. Da G transitiv auf den $\mathfrak{P}_i$ operiert, sind die $\varkappa(\mathfrak{P}_i)$ äquivalent über k . Daher ist $n = r \cdot \dim_k K$. Es folgt nun, daß $G_Z(\mathfrak{P})$ gerade aus $\dim_k K$ Elementen besteht. Eine echte Quotientengruppe von $G_Z(\mathfrak{P})$ kann dann nicht die Galoisgruppe von K über k sein. Folglich ist $G_T(\mathfrak{P})$ die neutrale Gruppe, was zu zeigen war.

Aus (5) ergibt sich (1) zurück. Wegen (20.1) ist (5) auch lokal über B^G erfüllt. Nach (21.4) dürfen wir deshalb annehmen, daß B^G lokal ist. Wir kürzen ab $A := B^G$.

Sei A' die Henselierung von A (vgl. §7). A' ist eine treuflache Erweiterung von A , ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_{A'} = \mathfrak{m}_A A'$. Sei $B' := A' \otimes_A B$. Nach (21.1) genügt es zu zeigen, daß B' galoissch über A' ist. Nach (21.1) ist $A' = B'^G$.

Sei $\mathfrak{P}'$ ein beliebiges Primideal in B' und $\mathfrak{P}$ das Urbild von $\mathfrak{P}'$ in B . Da $B/\mathfrak{P} \longrightarrow B'/\mathfrak{P}'$ injektiv ist, gilt trivialerweise $G_T(\mathfrak{P}) \supseteq G_T(\mathfrak{P}')$. Daher operiert G auch ohne Trägheit auf B' . (Man beachte, daß dieser Schluß auch bei beliebiger Erweiterung $A \longrightarrow A'$ durchführbar ist.)

Wir dürfen somit jetzt annehmen, daß $A = B^G$ ein Henselscher lokaler Ring ist und daß die Trägheitsgruppen der maximalen Ideale von B trivial sind. (Auf diese kommt es ja auch nur an.) Sei $\mathfrak{P}$ ein maximales Ideal von B und $r := [G : G_Z(\mathfrak{P})]$. Es gibt dann r maximale Ideale $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ in B . Diese sind untereinander konjugiert und somit isomorph. Da B ganz über A ist und da A henselsch ist, ist B nach Satz (7.1) in kanonischer Weise isomorph zum direkten Produkt der A-Algebren $B_{\mathfrak{P}_i}$. Es genügt daher zu zeigen, daß $G_Z(\mathfrak{P})$ galoissch auf $B_{\mathfrak{P}}$ operiert mit Fixring A . Daß A der Fixring von $G_Z(\mathfrak{P})$ ist, folgt aus Hilfssatz (20.3) .

Somit können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß B lokaler Ring ist, daß $A = B^G$ henselsch lokal ist und G ohne Trägheit auf $\mathfrak{m}_B$ operiert. Aus (20.4) folgt nun, daß G galoissch auf B operiert.

(6) ist offenbar eine Abschwächung von (1) und (5), wenn $B \neq 0$ ist. Zum Beweis der Umkehrung machen wir die zusätzliche Voraussetzung, daß Spek B zusammenhängend ist. Wir werden dann (5) aus (6) ableiten. Diesen Beweis entnehmen wir ebenso wie (6) aus [9], X.

Sei $\mu : B \otimes_A B \longrightarrow B$ die Multiplikation und I der Kern von μ. Da B unverzweigt über A ist, zeigt (2.4), daß I direkter Summand des Ringes $B \otimes_A B$ ist. Daher wird I von einem idempotenten Element z erzeugt.

Sei jetzt $\mathfrak{P}$ ein Primideal in B und $\sigma \in G_T(\mathfrak{P})$. Wir betrachten den Automorphismus $id \otimes \sigma$ von $B \otimes_A B$. Wegen $(\sigma - id)(B) \subseteq \mathfrak{P}$ ist $\mu \circ (id \otimes (\sigma - id))$ eine Abbildung von $B \otimes_A B$ in $\mathfrak{P}$. Insbesondere gilt $\mu((id \otimes \sigma)(z) - z) \in \mathfrak{P}$. Wegen $z \in I$ folgt $\mu(id \otimes \sigma)(z) \in \mathfrak{P}$. Der Ringhomomorphismus $\mu \circ (id \otimes \sigma)$ bildet das idempotente Element z auf ein idempotentes Element von B in $\mathfrak{P}$ ab. Nach Voraussetzung über B ist daher $\mu(id \otimes \sigma)(z) = 0$, also $(id \otimes \sigma)(z) \in I$. Da I von z erzeugt wird, ergibt sich $(id \otimes \sigma)(I) \subseteq I$.

Betrachten wir nun ein $x \in B$. Es ist $1 \otimes x - x \otimes 1 \in I$, folglich $I \ni (id \otimes \sigma)(1 \otimes x - x \otimes 1) = 1 \otimes \sigma x - x \otimes 1$. Daher ist $0 = \mu(1 \otimes \sigma x - x \otimes 1) = \sigma x - x$. Folglich ist $\sigma = id_B$, und das war zu zeigen. -

Wir haben im Beweis bemerkt, daß die Eigenschaft (5) bei beliebiger Grundringerweiterung erhalten bleibt. Es gilt:

<u>(21.8) Korollar</u>. Sei B eine A-Algebra und G eine endliche Gruppe, die auf B als Gruppe von A-Algebra-Automorphismen operiert. Ferner sei $A \longrightarrow A'$ ein Homomorphismus von Ringen. Operiert G galoissch auf B, so operiert G auch galoissch auf $A' \otimes_A B$. Dabei ist die kanonische Abbildung $A' \otimes_A B^G \longrightarrow (A' \otimes_A B)^G$ bijektiv.

<u>Beweis</u>. Daß G galoissch auf $A' \otimes_A B$ operiert, ist klar. B ist projektiv vom Rang n über B^G, und somit ist B^G ein direkter Summand von B. Folglich ist die Einbettung $A' \otimes_A B^G \longrightarrow A' \otimes_A B$

injektiv, und das Bild dieser Einbettung ist in $(A' \otimes_A B)^G$ enthalten. Da G galoissch auf $A' \otimes_A B$ operiert, ist dieser Ring auch projektiv vom Rang n über $(A' \otimes_A B)^G$. Beim Lokalisieren nach den maximalen Idealen von $A' \otimes_A B^G$, (wobei) "projektiv" in "frei" übergeht, zeigt eine einfache Rangüberlegung, daß $A' \otimes_A B^G \longrightarrow (A' \otimes_A B)^G$ bijektiv ist.

(21.9) Korollar. Sind $B_1, \dots, B_r$ Galoiserweiterungen von A bezüglich der Gruppen $G_1, \dots, G_r$, so ist $B_1 \otimes_A \dots \otimes_A B_r$ eine Galoiserweiterung von A bezüglich der Gruppe $G_1 \times \dots \times G_r$ mit der kanonischen Operation.

Beweis. Ohne Beschränkung sei $r = 2$. Es ist $B_1 \otimes_A B_2$ unverzweigt und projektiv mit einem Rang, der gleich ist der Ordnung von $G_1 \times G_2$ ist. Nach (21.8) ist der Fixring unter $1 \times G_2$ gleich $B_1 \otimes_A A = B_1$. Deshalb ist A Fixring unter $G_1 \times G_2$.-

Aus der Äquivalenz von (1) und (5) folgt auch sofort:

(21.10) Korollar. Die endliche Gruppe G operiere galoissch auf dem Ring $B \neq 0$. Dann operiert G treu auf B .

Naheliegend ist noch:

(21.11) Korollar. Die endliche Gruppe G operiere galoissch auf dem Ring B , und H sei eine Untergruppe von G . Dann operiert auch H galoissch auf B , und B^H ist unverzweigt und projektiv vom Rang $[G : H]$ über B^G . Ist H Normalteiler von G , so operiert G/H galoissch auf B^H .

Beweis. Mit G operiert erst recht H trägheitslos auf B ; (21.7) zeigt so, daß H galoissch auf B operiert. Da B endlich projektiv über B^H ist, ist B^H direkter Summand von B . (Beweis: B/B^H ist von endlicher Darstellung über B^H und lokal frei, denn die Aussage ist im lokalen trivial.) Folglich ist B^H endlicher projektiver B^G-Modul. Die übrigen Eigenschaften von B^H über B^G lassen sich lokal in B^G testen. Sei deshalb jetzt B^G lokal. Dann sind B und B^H semilokal. B ist dann freier B^H-Modul vom Rang ord H . Es folgt, daß B^H freier B^G-Modul vom Rang $[G : H]$ ist. Wie im 3. Absatz des Beweises von (12.8) sieht man leicht, daß B^H unverzweigt über B^G ist. (Zum Vergleich: $A := B^G$, $C := B^H$.) Ist H Normalteiler von G , so operiert G/H auf B^H, besitzt die Ordnung $[G : H]$, hat den Fixring $(B^H)^{G/H} = B^G$ und operiert deswegen galoissch auf B^H .

<u>Anhang</u>. Wir knüpfen an Lemma (21.2) an. Die endliche Gruppe G der Ordnung n operiere auf dem Ring B als Gruppe von Ring-Automorphismen. Wir treffen die Voraussetzung, daß B ein B^G-Modul desselben Ranges n ist. In jedem $x \in B$ ist dann das charakteristische Polynom χ_x über B^G definiert, nämlich das charakteristische Polynom zur Multiplikation h_x mit $x \in B$. (Vgl. §10) Wir sagen, die <u>Formel $\mathfrak{f}$</u> gelte (für B über B^G), wenn für jedes $x \in B$ gilt:

$$\chi_x = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma x) \ .$$

Formel $\mathfrak{f}$ gilt, wenn G galoissch operiert: (21.2), aber auch noch in vielen anderen Fällen, worauf wir im folgenden eingehen.

<u>Vorbemerkungen</u>. Wir beginnen mit einigen Hilfsüberlegungen einfacherer Art, die wir später ohne nähere Kennzeichnung zitieren.

Sei $A := B^G$. Sei $\varphi_i : A \longrightarrow A_i$, $i \in I$, eine Familie flacher Ringhomomorphismen mit $\bigcap_{i \in I} \operatorname{Kern} \varphi_i = 0$. Gilt $\mathfrak{f}$ für alle $A_i \otimes_A B$, so auch für B. Der Beweis ist klar nach (21.1) und (10.1).

Hiernach darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit bei der Untersuchung, ob $\mathfrak{f}$ gilt, Nenneraufnahme mit Nichtnullteilern ausführen. Daraus folgt insbesondere, indem man zum totalen Quotientenring von B^G übergeht, daß man B gleich als projektiven B^G-Modul vom Rang n = ord G annehmen kann.

Außerdem darf man nach genügend vielen Primidealen lokalisieren. Daher kann man stets annehmen, daß B^G lokal und B freier B^G-Modul vom Rang n ist.

Eine Folgerung aus $\mathfrak{f}$ ist die Formel $\mathfrak{f}'$, womit bezeichnet sei, daß für jedes $x \in B$ gilt:

$$\det h_x = \prod_{\sigma \in G} \sigma x \ .$$

Ist X eine Unbestimmte über B, $x \in B$ und $H_x := X \cdot id_{B[X]} - B^G[X] \otimes h_x = h_{X-x}$ das Multiplizieren mit X-x in B[X], so ist $\chi_x = \det h_{X-x}$. Andererseits ist $\prod_{\sigma \in G} \sigma(X-x) = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma x)$. Also: Gilt $\mathfrak{f}'$ für B[X], so gilt $\mathfrak{f}$ für B. Man beachte nun, daß X-x Nichtnullteiler in B[X] ist. Da $\det h_{X-x}$ somit Nichtnullteiler in $B[X]^G = B^G[X]$ ist, denn wir können ja voraussetzen, daß B frei über B^G ist, so können wir Nenneraufnahme mit Nichtnullteilern von $B^G[X]$ betreiben und erreichen, daß $X-x$ sogar Einheit ist. Als $\mathfrak{f}''$ bezeichnen wir $\mathfrak{f}'$, eingeschränkt auf Einheiten aus B. Um $\mathfrak{f}$ in einer Kategorie von Ringen zu erhalten, die abgeschlossen in Bezug auf Polynomerweiterungen und Nenneraufnahme ist, genügt es also, $\mathfrak{f}''$ zu zeigen.

Nun zu einigen Ergebnissen.

(21.12) Satz. Formel $\mathfrak{f}$ gilt für B, falls B^G reduziert ist.

Beweis. Die Lokalisierungen nach den minimalen Primidealen von B^G sind Körper, die flach über B^G sind; der Durchschnitt der Kerne der Abbildungen in sie ist nach der Voraussetzung über B^G das Nullideal. Wir dürfen also annehmen, daß B^G ein Körper ist. Nach den Vorbemerkungen ist klar, daß nur $\mathfrak{f}''$ verifiziert zu werden braucht. Wie im Beweis zu (3.1) setzt man sich zudem durch eine endliche Körpererweiterung in die Lage vorauszusetzen, daß alle Restekörper von B kanonisch isomorph zum Körper $k := B^G$ sind.

Nehmen wir nun einmal an, daß B lokal ist. Sei $x \in B$ Einheit. Dann ist $x = a + y$ mit $a \in k$, $y \in \mathfrak{m}_B$. Da y nilpotent ist, ist $\det h_x = a^n$. Andererseits ist $\prod_{\sigma \in G} \sigma(a+y) = \prod_{\sigma \in G}(a+\sigma y) = a^n + z$ mit $z \in \mathfrak{m}_B$. Wegen $z \in \mathfrak{m}_B \cap A = 0$ ist aber $z = 0$.

Im allgemeinen ist B nicht lokal. Dann zerfällt die k-Algebra B aber in das direkte Produkt ihrer Lokalisierungen B_i. Mit (20.3) und dem folgenden Hilfssatz wird das Problem auf den bereits bekannten lokalen Fall reduziert.

(21.13) Hilfssatz. Sei $A := B^G$ lokal. $\mathfrak{M}_1,\ldots,\mathfrak{M}_r$ seien die maximalen Ideale von B und $B_i := B_{\mathfrak{M}_i}$ die Lokalisierungen danach. Die kanonische Abbildung von B in $\prod_{i=1}^{r} B_i$ sei bijektiv. Gilt Formel $\mathfrak{f}'$ bzw. $\mathfrak{f}''$ für alle B_i, so auch für B.

Beweis. Wir verwenden Hilfssatz (20.3) und die im Beweis dazu angegebenen Bezeichnungen. Ein $x \in B$ läßt sich als Produkt von Elementen schreiben, die je höchstens in einem der B_i von 1 verschieden sind. Beide Seiten der zu zeigenden Formel sind multiplikativ in x. Sei daher jetzt $\mathfrak{M}$ eines der $\mathfrak{M}_i$ und x höchstens in $B_{\mathfrak{M}}$ von 1 verschieden.

Sei $G' := G_Z(\mathfrak{M})$. Da alle B_i untereinander isomorph sind, und da $A \longrightarrow (B_{\mathfrak{M}})^{G'}$ nach (20.3) bijektiv ist, ist $B_{\mathfrak{M}}$ frei vom Rang $\mathfrak{m} := \operatorname{ord} G/r = \operatorname{ord} G'$. Offenbar identifiziert sich $\det h_x$ in natürlicher Weise mit $\det h_{x/1}$ in $(B_{\mathfrak{m}})^{G'}$. Andererseits ist $\prod_{\sigma \in G} \sigma x$ - wie man durch Zerlegung von G in Nebenklassen bezüglich G' sieht- im Produkt der B_i das Element, das in jeder Komponente dasjenige Element von A ist, das in $(B_{\mathfrak{m}})^{G'}$ mit $\prod_{\tau \in G'} \tau(x/1)$ übereinstimmt.

<u>(21.14) Satz</u>. Formel $\mathfrak{f}$ gilt für B , falls $n = \operatorname{ord} G$ Nichtnullteiler in B^G ist.

<u>Beweis</u>. Nach den Vorbemerkungen ist klar, daß wir annehmen dürfen, daß n eine Einheit in $A := B^G$ ist und daß B ein freier A-Modul des Ranges n ist. Ferner brauchen wir nur $\mathfrak{f}''$ zu verifizieren. Sei x also eine Einheit in B .

Sei $\mathfrak{a}$ das Ideal der nilpotenten Elemente in A und $A' := A/\mathfrak{a}$. Die kanonische Abbildung $A' \longrightarrow (A' \otimes_A B)^G$ ist bijektiv nach (19.2). Die Restklasse von x in $A' \otimes_A B$ ist ebenfalls Einheit. Nach (21.12) gilt daher für $a := \det h_x$ und $b := \prod_{\sigma \in G} \sigma x$, daß $c := a - b \in \mathfrak{a}$ ist.

Man rechnet sich direkt aus, daß h_x und $h_{\sigma x}$ für $\sigma \in G$ dieselbe Determinante haben. Daher ist $a^n = (\det h_x)^n = \prod_{\sigma \in G} \det h_{\sigma x} = \det h_{\prod \sigma x} = b^n$. Weiter ist $a^n = (b+c)^n = b^n + n b^{n-1} c + \ldots$, woraus wegen $a^n = b^n$ eine Relation $0 = c(nb^{n-1} + fc)$ mit einem $f \in A$ folgt. Daraus ergibt sich aber $c = 0$, da nb^{n-1} Einheit in A ist. -

Das Problem, ob $\mathfrak{f}$ allgemein gilt, soll noch reduziert werden. Zunächst kommt man leicht zum noetherschen Fall: Man darf annehmen, daß B frei über B^G mit der Basis $1 = x_1, \ldots, x_n$ ist. Sei $x \in B$ vorgegeben. Es gibt dann eine endliche Teilmenge M von B^G , welche die Strukturkonstanten von B bezüglich $x_1, \ldots, x_n$, die Elemente der Matrizen der $\sigma \in G$ bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ und die Koeffizienten von x bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ enthält. Bei $A_1 := \mathbb{Z}[M] \subseteq B^G$ und $B_1 := A_1 x_1 + \ldots + A_1 x_n$ ist dann $B_1{}^G = A_1$ und $x \in B_1$, und in B_1 läßt sich $\mathfrak{f}$ für x untersuchen.

Man kann dann zum totalen Quotientenring von A_1 übergehen und schließlich auch zu dessen Lokalisierungen nach maximalen Idealen. Das sind aber lokale Ringe der homologischen Kodimension 0 .

Sei also nun B frei vom Rang n über dem lokalen Ring $A := B^G$

mit codh $A = 0$. Wir behaupten nun: Für einen beliebigen Restklassenring A' von A ist der kanonische Homomorphismus $A' \longrightarrow (A' \otimes_A B)^G$ bijektiv. Wir betrachten dazu die kanonische Abbildung $\Phi : B \longrightarrow B^n$ durch $x \longmapsto (x - \sigma x)_{\sigma \in G}$. Ihr Kern ist $B^G = A$, ihr Kokern sei mit Q bezeichnet. Nach Lemma (10.11) folgt nun wegen codh $A = 0$ und $\mathrm{dh}_A\, Q < \infty$, daß Q freier A-Modul ist. Kern und Bild von Φ sind daher abspaltende direkte Summanden. Daher ist auch die tensorierte Sequenz

$$0 \longrightarrow A' = A' \otimes_A B^G \longrightarrow A' \otimes_A B \xrightarrow{A' \otimes \Phi} A' \otimes_A B^n$$

exakt. $A' \otimes \Phi$ ist nichts anderes als die Abbildung $x' \longmapsto (x' - \sigma x')_{\sigma \in G}$ von $A' \otimes_A B$ in $(A' \otimes_A B)^n$. Daher wird A' bijektiv auf $(A' \otimes_A B)^G$ abgebildet.

Da bei dem Problem jeweils nur Identitäten endlich vieler Elemente nachgeprüft zu werden brauchen, zeigt der Krullsche Durchschnittssatz, daß man nur noch $\mathfrak{F}''$ für Ringe des Typs $A/\mathfrak{m}_A^r$ nachzuprüfen braucht. Sei also jetzt A nulldimensional. Sei α ein normiertes Polynom über A , das über $A/\mathfrak{m}_A$ Minimalpolynom eines Körperelementes ist, das algebraisch über $A/\mathfrak{m}_A$ ist; dann gehört dieses Element zum Restekörper des lokalen Ringes $A[X]/\alpha A[X]$, der endlich frei über A ist. In endlich vielen Schritten erhält man so eine treuflache Erweiterung A' von A derart, daß $A' \otimes_A B$ dieselben Restekörper wie A' besitzt. Wegen (21.13) erhält man also $\mathfrak{F}$ allgemein, falls man $\mathfrak{F}''$ zeigen kann für Ringe $B \supseteq B^G = A$, B frei vom Rang $n = \operatorname{ord} G$, A und B lokal mit gleichem Restekörper, A und B Ringe endlicher Länge.

Bei char $A/\mathfrak{m}_A = p > 0$ erhält man dann beispielsweise ein positives Resultat, wenn die p-Sylowgruppe von G Normalteiler ist.

§22. Einbettung in Galoiserweiterungen

In diesem Paragraphen wollen wir endliche unverzweigte Erweiterungen unter geeigneten Voraussetzungen in Galoiserweiterungen einbetten.

Als Beispiel betrachten wir zunächst normale Algebren. Sei A ein normaler Integritätsring und B eine endliche torsionsfreie unverzweigte A-Algebra. Nach (12.7) ist B direktes Produkt von endlich vielen normalen Integritätsringen $B_1,\dots,B_r$, die unverzweigte endliche projektive A-Algebren sind. Seien $L_1,\dots,$ L_r minimale endliche Galoiserweiterungen des Quotientenkörpers K von A , die B_1 bzw...B_r enthalten. Weiter gibt es eine Galoiserweiterung L von K , in die sich die L_i derart einbetten lassen, daß L von den Bildern erzeugt wird.

Sei $\overline{B}_i$ die A-Unteralgebra von L_i , die von den zu B_i konjugierten A-Algebren erzeugt wird. Nach (2.7) ist $\overline{B}_i$ unverzweigt über A . Die von den Bildern der $\overline{B}_i$ in L erzeugte (endliche) A-Unteralgebra sei C . Nach (2.7) ist auch C unverzweigt über A . Ferner ist L der Quotientenkörper von C . Wieder nach (12.7) ist C projektiv (und normal) über A . Die Galoisgruppe H von L über K operiert auf C mit Fixring A . Ferner enthält H genau $\dim_K L = \mathrm{Rang}_A C$ Elemente. C ist also eine Galoiserweiterung, in die sich alle B_i einbetten lassen. Dann ist $B = B_1 \times \dots \times B_r$ in die Galoiserweiterung C^r von A eingebettet. Daß C^r eine Galoiserweiterung von A ist, zeigen wir in (22.2) unten. Zunächst bemerken wir, daß wir statt der als Kompositum der Galoiserweiterungen $\overline{B}_i$ konstruierten Algebra C auch ihr Tensorprodukt hätten verwenden können. Es gilt nämlich nach (21.9) offensichtlich:

(22.1) Aussage. Seien $B_1,\dots,B_r$ Algebren über dem Ring A , die sich in Galoiserweiterungen $\overline{B}_1$ bzw. ... bzw. $\overline{B}_r$ über A einbetten lassen. Dann läßt sich jedes B_i in die Galoiserweiterung $\overline{B}_1 \otimes_A \dots \otimes_A \overline{B}_r$ von A einbetten.

(22.2) Lemma. Sei C eine Galoiserweiterung von A bezüglich der Gruppe H . Dann ist C^r eine Galoiserweiterung von A bezüglich der Gruppe $H \times Z_r$, wobei Z_r die zyklische Gruppe der Ordnung r ist.

Beweis. Es ist $C^r = C \otimes_A A^r$. Nach (21.9) können wir daher C = A annehmen. Das zyklische Vertauschen der Komponenten von A^r ist aber eine galoissche Operation von Z_r auf A^r mit Fixring A .

(22.3) Korollar. Seien $B_1,\dots,B_r$ Algebren über dem Ring A . Läßt sich jede Algebra B_i in eine (von i abhängige) Galoiserweiterung von A einbetten, so läßt sich auch $B_1 \times \dots \times B_r$ in eine Galoiserweiterung von A einbetten.

Wir haben eingangs bewiesen, um es noch einmal gesondert zu formulieren:

(22.4) Satz. Seien A ein normaler Integritätsring und B eine endliche torsionsfreie unverzweigte A-Algebra. Dann läßt sich B in eine Galoiserweiterung von A einbetten. Ist B nullteilerfrei, so kann diese Galoiserweiterung ebenfalls nullteilerfrei gewählt werden.

Bemerkung. Ist B eine endliche trosionsfreie reduzierte Algebra über dem normalen Ring A, so zeigt der Beweis von (22.4), daß sich B einbetten läßt in eine endliche A-Algebra C mit einem Rang n, auf der eine Gruppe der Ordnung n mit Fixring A operiert.

Mit einer anderen Konstruktion als der für den Beweis von (22.4) benutzten läßt sich allgemeiner folgendes beweisen:

(22.5) Satz (Auslander/Goldman [3], thm. A. 7). Seien A ein Ring und B eine unverzweigte endliche projektive A-Algebra des Ranges $n \geq 1$. Dann läßt sich B in eine Galoiserweiterung von A mit Galoisgruppe $\mathfrak{S}_n$ einbetten.

Beweis. Wir folgen dem Beweis aus [3]. Wir erinnern zunächst an folgendes. Da B über A unverzweigt ist, wird der Kern I der Multiplikationsabbildung $B^e = B \otimes_A B \xrightarrow{\mu} B$ nach (2.4) von einem idempotenten Element e erzeugt. $1 - e$ erzeugt dann das Annullatorideal $\mathrm{Ann}_{B^e} I$. Da I unter der Abbildung $b \otimes c \longmapsto c \otimes b$ invariant ist, gilt dies auch für e und $1 - e$. Nach (12.5) ist ferner Sp_A^B eine Basis des B-Moduls $\mathrm{Hom}_A(B,A)$.

Ist B frei über A und ist $f_1,\dots,f_n$ eine A-Basis von B mit der bezüglich der Spur dualen Basis $f_1',\dots,f_n'$, so ist $\Delta := \sum_{i=1}^n f_i \otimes f_i'$ nach (16.5) ein erzeugendes Element des B^e-Ideals $\mathrm{Ann}_{B^e} I$ mit $\mu(\Delta) = \sum_{i=1}^n f_i f_i' = 1$. Da μ auf $\mathrm{Ann}_{B^e} I$ injektiv ist, folgt aus $\mu(1-e) = 1$ sofort $\Delta = 1 - e$.

Kehren wir zur allgemeinen Situation zurück! Zu jedem r mit $r \leq n$ sei T_r das r-fache Tensorprodukt von B über A. Für $1 \leq i \leq r$ sei $\nu_i : B \longrightarrow T_r$ diejenige Einbettung von B in die A-Algebra T_r, die b auf $1 \otimes \dots \otimes b \otimes \dots \otimes 1$ (b nur an der i-ten Stelle, sonst 1) abbildet. Für $1 \leq i, j \leq r$ sei $\nu_{ij} : B \otimes_A B \longrightarrow T_r$ der A-Algebrahomomorphismus $b \otimes c \longmapsto \nu_i(b)\,\nu_j(c)$. Sodann sei $e_{ij} := \nu_{ij}(e)$ und $\Delta_{ij} = 1 - e_{ij} = \nu_{ij}(\Delta)$. Dies sind idempotente Elemente in T_r, und es ist $e_{ij} = e_{ji}$, $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$,

$e_{ii} = 0$, $\Delta_{ii} = 1$. Das idempotente Element $\prod_{i<j} e_{ij}$ von T_r wollen wir ebenfalls mit e bezeichnen. Bei $i < j$ sei μ_{ij} die Abbildung

$$b_1 \otimes \ldots b_r \longmapsto \ldots b_{i-1} \otimes b_i b_j \otimes \ldots \otimes b_{j-1} \otimes b_{j+1} \ldots$$

von T_r in T_{r-1} . Der Kern von μ_{ij} wird von e_{ij} erzeugt.

Wir beweisen nun zunächst durch Induktion über r , daß das Ideal $(e) = eT_r$ ein projektiver A-Untermodul von T_r des Ranges $(n)_r$ ist, wobei $(n)_r$ als Abkürzung für $n(n-1)\ldots(n-r+1)$ steht. Wegen $T_2/(e) = B^e/I \cong B$ ist der Induktionsbeginn $r = 2$ klar.

Sei nun $r \geqq 3$ und sei die Formel für $r - 1$ bewiesen. Man beachte im folgenden: Sind a,b idempotente Elemente eines Ringes R , so ist $Ra \cap Rb = Rab$. Mit $\mathfrak{T}$ sei das Ideal $(\prod_{i<j<r} e_{ij})$ in T_r bezeichnet. Dann ist $(e) = e_{1r} \ldots e_{r-1,r}\mathfrak{T}$ und

$$(e_{r-1,r}) + e_{1r} \ldots e_{r-2,r}\mathfrak{T} = (e_{r-1,r}) + \mathfrak{T} ,$$

wobei man letzteres modulo $e_{r-1,r}$ sofort sieht. Es folgt $\mathrm{rang}_A(e) = \mathrm{rang}_A(e_{r-1,r}) + \mathrm{rang}_A e_{1r} \ldots e_{r-2,r}\mathfrak{T} - \mathrm{rang}_A((e_{r-1,r})+\mathfrak{T})$. Nach Induktionsvoraussetzung, angewendet auf $(e_{r-1,r}) + \mathfrak{T} / (e_{r-1,r})$, ist $\mathrm{rang}_A((e_{r-1,r}) + \mathfrak{T}) = \mathrm{rang}_A(e_{r-1,r}) + (n)_{r-1}$. Folglich ist

$$\mathrm{rang}_A(e) = \mathrm{rang}_A(e_{1r} \ldots e_{r-2,r}\,\mathfrak{T}) - (n)_{r-1} .$$

So fortfahrend erhält man in r-1 Schritten insgesamt

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}_A(e) &= \mathrm{rang}_A \mathfrak{T} - (r-1)(n)_{r-1} \\ &= n(n)_{r-1} - (r-1)(n)_{r-1} = (n)_r . \end{aligned}$$

(Das die direkten Summanden, mit denen man rechnete, überhaupt einen Rang haben, sieht man bei der Zurückverfolgung der Rechnung.)

Jetzt sei $C := T_n/(1-e)$. Da C als A-Modul isomorph ist zu $(e) = eT_n$, ist C eine projektive A-Algebra vom Rang $(n)_n = n!$. Als Restklassenalgebra von T_n ist C nach (2.7) eine unverzweigte A-Algebra. Die n-te symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$, die wir im folgenden mit G bezeichnen wollen, operiert in natürlicher Weise auf T_n durch

$$\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$$

für $\sigma \in G$, $x_1, \ldots, x_n \in B$. Jedes $\sigma \in G$ permutiert die e_{ij} untereinander. Da $e_{ij} = e_{ji}$ idempotent ist, hat man sodann $\sigma e = e$ und $\sigma(1-e) = 1 - e$. Folglich operiert G in natürlicher Weise auf der Restklassenalgebra C . Diese Operation ist eine Galoisoperation mit Fixring A , wie wir sehen werden.

Für alle i ist $\sigma\nu_i = \nu_{\sigma i}$. Bezeichnet $\pi : T_n \longrightarrow C$ die Restklassenabbildung, so ist auch $\sigma(\pi\ \nu_i) = \pi\ \nu_{\sigma i}$. Wir werden sehen, daß diese Abbildungen injektiv sind und daher B in C einbetten. Schließlich zeigen wir, daß Sp_A^C einfach die Summe der Automorphismen von C ist, die durch Operation von G auf C entstehen. Nach (21.6) operiert G dann galoissch auf C mit Fixring A .

Die beiden Behauptungen über $\pi\nu_i$ und Sp_A^C , deren Beweis noch aussteht, lassen sich lokal beweisen. Wir dürfen also annehmen, daß B die A-Basis $f_1,\ldots,f_n$ hat. Wir verwenden dann die zu Anfang des Beweises getroffenen Bezeichnungen.

Mit $\mathcal{A} = \sum_{\sigma\in G} \operatorname{sign}\sigma\cdot\sigma$ bezeichnen wir den Antisymmetrisierungsoperator auf der A-Algebra T_n . Für einen zerlegbaren Tensor $z_1 \otimes\ldots\otimes z_n$ ist $\mathcal{A}(z_1 \otimes\ldots\otimes z_n) = \det(\nu_i(z_j))_{1\le i,j\le n}$. Bei $i_o < j_o$ ist daher

$$\mu_{i_oj_o}(\mathcal{A}(z_1\otimes\ldots\otimes z_n)) = \det(\mu_{i_oj_o}(\nu_i(z_j))) = 0$$

wegen $\mu_{i_oj_o}(\nu_{i_o}(z_j)) = \mu_{i_oj_o}(\nu_{j_o}(z_j))$. Für alle $z\in T_n$ gilt daher $\mathcal{A}(z)\in\bigcap_{i<j} \operatorname{Kern}\mu_{ij} = \bigcap_{i<j}(e_{ij}) = (e)$.

Sei $f := f_1\otimes\ldots\otimes f_n$ und $f' := f_1'\otimes\ldots\otimes f_n'$. Dann ist $\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f') = \det(\sum_{k=1}^n \nu_i(f_k)\ \nu_j(f_k')) = \det(\nu_{ij}(\Delta)) = \det(\Delta_{ij})$. Wegen $e = e^n$ ist weiter $e\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f') = \det(e\Delta_{ij})$. Bei $i \neq j$, ist e_{ij} Faktor von e , weshalb dann $e\ \Delta_{ij} = 0$ ist. Somit ist $(e\ \Delta_{ij})$ einfach das e-fache der Einheitsmatrix, und wir erhalten $e\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f') = e^n = e$. Wegen $\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f')\in(e)$ ist $(1-e)\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f') = 0$. Es folgt $\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f') = (1-e)\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f') + e\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f') = e$. (Übrigens wird (e) auch von $\mathcal{A}(f)$ und von $\mathcal{A}(f')$ erzeugt; dies sind aber im allgemeinen keine idempotenten Elemente.)

Wir zeigen jetzt, daß $\pi\nu_1$ eine Einbettung von B in C ist. Sei etwa $b\in B$ mit $\pi\nu_1(b) = 0$, also $\nu_1(b)\in(1-e)$. Für jedes $\sigma\in G$ ist dann ebenfalls $\nu_{\sigma(1)}(b) = \sigma\nu_1(b)\in(1-e)$. Folglich ist $\nu_i(b)\in(1-e)$ für alle i . Sei $b = \sum_{j=1}^n a_jf_j$ mit $a_j\in A$. Dann ist $\nu_i(b) = \sum_{j=1}^n a_j\ \nu_i(f_j)$ und die Cramersche Regel liefert $a_j \cdot \det(\nu_i(f_j)) = a_j \mathcal{A}(f) \in (1-e)$. Erst recht ist $a_j e = a_j \mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f') \in (1-e)$, woraus $a_j = 0$ folgt für alle j , was aber $b = 0$ bedeutet. Also ist $\pi\nu_1$ injektiv.

Wir behaupten nun, daß für alle $z \in T_n$ gilt: $\mathcal{A}(z) = Sp_A^{T_n}(z\mathcal{A}(f'))\mathcal{A}(f)$. Da

$$(z_1,\ldots,z_n) \longmapsto \mathcal{A}(z_1 \otimes \ldots \otimes z_n)$$
$$(z_1,\ldots,z_n) \longmapsto Sp_A^{T_n}((z_1 \otimes \ldots \otimes z_n)\mathcal{A}(f'))\mathcal{A}(f)$$

schiefsymmetrisch sind, genügt es, die Behauptung für $z = f$ zu beweisen. Es ist aber

$$\begin{aligned} Sp_A^{T_n}(f\mathcal{A}(f')) &= Sp_A^{T_n}\left(\sum_{\sigma\in G} \operatorname{sign}\sigma \cdot (f_1 f'_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes f_n f'_{\sigma^{-1}(n)})\right) \\ &= \sum_{\sigma\in G} \operatorname{sign}\sigma \cdot Sp_A^B(f_1 f'_{\sigma^{-1}(1)}) \cdot \ldots \cdot Sp_A^B(f_n f'_{\sigma^{-1}(n)}) \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $z\mathcal{A}(f)$ an Stelle von z und anschließendes Multiplizieren mit $\mathcal{A}(f')$ erhalten wir jetzt $\mathcal{A}(z\mathcal{A}(f))\mathcal{A}(f') = Sp_A^{T_n}(ze)e$. Es ist weiter $\operatorname{sign}\sigma \cdot \mathcal{A}(f') = \sigma(\mathcal{A}(f'))$ und daher

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z\mathcal{A}(f))\mathcal{A}(f') &= \sum_{\sigma\in G} \operatorname{sign}\sigma \cdot \sigma(z\mathcal{A}(f)) \cdot \mathcal{A}(f') \\ &= \sum_{\sigma\in G} \sigma(z\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f')) = \sum_{\sigma\in G} \sigma(ze) \ . \end{aligned}$$

Insgesamt ist $Sp_A^{T_n}(ze)e = \sum_{\sigma\in G} \sigma(ze)$. Wegen $Sp_A^C(\pi z) = Sp_A^{T_n}(ze)$ folgt jetzt die Behauptung über Sp_A^C . Der Beweis ist beendet. -

Etwas allgemeiner als (22.5) gilt:

<u>(22.6) Korollar</u>. Seien A ein Ring und B eine unverzweigte endliche treue projektive A-Algebra. Dann läßt sich B in eine Galoiserweiterung von A einbetten.

<u>Beweis</u>. Es genügt nach (22.5) zu zeigen, daß sich B in eine unverzweigte endliche projektive A-Algebra mit Rang ≥ 1 einbetten läßt. Es gibt eine Zerlegung $A = A_1 \times \ldots \times A_r$ derart, daß $B = B_1 \times \ldots \times B_r$ mit projektiven endlichen A_i-Algebren B_i des Ranges $n_i \geq 1$ ist. Sei $n = \operatorname{kgV}(n_1,\ldots,n_r)$ und $m_i := n/n_i$. Dann ist B in die endliche projektive A-Algebra $B' := B_1^{\otimes m_1} \times \ldots \times B_r^{\otimes m_r}$ des Ranges $n \geq 1$ eingebettet. Mit Hilfe von (1.7) und (1.8) sieht man, daß B' unverzweigt über A ist.

KAPITEL V: REINHEIT DES VERZWEIGUNGSORTES

§23. Der Satz von der Reinheit des Verzweigungsortes

Die abstrakt-algebraischen Formulierungen und Beweise des Satzes von der Reinheit des Verzweigungsortes finden sich in einer Reihe von Arbeiten von Zariski, Serre, Auslander/Buchsbaum und Nagata, die in [8] angeführt sind. Wir orientieren uns bei unseren Ausführungen an der später liegenden Arbeit [1] von M. Auslander.

(23.1) Satz. Es seien A,B noethersche lokale Ringe und $\varphi: A \longrightarrow B$ ein lokaler Homomorphismus. Ferner sei vorausgesetzt:

(1) Es ist $\dim A = \dim B$.

(2) φ ist quasi-endlich.

(3) $D_A(B)$ ist endlicher B-Modul.

(4) A ist regulär.

(5) B ist normal und quasi-ungemischt.

Dann besitzt der Verzweigungsort Vzw_A^B keine Komponente der Kodimension $\geqq 2$.

Über die Voraussetzungen sind einige Bemerkungen angebracht. Daß φ quasi-endlich ist, bedeutet, daß $B/\mathfrak{m}_A B$ endlicher A-Modul ist, also sogar ein endlichdimensionaler Vektorraum über $A/\mathfrak{m}_A$. In vielen Fällen (z.B. bei analytischen lokalen Ringen und bei kompletten lokalen Ringen) bedeutet dies bereits, daß B endlicher A-Modul ist. Hierbei ist (3) als Forderung überflüssig. Aber auch die Quasi-Ungemischtheit von B ist dann bereits erfüllt, d.h. alle minimalen Primideale der Komplettierung $\hat{B}$ von B haben dieselbe Dimension. Denn ist B endlich über A , dann ist B Restklassenring einer Lokalisierung eines Polynomringes in endlich vielen Unbestimmten über A , und das ist ein lokaler Macaulayring; Restklassenringe von lokalen Macaulayringen sind aber quasi-ungemischt. (Siehe [8], §34. Wir bringen einen einfachen Beweis im Anhang weiter unten.)

In der Literatur findet man häufig für den Reinheitssatz die folgende Voraussetzung, die den Bedürfnissen der algebraischen Geometrie angemessen ist: A sei regulär lokal, B_o sei der ganzalgebraische Abschluß von A in einem endlichen separablen Erweiterungskörper des Quotientenkörpers von A und B sei die Lokalisierung von B_o nach einem maximalen Ideal. (1) bis (5) ist dann offenbar erfüllt.

Die Namensgebung für den ganzen Problemkreis erklärt sich leicht aus dem folgenden Korollar des Satzes (23.1).

(23.2) Korollar. Die Voraussetzungen seien wie in (23.1). Überdies sei der Quotientenkörper von B unverzweigt über A . Dann ist Vzw_A^B leer oder rein 1-kodimensional.

Daß der Quotientenkörper von B unverzweigt über A ist, bedeutet, daß das Nullideal von B unverzweigt über A ist, anders gesagt, daß B in der Kodimension 0 über A unverzweigt ist. Nach (23.1) kann B dann höchstens noch in der Kodimension 1 über A verzweigt sein. Also ist (23.2) einfach eine Einschränkung von (23.1) auf spezielle Voraussetzungen.

(23.3) Korollar. Die Voraussetzungen seien wie in (23.1). Überdies sei kodim $Vzw_A^B \geq 2$. Dann ist $Vzw_A^B = \emptyset$, d.h. B ist überhaupt unverzweigt über A .

Dies ist ebenfalls eine direkte Folgerung aus (23.1). Vielfach wird der Satz von der Reinheit des Verzweigungsortes in der Form (23.3) formuliert und verwendet. Im geometrischen Kontext kommt man direkt mit (23.3) aus, da man dort ja "in die Umgebung gehen" kann.

Wir wollen zunächst zeigen, daß sich (23.1) relativ leicht aus (23.3) zurückgewinnen läßt.

(23.4) Hilfssatz. Die Voraussetzungen seien wie in (23.1). Dann ist die Komplettierung $\hat{\varphi} : \hat{A} \longrightarrow \hat{B}$ endlich und injektiv. Für jedes Primideal $\mathfrak{R} \subsetneq \hat{B}$ ist $\dim \hat{A}_{\mathfrak{R} \cap \hat{A}} = \dim \hat{B}_{\mathfrak{R}}$. Außerdem ist $D_{\hat{A}}(\hat{B}) = D_A(B)^\wedge = \hat{B} \otimes_B D_A(B)$, also die Komplettierung von $D_A(B)$.

Beweis. φ läßt sich in die Komplettierungen fortsetzen. Nach Voraussetzung ist $B/\mathfrak{m}_A B$ Modul endlicher Länge. Daher ist $B/\mathfrak{m}_A B = \hat{B}/(\mathfrak{m}_A B)\hat{B} = \hat{B}/\mathfrak{m}_A \hat{B}$. Da $\mathfrak{m}_{\hat{A}}$ von $\mathfrak{m}_A$ erzeugt wird, haben wir schließlich, daß $\hat{B}/\mathfrak{m}_{\hat{A}}\hat{B} \cong B/\mathfrak{m}_A B$ endlich über $\hat{A}$ ist. Da $\hat{A}$ komplett ist, ergibt eine einfache Approximation, daß $\hat{B}$ endlicher $\hat{A}$-Modul ist. (Vgl. [8], (30.6).) Dann ist $\hat{B}$ ganz über $\hat{A}$, und es ist insbesondere $\dim \hat{B} = \dim(\hat{A}/\mathrm{Kern}\, \hat{\varphi})$. Lokale Ringe haben dieselbe Krulldimension wie ihre Komplettierungen. Daher erhalten wir jetzt aus $\dim A = \dim B$, daß $\dim(\hat{A}/\mathrm{Kern}\, \hat{\varphi}) = \dim \hat{A}$ ist. Trivialerweise ist $\hat{A}$ wie A regulär, insbesondere nullteilerfrei. Restklassenbildung nach Nichtnullteilern erniedrigt aber die Dimension. Daher ist Kern $\hat{\varphi} = 0$, d.h. wir haben $\hat{A} \subsetneq \hat{B}$.

Sei jetzt $\mathfrak{R}$ ein Primideal in $\hat{B}$. Wir betrachten ein Primideal $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}$ mit $\dim \hat{B}_{\mathfrak{R}} = \dim(\hat{B}_{\mathfrak{R}}/\mathfrak{P}\hat{B}_{\mathfrak{R}})$. $\mathfrak{P}$ ist ein minimales Primideal in $\hat{B}$. Wegen der Quasi-Ungemischtheit von $\hat{B}$ ist $\dim \hat{B}/\mathfrak{P} = \dim \hat{B}$. Da $\hat{A}$ nullteilerfrei ist und da $\hat{B}/\mathfrak{P}$ endlich über $\hat{A}$ ist, ergibt $\dim \hat{A} = \dim(\hat{B}/\mathfrak{P})$, daß auch $\hat{A} \xrightarrow{\hat{\varphi}'} \hat{B}/\mathfrak{P}$ injektiv ist. Man hat also $\mathfrak{P} \cap \hat{A} = 0$, und $\hat{\varphi}'$ ist eine Einbettung, für die das going-up und das going-down-Theorem gelten. ([8], §10.) Folglich ist $\dim \hat{A}_{\mathfrak{R} \cap \hat{A}} = \operatorname{kodim}(\hat{\varphi}')^{-1}(\mathfrak{R}/\mathfrak{P}) = \operatorname{kodim}(\mathfrak{R}/\mathfrak{P})$. Diese Zahl stimmt nach der Wahl von $\mathfrak{P}$ mit kodim $\mathfrak{R}$ in $\hat{B}$ überein, was definitionsgemäß $\dim \hat{B}_{\mathfrak{R}}$ ist.

Betrachten wir schließlich die universelle A-Derivation $d : B \longrightarrow D_A(B)$ von B . Derivationen sind stetige Abbildungen in den ideal-adischen Topologien. Daher läßt sich d zu einer A-Derivation $\hat{d} : \hat{B} \longrightarrow D_A(B)^\wedge$ fortsetzen. Die Elemente von $\hat{A}$ lassen sich durch solche aus A beliebig gut approximieren. Jede Potenz $\mathfrak{m}_{\hat{A}}^{m+1}$ wird von $\hat{d}$ in $\mathfrak{m}_{\hat{A}}^m D_A(B)^\wedge \subseteq \mathfrak{m}_B^m (D_A(B)^\wedge)$ abgebildet; der Durchschnitt über alle diese Moduln ist der Nullmodul, da $D_A(B)^\wedge$ endlicher $\hat{B}$-Modul ist. Ähnlich beweist man $D_A(B)^\wedge = \hat{B}\hat{d}\hat{B}$. Folglich ist $\hat{d}\hat{A} = 0$, und $\hat{d}$ ist auch $\hat{A}$-Derivation. Sei jetzt $\delta : \hat{B} \longrightarrow M$ eine beliebige $\hat{A}$-Derivation von $\hat{B}$ mit Werten in einem endlichen $\hat{B}$-Modul M . Dann ist $\delta|B$ eine A-Derivation von B . Daher gibt es einen B-Homomorphismus $h : D_A(B) \longrightarrow M$ mit $\delta|B = hd$. Als endlicher $\hat{B}$-Modul ist M kompletter B-Modul. Daher läßt sich h zu einem $\hat{B}$-Homomorphismus $\hat{h}$ von $D_A(B)^\wedge$ in M fortsetzen. Die Derivation $\hat{h}\hat{d}$ stimmt auf B mit δ überein. Aus Stetigkeitsgründen hat man dann $\delta = \hat{h}\hat{d}$, da M endlicher $\hat{B}$-Modul ist. Wir haben jetzt bewiesen, daß $\hat{d}$ die universell-endliche $\hat{A}$-Derivation von $\hat{B}$ ist. Da aber $\hat{B}$ endlicher $\hat{A}$-Modul ist, stimmen universell-endliche und universelle $\hat{A}$-Derivation überein. Folglich ist $D_A(B)^\wedge = D_{\hat{A}}(\hat{B})$, was den Beweis beendet.

<u>Reduktion von (23.1) auf (23.3)</u>. Seien A,B Ringe mit den in (23.1) angeführten Eigenschaften. Machen wir die Annahme, daß Vzw_A^B eine Komponente der Kodimension ≥ 2 besitzt, und führen wir dies mittels (23.3) zu einem Widerspruch!

Der Verzweigungsort Vzw_A^B ist der Nullstellenort $V(\vartheta_A^B)$ der Kählerschen Differente ϑ_A^B . Nach unserer Annahme gibt es ein minimales Primideal $\mathfrak{P} \supseteq \vartheta_A^B$ der Kodimension ≥ 2 . Sei $\mathfrak{q}$ ein beliebiges minimales Primideal in $\hat{B}$ mit $\mathfrak{q} \supseteq \vartheta_A^B \hat{B}$ und $\mathfrak{q} \cap B = \mathfrak{p}$. Ferner sei $\mathfrak{q}' := \hat{A} \cap \mathfrak{q}$. Wir werden sehen, daß sich (23.3) auf $\hat{A}_{\mathfrak{q}'} \longrightarrow \hat{B}_{\mathfrak{q}}$ anwenden läßt, und damit einen Widerspruch herbeiführen.

$\hat{A}_{\mathfrak{q}'} \longrightarrow \hat{B}_{\mathfrak{q}}$ ist ein lokaler Homomorphismus noetherscher lokaler Ringe. $\hat{A}_{\mathfrak{q}'}$ ist als Lokalisierung des regulären lokalen Ringes $\hat{A}$ nach Serre's Satz wieder regulär.

Wir verwenden nun die Ergebnisse von (23.4). Da $\hat{B}$ endlich über $\hat{A}$ ist, ist $\mathfrak{q}$ minimales Primideal von $\mathfrak{q}'\hat{B}$. Folglich ist $\hat{A}_{\mathfrak{q}'} \longrightarrow \hat{B}_{\mathfrak{q}}$ quasi-endlich. Der Differentialmodul von $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ bezüglich $\hat{A}_{\mathfrak{q}'}$ ist als Lokalisierung eines endlichen $\hat{B}$-Moduls ein endlicher $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$-Modul. Nach (23.4) ist ferner $\dim \hat{A}_{\mathfrak{q}'} = \dim \hat{B}_{\mathfrak{q}}$. Als endlicher Modul über $\hat{A}$ ist $\hat{B}$ Restklassenring eines (noetherschen) lokalen Macaulayringes. Dann ist natürlich auch $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ Restklassenring eines lokalen Macaulayringes. Erst recht ist $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ quasi-ungemischt.

Da B normal ist, liegt wegen $\operatorname{kodim} \mathfrak{p} \geq 2$ eine Primfolge der Länge 2 in $\mathfrak{p}$. Diese ist dann auch eine Primfolge der Länge 2 in $\hat{B}$, die in $\mathfrak{q}$ enthalten ist. Folglich ist auch $\dim \hat{B}_{\mathfrak{q}} \geq 2$. Offenbar ist $\vartheta_A^B \hat{B}$ das 0-te Fittingideal des $\hat{B}$-Moduls $D_A(B)^\wedge$. Wegen $D_A(B)^\wedge = D_{\hat{A}}(\hat{B})$ ergibt sich somit $\vartheta_A^B \hat{B} = \vartheta_{\hat{A}}^{\hat{B}}$. Da $\mathrm{Vzw}_{\hat{A}}^{\hat{B}} = V(\vartheta_{\hat{A}}^{\hat{B}})$ ist, ist somit zwar $\mathfrak{q}$ verzweigt über $\hat{A}$, aber jedes echt in $\mathfrak{q}$ enthaltene Primideal von $\hat{B}$ ist unverzweigt über $\hat{A}$. Daher besteht der Verzweigungsort von $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ über $\hat{A}_{\mathfrak{q}'}$ nur aus $\mathfrak{q}\hat{B}_{\mathfrak{q}}$. Und dieses Primideal hat eine Kodimension ≥ 2 . Es genügt jetzt zu zeigen, daß $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ normal ist.

Hierzu verwenden wir das Lokalisierungskriterium von Krull. Sei dazu ein Primideal von $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ vorgegeben, das gleich in der Form $\mathfrak{R}\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ mit einem Primideal $\mathfrak{R}$ in $\hat{B}$ angegeben sei, wobei die homologische Kodimension des lokalen Ringes $R := (\hat{B}_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{R}\hat{B}_{\mathfrak{q}}}$ den Wert $\operatorname{codh} R \leq 1$ hat; wir haben zu zeigen, daß R normal ist.

Da wir eine Primfolge der Länge 2 in $\mathfrak{q}$ haben, ist $\operatorname{codh} \hat{B}_{\mathfrak{q}} \geq 2$. Daher ist $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{q}$. Also ist $R = \hat{B}_{\mathfrak{R}}$ unverzweigt über $\hat{A}_{\hat{A} \cap \mathfrak{R}}$. Diese Lokalisierung von $\hat{A}$ ist ebenfalls regulär nach Serre's Satz. Nach (23.4) ist $r := \dim \hat{A}_{\hat{A} \cap \mathfrak{R}} = \dim R$. Wir haben nun wegen der Unverzweigtheit, daß $\mathfrak{m}_R$ vom maximalen Ideal von $\hat{A}_{\hat{A} \cap \mathfrak{R}}$ erzeugt wird, das wegen der Regularität aber ein Erzeugendensystem von r Elementen besitzt; folglich besitzt auch $\mathfrak{m}_R$ ein Erzeugendensystem von $r = \dim R$ Elementen. Also ist R regulär und erst recht normal. Das beendet die Reduktion.

Beweis von (23.3). Die Erweiterung $A \longrightarrow B$ erfülle die Voraussetzungen von (23.3).

Wir komplettieren wieder und können (23.4) anwenden. $\hat{A} \longrightarrow \hat{B}$ ist also endlich und injektiv. Mit Hilfe von (23.4) sieht man ferner, daß $\vartheta_A^B \hat{B} = \vartheta_{\hat{A}}^{\hat{B}}$ ist. Da ϑ_A^B wegen $\mathrm{Vzw}_A^B = V(\vartheta_A^B)$ und der Voraussetzung kodim $\mathrm{Vzw}_A^B \geq 2$ eine Primfolge der Länge 2 enthält, gilt dies auch für $\vartheta_{\hat{A}}^{\hat{B}}$. Wie in dem vorstehenden Reduktionsbeweis sieht man nun, daß $\hat{B}$ normal ist. Ist $\hat{B}$ unverzweigt über $\hat{A}$, so ist $\vartheta_{\hat{A}}^{\hat{B}} = \hat{B}$, woraus $\vartheta_A^B = B$ folgt: B ist dann unverzweigt über A. Es genügt also, den folgenden Satz zu beweisen:

(23.5) Satz. Sei A ein regulärer noetherscher lokaler Ring und B ein normaler endlicher Erweiterungsring von A. Ist codim $\mathrm{Vzw}_A^B \geqslant 2$ in B, so ist B unverzweigt über A.

Anmerkung. Unter den Voraussetzungen des Satzes ist B regulär, d.h. für jedes Primideal $\mathfrak{P}$ von B ist $B_{\mathfrak{P}}$ regulär. Sei nämlich $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{P}$. Da B über A unverzweigt ist, hat man $\mathfrak{P} B_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{p} B_{\mathfrak{P}}$. Also wird das maximale Ideal von $B_{\mathfrak{P}}$ von ebensoviel Elementen erzeugt wie das maximale Ideal von $A_{\mathfrak{p}}$, und diese Zahl ist wegen der Regularität von $A_{\mathfrak{p}}$ gerade $\dim A_{\mathfrak{p}}$. Wegen $\dim A_{\mathfrak{p}} = \dim B_{\mathfrak{P}}$ erweist sich jetzt auch $B_{\mathfrak{P}}$ als regulär.

Beweis von (23.5). Wir führen den Beweis des Satzes nach einer Beweismethode von Auslander aus [1].

K bezeichne den Quotientenkörper von A, L denjenigen von B. Da B endlich über A ist, ist $L = K \otimes_A B$ endlicher Erweiterungskörper von K. Da B in der Kodimension 0 unverzweigt über A ist, ist L unverzweigt über K, d.h. L ist separabel über K.

Sei L' die kleinste L umfassende Galoiserweiterung von K und B' der ganze Abschluß von B in L'. Da $L' : K$ separabel ist, ist B' bekanntlich ein endlicher A-Modul. B' ist ein noetherscher normaler Integritätsring. Wir zeigen nun, daß kodim $\mathrm{Vzw}_A^{B'} \geqslant$ codim $\mathrm{Vzw}_A^B (\geqslant 2)$ ist. (Hierzu wird nur gebraucht, daß A noetherscher normaler Integritätsring ist; wir kommen darauf in (23.6) zurück.)

Sei $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ die Galoisgruppe von L' über K und $C := A[\sigma_1(B), \ldots, \sigma_n(B)]$. Dann ist C eine endliche Erweiterung von A, folglich $A \subseteq B \subseteq C \subseteq B'$. Da B eine Basis von L über K enthält, ist L' auch der Quotientenkörper von C.

Sei nun $\mathfrak{P}' \in \mathrm{Vzw}_{A'}^{B'}$, $\mathfrak{P} := \mathfrak{P}' \cap B$ und $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{P}$. Nach dem going-down Theorem ist $\operatorname{codim} \mathfrak{P}' = \operatorname{codim} \mathfrak{P} = \operatorname{codim} \mathfrak{p}$. Es genügt daher zu zeigen, daß $B_{\mathfrak{p}}$ verzweigt über A ist; denn dann ist $\operatorname{codim} \mathfrak{p} \geq \operatorname{codim} \mathrm{Vzw}_A^B$. Schließlich folgt dann $\operatorname{codim} \mathrm{Vzw}_A^{B'} = \{\min \operatorname{codim} \mathfrak{P}' : \mathfrak{P}' \in \mathrm{Vzw}_A^{B'}\} \geq \operatorname{codim} \mathrm{Vzw}_A^B$.

Machen wir also die Annahme, daß $B_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt über $A_{\mathfrak{p}}$ ist. Dann sind auch die zu $B_{\mathfrak{p}}$ isomorphen $A_{\mathfrak{p}}$-Algebren $\sigma_i(B_{\mathfrak{p}})$ unverzweigt. Nach (2.7) ist weiter das Kompositum $A_{\mathfrak{p}}[\sigma_1(B\ ),\ldots,\sigma_n(B\ )]$ unverzweigt über $A_{\mathfrak{p}}$. Das ist aber die $A_{\mathfrak{p}}$-Algebra $C_{\mathfrak{p}}$. Nach dem Satz von Krull (12.7) ist $C_{\mathfrak{p}}$ normal. Da $C_{\mathfrak{p}}$ endlich über $A_{\mathfrak{p}}$ ist mit Quotientenkörper L' , und da $B'_{\mathfrak{p}}$ die ganze Hülle von $A_{\mathfrak{p}}$ in L' ist, erhalten wir jetzt $C_{\mathfrak{p}} = B'_{\mathfrak{p}}$. Folglich ist $B'_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt über $A_{\mathfrak{p}}$. Da $B'_{\mathfrak{P}'}$ Lokalisierung von $B'_{\mathfrak{p}}$ ist, ist erst recht $B'_{\mathfrak{P}'}$ unverzweigt über $A_{\mathfrak{p}}$. Widerspruch!

Wir dürfen also beim Beweis von (23.5) wegen (12.8) ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß L über K galoissch ist. Sei G die Galoisgruppe von L über K . G operiert auf B , da B der ganze Abschluß von A in L ist. Da A normal ist, und da B ganz über A ist, haben wir $B^G = A$. Sei $n := [L : K] = \operatorname{ord} G = \operatorname{rang}_A B$.

Wir betrachten nun den verschränkten Gruppenring $B[G]$ bezüglich der Operation von G auf B und den kanonischen A-Algebra-Homomorphismus $\lambda : B[G] \longrightarrow \operatorname{End}_A B$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A . Dann ist $\lambda_{\mathfrak{p}}$ nichts anderes als die kanonische Abbildung von $B_{\mathfrak{p}}[G]$ in $\operatorname{End}_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}}$, wie wir in § 21 sahen. Bei $\operatorname{codim} \mathfrak{p} \leq 1$ gibt es nur noch Primideale der Kodimension ≤ 1 in $B_{\mathfrak{p}}$; nach Voraussetzung über die Kodimension von Vzw_A^B ist $B_{\mathfrak{p}}$ dann unverzweigt über $A_{\mathfrak{p}}$; als endlicher torsionsfreier Modul über dem Hauptidealring $A_{\mathfrak{p}}$ ist $B_{\mathfrak{p}}$ freier $A_{\mathfrak{p}}$-Modul des Ranges n ; daher ist $B_{\mathfrak{p}}$ galoissch über $A_{\mathfrak{p}}$, d.h. $\lambda_{\mathfrak{p}}$ ist bijektiv.

Wir benutzen nun einige bekannte Hilfssätze über reflexive Moduln, die wir übrigens im nachfolgenden Paragraphen kurz besprechen werden. Jeder Nichtnullteiler f aus dem maximalen Ideal von A erzeugt in B ein ungemischtes Ideal der Kodimension 1 , da B normal ist. Ist g ein Nichtnullteiler in $\mathfrak{m}_A$, der prim zu f ist, so ist g , da B ganz über A ist, nicht in den minimalen Primidealen von fB enthalten. Folglich ist g prim zu f auch in B. Also ist jede Primfolge der Länge ≤ 2 in A auch eine solche in B ; das heißt aber, daß B reflexiver A-Modul ist. Dann ist auch $B[G] \cong B^n$ reflexiver A-Modul. Schließlich ist auch $\mathrm{End}_A B$ reflexiver A-Modul. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit codim $\mathfrak{p} \leq 1$ in A ist $\lambda_{\mathfrak{p}}$ bijektiv. Der Homomorphismus λ reflexiver A-Moduln ist dann überhaupt bijektiv.

Nun hat sich B als reflexiver Modul über dem regulären lokalen Ring A erwiesen, dergestalt, daß $\mathrm{End}_A B$ als A-Modul isomorph zu einer direkten Summe B^n ist. Nach einem Lemma von Auslander, das wir im nächsten Paragraphen beweisen: (24.5), ist B dann freier A-Modul. Nach Satz (13.7) ist nun B überhaupt unverzweigt über A . -

Damit sind die Sätze (23.1), (23.2), (23.3) und (23.5) über die Reinheit des Verzweigungsortes sämtlich auf das genannte Lemma von Auslander zurückgeführt.

Ein Teil des Beweises von (23.5) läßt sich noch verbessern und ergibt dann das auch an sich interessante Lemma:

<u>(23.6) Lemma</u>. Sei $A \subseteq B$ eine endliche Erweiterung normaler noetherscher Integritätsringe, für die die Erweiterung $K \subseteq L$ der Quotientenkörper separabel ist. Ist L' die kleinste L umfassende Galoiserweiterung von K und B' der ganze Abschluß von A in L' , so gilt:

$$\mathrm{codim}\ \mathrm{Vzw}_A^{B'} = \mathrm{codim}\ \mathrm{Vzw}_A^{B} \quad .$$

<u>Beweis</u>. Wegen der im Beweis von (23.5) bewiesenen Abschätzung brauchen wir nur noch folgendes zu zeigen: Sei $\mathfrak{P} \in \mathrm{Vzw}_A^B$ mit $\mathrm{codim}\,\mathfrak{P} = \mathrm{codim}\ \mathrm{Vzw}_A^B$; dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{P}' \in \mathrm{Vzw}_A^{B'}$ mit $\mathrm{codim}\,\mathfrak{P}' = \mathrm{codim}\,\mathfrak{P}$.

Sei $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$. Nach dem going-down-Theorem haben $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ dieselbe Kodimension. Und das gilt auch für die über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideale von B' . Wären alle diese Primideale unverzweigt über A , so wären $B'_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt. Nach Satz (12.8) wäre dann auch der normale Zwischenring $B_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt über A im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{P}$ verzweigt über A ist. Das beendet den Beweis.

<u>Anhang</u>. Wir geben einen neuen Beweis für den bekannten Satz [8], (34.9).

<u>(23.7) Lemma</u>. Es sei R ein nullteilerfreier noetherscher lokaler Ring der Dimension q , der Restklassenring eines noetherschen lokalen Macaulayringes ist. Dann ist jedes assoziierte Primideal der Komplettierung $\hat{R}$ q-dimensional.

Beweis. Sei P ein noetherscher lokaler Macaulayring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in P mit $P/\mathfrak{p} = R$. In bekannter Weise konstruiert man eine Primfolge $\{f_1,\ldots,f_m\}$ in P derart, daß $\mathfrak{p}$ minimales Primideal von $\mathfrak{a} := Pf_1+\ldots+Pf_m$ ist. Es ist $m = \operatorname{codim}\mathfrak{p}$. Wegen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(P/\mathfrak{a})$ gibt es einen injektiven Homomorphismus h von $R = P/\mathfrak{p}$ in $P/\mathfrak{a}$. In der Komplettierung ist auch $\hat{h} : \hat{R} \longrightarrow (P/\mathfrak{a})^\wedge = \hat{P}/\hat{\mathfrak{a}}$ injektiv. Es folgt $\operatorname{Ass}\hat{R} \subseteq \operatorname{Ass}(\hat{P}/\hat{\mathfrak{a}})$ für die $\hat{P}$-Moduln $\hat{R} = \hat{P}/\hat{\mathfrak{p}}$ und $\hat{P}/\hat{\mathfrak{a}}$. Da auch $\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\hat{P}$ von einer Primfolge erzeugt wird und da $\hat{P}$ ein Macaulayring ist, in dem jedes von einer Primfolge erzeugte Ideal ungemischt ist, besitzen alle Primideale aus $\operatorname{Ass}(\hat{P}/\hat{\mathfrak{a}})$ und damit erst recht die aus $\operatorname{Ass}\hat{A}$ dieselbe Dimension $\dim P - m = \dim\mathfrak{p} = q$. Da die assoziierten Primideale von $\hat{R}$ aus denen des $\hat{P}$-Moduls $\hat{R}$ durch Restklassenbildung modulo $\hat{\mathfrak{p}}$ hervorgehen, ergibt sich nun die Behauptung.

§24. Ein Lemma von Auslander

In diesem Paragraphen wird der Beweis für das im vorigen Paragraphen verwendete Lemma von M. Auslander gebracht.

Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen über reflexive Moduln. Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Das gewöhnliche Dual $\operatorname{Hom}_A(M,A)$ sei im folgenden auch mit M^* bezeichnet, wenn keine Mißverständnisse über A zu befürchten sind. $M^{**} := (M^*)^*$ ist das Bidual von M . Der A-Modul M heißt reflexiv, wenn die kanonische Abbildung $M \longrightarrow M^{**}$ bijektiv ist. Ist A noethersch, M endlicher A-Modul und S ein multiplikatives System in A , so ist der aus der kanonischen Abbildung $M \longrightarrow M^{**}$ durch Nenneraufnahme entstehende A_S-Homomorphismus $M_S \longrightarrow (M^{**})_S$ (funktoriell) gleich der kanonischen Abbildung von M_S in das A_S-Bidual von M_S . Kurz: Dualisieren und Bidualisieren sind mit Nenneraufnahme verträglich.

(24.1) Hilfssatz. Es seien A ein Ring und M,N Moduln über A . Ist f,g eine Primfolge in N , so ist f,g Primfolge in $\operatorname{Hom}_A(M,N)$.

Beweis. Daß f,g Primfolge von N ist, heißt, daß f kein Nullteiler von N und g kein Nullteiler von N/fN ist. (Wir verlangen nicht, daß f und g im Jacobsonradikal von A enthalten sind. Beispielsweise darf g = 1 und damit ohne Belang sein.) Zur exakten Sequenz $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} N \longrightarrow N/fN \longrightarrow 0$, in der das Multiplizieren mit f ebenfalls mit f bezeichnet sei, gehört die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N/fN),$$

wobei $\tilde{f} = \mathrm{Hom}(M,f)$ das Multiplizieren mit f auf dem A-Modul $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ ist. $\tilde{f}$ ist injektiv! Ferner ist Kokern $\tilde{f} \subseteq \mathrm{Hom}_A(M,N/fN)$, und sogar auf diesem größeren Modul ist das Multiplizieren mit g nach dem gerade Bewiesenen injektiv.

(24.2) Lemma. Es seien A ein noetherscher normaler Integritätsring und M,N endliche A-Moduln. Dann gilt:

(1) M ist genau dann reflexiv, wenn jede Primfolge f,g in A auch eine Primfolge in M ist.

(2) Ist N reflexiv, so ist auch $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ reflexiv.

(3) Sind M und N reflexiv, so ist eine A-lineare Abbildung $\varphi: M \longrightarrow N$ genau dann bijektiv, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in A mit $\operatorname{codim} \mathfrak{p} \leq 1$ die Lokalisierung $\varphi_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$ bijektiv ist.

Beweis. Ist M reflexiv, so ist M ein Dual, und Hilfssatz (24.1) zeigt, daß jede Primfolge der Länge 2 in A auch eine in M ist. Sei umgekehrt diese Bedingung erfüllt. Dann gibt es keine Torsionselemente in M, und folglich ist $M \longrightarrow M^{**}$ injektiv. Der Kokern C dieses Homomorphismus könnte $\neq 0$ sein; in diesem Falle sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} C$. Bei $\operatorname{codim} \mathfrak{p} \leq 1$ wäre $A_{\mathfrak{p}}$ ein Hauptidealring und deshalb $M_{\mathfrak{p}}$ frei, woraus folgte, daß $M_{\mathfrak{p}}$ reflexiv wäre, daß also $C_{\mathfrak{p}} = 0$ wäre; Widerspruch zu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} C$. Also ist $\operatorname{codim} \mathfrak{p} > 1$ und $\mathfrak{p}$ enthält eine Primfolge f,g in A, die nach Voraussetzung eine Primfolge in M ist. Daher ist die homologische Kodimension $\operatorname{codh} A_{\mathfrak{p}} \geq 2$ und $\operatorname{codh} M_{\mathfrak{p}} \geq 2$. Dann besitzt aber $C_{\mathfrak{p}}$, das ist der Kokern der kanonischen Abbildung von $M_{\mathfrak{p}}$ in sein Bidual, die homologische Kodimension ≥ 1 im Widerspruch zu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} C$, was ja $C_{\mathfrak{p}} \neq 0$ und $\operatorname{codh} C_{\mathfrak{p}} = 0$ bedeutet.

Mittels (1) und (24.1) ergibt sich jetzt sofort (2). Die Bedingung in (3) ist trivialerweise notwendig. Sie ist auch hinreichend, denn dann ist $\operatorname{codim} \operatorname{Kern} \varphi \geq 2$ und $\operatorname{codim} \operatorname{Kokern} \varphi \geq 2$, woraus man wie im ersten Teil des Beweises $\operatorname{Kern} \varphi = 0$ und dann auch $\operatorname{Kokern} \varphi = 0$ ableitet. -

Außer der homologischen Dimension dh und Kodimension codh verwenden wir im folgenden noch die Theorie des Grads von Rees. Und zwar benötigen wir:

(24.3) Lemma. Seien A ein noetherscher lokaler Ring und M,N endliche A-Moduln $\neq 0$. Der Annullator $\mathrm{Ann}_A M$ enthält genau dann eine Primfolge der Länge r von N , wenn $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = 0$ ist für alle $i < r$.

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Ann}_A M \subseteq \mathfrak{m}_A$ Nichtnullteiler von N . Das Multiplizieren mit f annulliert alle $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$. Daher ist $\mathrm{Ext}^i_A(M,f) = 0$, und die lange Ext-Sequenz zu $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} N \longrightarrow N/fN \longrightarrow 0$ zerfällt in die exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M,N/fN) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_A(M,N) \longrightarrow 0$$

für jedes i . Wegen $f \in \mathfrak{m}_A$ ist $N/fN \neq 0$. Ein trivialer Induktionsschluß zeigt, daß $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = 0$ ist für $i < r$, wenn $\mathrm{Ann}_A M$ eine Primfolge der Länge r enthält.

Sei umgekehrt $M^* = \mathrm{Ext}^0_A(M,N) = 0$. Sei Ass $M = \{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_m\}$ und Ass $N = \{\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n\}$. Es gibt eine Zahl s derart, daß $(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_m)^s \subseteq \mathrm{Ann}_A M$. Bestände $\mathrm{Ann}_A M$ nur aus Nichtnullteilern von N , so wäre $(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_m)^s \subseteq \mathfrak{q}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{q}_n$ und es gäbe daher ein $\mathfrak{p} \in$ Ass M und ein $\mathfrak{q} \in$ Ass N mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Wegen $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ wäre erst recht $M_{\mathfrak{q}} \neq 0$. Aus $\mathrm{Hom}_A(M,N) = 0$ folgte $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}},N_{\mathfrak{q}}) = 0$. Wegen $\mathfrak{q} \in$ Ass N enthält $N_{\mathfrak{q}}$ einen Modul isomorph zu $A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$. Aus $M_{\mathfrak{q}} \neq 0$ folgte nun aber, daß es einen Homomorphismus $\neq 0$ von $M_{\mathfrak{q}}$ auf $A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}} \subseteq N_{\mathfrak{q}}$ gäbe. Widerspruch! Also gibt es doch einen Nichtnullteiler f von N mit $f \in \mathrm{Ann}_A M$. Ein trivialer Induktionsschluß mit Hilfe der oben angeführten exakten Sequenzen zeigt jetzt, daß aus $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = 0$ für $i < r$ folgt, daß es in $\mathrm{Ann}_A M$ eine Primfolge der Länge r von N gibt. -

Wie in der Arbeit [1] von Auslander kommt man bei kleinen Dimensionen mit speziellen Schlüssen zu dem gewünschten Freiheitskriterium.

(24.4) Lemma. Es sei A ein noetherscher lokaler Ring mit $\dim A \leq 3$ und M ein reflexiver endlicher A-Modul endlicher homologischer Dimension dergestalt, daß $\mathrm{Hom}_A(M,M)$ isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von M ist. Dann ist M freier A-Modul.

Beweis. Wir gehen anders als in [1] vor. Wir schließen den trivialen Fall $M = 0$ aus. Da M ein Dual ist, zeigt (24.1), daß codh $M \geq \min\{2, \text{codh } A\}$ ist. Nach (10.11) ist $\mathrm{dh}_A M + \mathrm{codh}_A M =$ codh A . Bei codh $A \leq 2$ ist also M trivialerweise frei. Sei daher nun codh $A = 3$. Dann ist wenigstens noch $\mathrm{dh}_A M \leq 1$. Es gibt also eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow A^r \longrightarrow A^s \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Nach Voraussetzung gibt es eine Zerlegung $\mathrm{Hom}_A(M,M) = M^m$. Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges

Primideal in A mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_A$. Dann ist codh $A_{\mathfrak{p}} \leq \dim A_{\mathfrak{p}} \leq 2$. Da $M_{\mathfrak{p}}$ ebenfalls reflexiv und von endlicher homologischer Dimension über $A_{\mathfrak{p}}$ ist, zeigt das bereits Bewiesene, daß $M_{\mathfrak{p}}$ ein freier $A_{\mathfrak{p}}$-Modul des Ranges m ist. Man hat dann offenbar $m = s-r$. Da $M \neq 0$ ist, kann nicht $\mathrm{Hom}_A(M,M) = 0$ sein. Also ist $m \geq 1$ und folglich $r < s$. Die Tatsache, daß $M_{\mathfrak{p}}$ frei ist für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_A$, wird auch noch im folgenden benützt: Da Ext^i_A mit der Nenneraufnahme verträglich ist, ist offensichtlich $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)_{\mathfrak{p}} = 0$ für jedes $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_A$ und jeden endlichen A-Modul N ; folglich ist $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ ein Modul endlicher Länge über A . Wir bezeichnen die Länge von A-Moduln mit ℓ_A .

Durch Anwenden von $\mathrm{Hom}_A(-,M)$ auf die kurze Auflösung von M erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^s,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^r,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,M) \longrightarrow 0 .$$

Unter Berücksichtigung der speziellen Gegebenheiten kann man kurz schreiben:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & M^{s-r} \arrow[r] & M^s \arrow[dr] \arrow[rr] & & M^r \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(M,M) \arrow[r] & 0 \\
 & & & U \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist die exakte 4er-Sequenz gleich durch die Einführung eines Moduls U in drei kurze exakte Sequenzen aufgebrochen worden. Da $\mathrm{Ext}^1_A(M,M)$ von endlicher Länge ist, gibt es in $\mathrm{Ann}_A\mathrm{Ext}^1_A(M,M)$ eine Primfolge der Länge 3 von A . Nach (24.3) ist daher $\mathrm{Ext}^i_A(\mathrm{Ext}^1_A(M,M),A) = 0$ für $i < 3$. Aus der zweiten Dreiersequenz mit U erhalten wir daher durch Anwenden von $\mathrm{Hom}_A(-,A)$ eine lange Homologiesequenz, aus der wir wegen $\mathrm{Ext}^2_A(M^r) = 0$ ablesen können: $\mathrm{Ext}^1_A(U,A) = \mathrm{Ext}^1_A(M^r,A)$ und $\mathrm{Ext}^3_A(\mathrm{Ext}^1_A(M,M),A) = \mathrm{Ext}^2_A(U,A)$. Durch Dualisieren der ersten Dreiersequenz mit U erhalten wir wegen $\mathrm{Ext}^2_A(M^s) = 0$ das exakte Teistück

$$\mathrm{Ext}^1_A(U,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M^s,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M^{s-r},A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(U,A) \longrightarrow 0$$

mit Moduln endlicher Länge. Ist $q := \ell_A\mathrm{Ext}^1_A(M,A)$, so ergibt sich daraus die Abschätzung: $\ell_A\mathrm{Ext}^2_A(U,A) - (s-r)q + s\cdot q - r\cdot q \leq 0$. Folglich ist $\mathrm{Ext}^2_A(U,A) = 0$ und damit $\mathrm{Ext}^3_A(\mathrm{Ext}^1_A(M,M),A) = 0$. Wegen (24.3) und codh $A = 3$ ist schließlich $\mathrm{Ext}^1_A(M,M) = 0$.

Damit erhalten wir jetzt durch Anwenden von $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ auf die Auflösung von M die exakte Sequenz

$$\operatorname{Ext}_A^1(M,A^r) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(M,A^s) \longrightarrow 0 \; .$$

Wegen $r < s$ bleibt aus Längengründen nur $\operatorname{Ext}_A^1(M,A) = 0$ übrig. Hiermit erhält man durch Dualisieren der Auflösung von M, daß M^* direkter Summand $(A^s)^* = A^s$, also freier A-Modul ist. Dann ist natürlich auch $M = M^{**}$ freier A-Modul.

(24.5) Lemma von Auslander. Es sei A ein regulärer noetherscher lokaler Ring und M ein reflexiver endlicher A-Modul dergestalt, daß $\operatorname{Hom}_A(M,M)$ isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von M ist. Dann ist M freier A-Modul.

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [1]. Sei $n := \dim A$. Da alle endlichen A-Moduln endliche homologische Dimension haben, folgt der Satz bei $n \leq 3$ direkt aus (24.4). Sei daher nun $n \geq 4$, und sei der Satz für alle regulären Ringe kleinerer Dimension bewiesen. Sei außerdem $M \neq 0$ und $\operatorname{Hom}_A(M,M) \cong M^m$; es ist $m \geq 1$.

Die Voraussetzungen übertragen sich in alle Lokalisierungen. Für alle Primideale $\mathfrak{p}$ in A mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_A$ ist deshalb nach Induktionsvoraussetzung $M_{\mathfrak{p}}$ freier $A_{\mathfrak{p}}$-Modul. Nützen wir dies aus, so sagen wir im folgenden kurz: Nach (V).

Wir nützen die Induktionsvoraussetzung weiter aus, indem wir auch Restklassenringe von A betrachten. Sei $x \in \mathfrak{m}_A$, aber $x \notin \mathfrak{m}_A^2$. Dann ist $\bar{A} := A/Ax$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $n-1 \geq 3$. Da M ein Dual ist, ist x auch Nichtnullteiler von M. Sei $\bar{M} := M/xM$. Wegen $x \in \mathfrak{m}_A$ ist $\bar{M} \neq 0$. Dann weiß man zunächst nur, daß jeder Nichtnullteiler von $\bar{A}$ auch ein solcher von $\bar{M}$ ist. Also ist $\bar{M}$ wenigstens torsionsfrei. Durch Anwenden von $\operatorname{Hom}_A(M,-)$ auf die exakte Sequenz $0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$ erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M,M) \xrightarrow{x} \operatorname{Hom}_A(M,M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M,\bar{M}) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(M,M) \; ,$$

wobei $\operatorname{Ext}_A^1(M,M)$ wegen (V) ein Modul endlicher Länge ist und $\operatorname{Hom}_A(M,\bar{M})$ kanonisch isomorph zu $\operatorname{Hom}_A(\bar{M},\bar{M}) = \operatorname{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M})$ ist. Nach Einsetzen von $\operatorname{Hom}_A(M,M) = M^m$ und Dividieren durch x erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \bar{M}^m \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M}) \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

mit einem $\bar{A}$-Modul T von endlicher Länge. Nach (24.3) ist dann $\operatorname{Ext}_{\bar{A}}^1(T,\bar{A}) = 0$, und deshalb ergibt das Dualisieren über $\bar{A}$ eine

Isomorphie $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M})^* \cong (\bar{M}^m)^* \cong (\bar{M}^*)^m$. (Wir wollen für einen $\bar{A}$-Modul N das Dual $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(N,\bar{A})$ kurz mit N^* bezeichnen.) Nochmaliges Dualisieren ergibt eine Isomorphie $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M})^{**} \cong (\bar{M}^{**})^m$.

Es läßt sich nun einfach zeigen, daß $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M})^{**}$ isomorph zu $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M}^{**},\bar{M}^{**})$ ist. Da $\bar{M}$ torsionsfrei ist, gibt es eine kanonische exakte Sequenz $0 \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow \bar{M}^{**} \longrightarrow U \longrightarrow 0$, wobei U wegen (V) ein Modul endlicher Länge ist. Deswegen erhält man durch Anwenden von $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M},-)$ und anschließendes doppeltes Dualisieren eine Isomorphie $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M})^{**} \cong \mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M}^{**})$. Durch Anwenden von $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(-,\bar{M}^{**})$ auf die Sequenz mit U und ausschließendes doppeltes Dualisieren ergibt sich endlich $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M}^{**}) \cong \mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{M}^{**},\bar{M}^{**})$.

Nach (24.2) ist $\bar{M}^{**}$ reflexiv. Die Induktionsvoraussetzung besagt nun, daß $\bar{M}^{**}$ ein freier $\bar{A}$-Modul ist. Da U ein Modul endlicher Länge ist und da $\mathrm{codh}\,\bar{A} = n-1 \geq 3$ ist, ergibt (24.3), daß $0 = U^* = \mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(U,\bar{A}) = \mathrm{Ext}^2_{\bar{A}}(U,\bar{A})$ ist. Durch Dualisieren von $\bar{M} \longrightarrow \bar{M}^{**}$ erhalten wir daher, daß $\bar{M}^* \cong \bar{M}^{***}$ frei ist und daß $\mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{A}) = 0$ ist.

Sei $0 \longrightarrow W \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz mit einem endlichen freien A-Modul F . Tensoriert man mit $\bar{A}$, so erhält man eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow \bar{W} \longrightarrow \bar{F} \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$ von $\bar{A}$-Moduln, da x Nichtnullteiler von M ist. Dualisieren mit $\bar{A}$ ergibt wegen $\mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{A}) = 0$ eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow \bar{M}^* \longrightarrow \bar{F}^* \longrightarrow \bar{W}^* \longrightarrow 0$. Da $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(-,\bar{A}) = \mathrm{Hom}_A(-,\bar{A})$ ist, ist auch $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,\bar{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(F,\bar{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(W,\bar{A}) \longrightarrow 0$ exakt. Das bedeutet offensichtlich $\mathrm{Ext}^1_A(M,\bar{A}) = 0$.

Wendet man nun auf $0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow 0$ den Funktor $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ an, so erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{x} M^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,\bar{A}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,A) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^1_A(M,A) \longrightarrow 0 .$$

Also ist $\mathrm{Ext}^1_A(M,A) = x \cdot \mathrm{Ext}^1_A(M,A)$. Das Lemma von Krull-Nakayama zeigt nun $\mathrm{Ext}^1_A(M,A) = 0$. Folglich ist einfach $M^*/xM^* \cong \bar{M}^*$ freier $\bar{A}$-Modul. Dann ist natürlich auch M^* freier A-Modul. Schließlich ist $M \cong M^{**}$ freier A-Modul.

§25. Beweise im gleichcharakteristischen Fall

sich
In speziellen Situationen läßt der Reinheitssatz anschaulicher und einfacher beweisen. Dies ist vor allem dann möglich, wenn

der reguläre lokale Grundring A einen Körper enthält, was genau dann der Fall ist, wenn A die gleiche Charakteristik wie sein Restkörper besitzt. Je nach der Charakteristik des Restekörpers geht man verschieden vor.

Fall der Primcharakteristik. Da der wesentliche Teil des Reinheitssatzes in einer Aussage vom Typ (23.5) besteht, wollen wir uns darauf beschränken. Wir beschreiben einen einfachen Beweis von (23.5) unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß der Grundring A die Primzahl-Charakteristik p hat. Die Beweismethode stammt von E. Kunz [7].

Sei also A ein regulärer noetherscher lokaler Ring der Primzahl-Charakteristik p und B ein normaler endlicher Erweiterungsring von A, von dem wir zunächst nur voraussetzen, daß er in der Kodimension 0 unverzweigt ist. Der Quotientenkörper L von B ist dann separabel und endlich über dem Quotientenkörper K von A. Man hat also $L = K[L^p]$, so daß die kanonische Abbildung

$$K \otimes_{K^p} L^p \longrightarrow K[L^p] = L$$

bijektiv ist. Eine analoge Aussage läßt sich für B über A beweisen, wie wir gleich sehen werden. Zunächst:

(25.1) Lemma. A ist treuflache Erweiterung von A^p.

Beweis. Da die Komplettierung $\hat{A}$ von A treuflach über A ist, genügt es zu zeigen, daß $\hat{A}$ treuflach über A^p ist. Der Isomorphismus $A \longrightarrow A^p$ durch $a \longrightarrow a^p$ und die Einbettung $A^p \longrightarrow A$ lassen sich in die Komplettierungen fortsetzen. Ihre Kompositionen ergeben jeweils den Frobenius-Endomorphismus von A bzw. $\hat{A}$. Daher ist $(A^p)^\wedge$ nichts anderes als $\hat{A}^p$. Dies ist eine treuflache Erweiterung von A^p. Also ist $\hat{A}$ treuflach über A^p, wenn $\hat{A}$ treuflach über $\hat{A}^p$ ist. Es genügt daher zu zeigen, daß $\hat{A}$ treuflach über $\hat{A}^p$ ist, d.h. wir dürfen gleich annehmen, daß A komplett ist.

Nach dem Cohenschen Struktursatz ist dann A isomorph zum formalen Potenzreihenring $k[[X_1,\dots,X_n]]$, $n = \dim A$, über dem Restekörper k von A. Dann ist $A^p = k^p[[X_1^p,\dots,X_n^p]]$. Hierüber ist $k^p[[X_1,\dots,X_n]]$ frei und lokal. Und Grundkörpererweiterung ist ebenfalls treuflach.

(25.2) Lemma. Der kanonische Homomorphismus

$$A \otimes_{A^p} B^p \longrightarrow A[B^p]$$

ist bijektiv.

Beweis. Die Elemente $\neq 0$ aus A^p sind Nichtnullteiler von B^p und wegen (25.1) auch Nichtnullteiler von $A \otimes_{A^p} B^p$. Dieser A-Modul ist also torsionsfrei. Daher ist die kanonische Abbildung von $A \otimes_{A^p} B^p$ in $K \otimes_A (A \otimes_{A^p} B^p) = K \otimes_{A^p} B^p = K \otimes_{K^p} (K^p \otimes_{A^p} B^p)$ injektiv. Da B^p torsionsfrei und endlich über A^p ist, ist $K^p \otimes_{A^p} B^p \longrightarrow L^p$ bijektiv. Folglich wird $A \otimes_{A^p} B^p$ injektiv in $K \otimes_{K^p} L^p$ abgebildet. $K \otimes_{K^p} L^p \longrightarrow L$ ist bijektiv, wie wir bemerkten. Folglich ist die kanonische Abbildung von $A \otimes_{A^p} B^p$ in L injektiv. Deren Bild ist $A[B^p]$.

(25.3) Lemma. $A[B^p]$ ist reflexiver A-Modul.

Beweis. Da A treuflach über A^p ist und da A^p noethersch ist, geht für jeden endlichen A^p-Modul M der kanonische Homomorphismus von M in sein A^p-Bidual durch Tensorieren mit A in den kanonischen Homomorphismus von $A \otimes_{A^p} M$ in sein A-Bidual über. Als normaler noetherscher Ring ist B reflexiver A-Modul. Also ist auch B^p reflexiver A^p-Modul. Es folgt: $A \otimes_{A^p} B^p$ ist reflexiver A-Modul. Mit (25.2) folgt nun das Resultat.

(25.4) Lemma. Ein Primideal $\mathfrak{P}$ aus B ist genau dann unverzweigt, wenn die Einbettung

$$A[B^p]_{A[B^p]\cap\mathfrak{P}} \longrightarrow B_{\mathfrak{P}}$$

bijektiv ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{q} := A[B^p] \cap \mathfrak{P}$. Wegen $B^p \subseteq A[B^p]$ ist $\mathfrak{P}$ das einzige Primideal in B über $\mathfrak{q}$. Daher ist $B_{\mathfrak{P}} = B_{\mathfrak{q}}$, d.h. die Lokalisierung nach dem multiplikativen System $A[B^p] - \mathfrak{q}$. Sei schließlich $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{P}$.

Bezeichne h die Einbettung $A[B^p] \longrightarrow B$. Wir haben zu zeigen: Genau dann ist $h_{\mathfrak{q}}$ surjektiv, wenn $B_{\mathfrak{q}}$ unverzweigt über $A[B^p]_{\mathfrak{q}}$ ist.

Nach dem Lemma von Krull-Nakayama ist $h_{\mathfrak{q}}$ genau dann surjektiv, wenn die kanonische Abbildung des Körpers $S := A[B^p]_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}A[B^p]_{\mathfrak{q}}$ in $T := B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$ surjektiv ist. T ist lokal und endlich über S , und S ist als Restklassenring einer Lokalisierung von $A[B^p]_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A[B^p]_{\mathfrak{p}}$ endlich über dem Körper $R := A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Man verifiziert unmittelbar $A_{\mathfrak{p}}[B^p]_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{p}}[(B_{\mathfrak{q}})^p]$, woraus sich dann $S = R[T^p]$ ergibt. Nun ist $S \longrightarrow T$ surjektiv genau dann, wenn T eine separable endliche Körpererweiterung von R ist. Nach (2.3) ist dies genau dann der Fall, wenn $B_{\mathfrak{q}}$ unverzweigt über $A_{\mathfrak{p}}$ ist. -

Wir verschärfen nun die Voraussetzungen und können dann den folgenden Spezialfall von (23.5) beweisen: Sei A ein regulärer noetherscher lokaler Ring der Primzahl-Charakteristik p und B ein normaler endlicher Erweiterungsring von A . Ist codim $\mathrm{Vzw}_A^B \geqq 2$ in B , so ist B unverzweigt über A .

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt insbesondere, daß die Quotientenkörper der Ringe eine separable endliche Erweiterung bilden. Wir können also die vorstehenden Lemmata enwenden. Über den 1-kodimensionalen Primidealen von A liegen genau die 1-kodimensionalen Primideale von B . Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in A mit codim $\mathfrak{p} = 1$ ist also $B_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt über $A_{\mathfrak{p}}$. Die Einbettung $A[B^p]_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}$ semilokaler Ringe ist daher in allen Lokalisierungen nach maximalen Idealen bijektiv nach (25.4), somit selbst bijektiv. Da $A[B^p]$ nach (25.3) und B reflexive A-Moduln sind, zeigt (25.2), daß $A[B^p] \longrightarrow B$ überhaupt bijektiv ist. Nochmalige Anwendung von (25.4) ergibt nun die Behauptung.

<u>Fall der Charakteristik Null</u>. Wir wollen uns wieder auf eine Diskussion von (23.5) beschränken. Ferner wollen wir annehmen, daß A komplett ist und daß A und $A/\mathfrak{m}_A$ die Charakteristik 0 haben, so daß A ein formaler Potenzreihenring $A = k[[X_1,\ldots,X_n]]$ über einem Körper k der Charakteristik 0 ist. (Die folgenden Überlegungen können auch analog mit Ringen konvergenter Potenzreihen durchgeführt werden.) Gegeben sei außerdem eine endliche normale Erweiterung B von A mit codim $\mathrm{Vzw}_A^B \geqq 2$. Als nullteilerfreie endliche Erweiterung eines kompletten lokalen Ringes ist B selbst ein kompletter lokaler Ring. Wir werden sehen, daß B regulär ist und unverzweigt über A . Die Beweismethode besteht im wesentlichen darin, die partiellen Ableitungen von A nach den X_i als Derivationen nach B fortzusetzen und dann das Jacobi-Kriterium zu verwenden. Sie stammt von Zariski. Neuerdings benutzt man als Formulierungshilfe Differentialmoduln; siehe beispielsweise [6] .

Sei ∂_i die partielle Ableitung von A nach X_i , $D_k^e(A) := A^n$ und $A \longrightarrow D_k^e(A)$ die k-Derivation, die jedem $a \in A$ das n-tupel $(\partial_1 a,\ldots, \partial_n a)$ zuordnet. Diese ist die universell-endliche k-Derivation von A . Als endliche A-Algebra besitzt auch B eine universell-endliche k-Derivation $B \longrightarrow D_k^e(B)$. Es gibt ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ D_k^e(A) \arrow[r, "g"] & D_k^e(B) \end{tikzcd}$$

mit einem eindeutig bestimmten A-Homomorphismus g . Es ist $D_k^e(B)/B\cdot \text{Bild } g = D_A^e(B)$. Da B endlich über A ist, hat man $D_A^e(B) = D_A(B)$. Bezeichnet man noch die Fortsetzung von g nach $B\otimes_A D_k^e(A)$ mit h , so erhält man die kanonische exakte Sequenz

$$B\otimes_A D_k^e(A) \xrightarrow{h} D_k^e(B) \longrightarrow D_A(B) \longrightarrow 0 \ .$$

Da B in der Kodimension 0 über A unverzweigt ist, ist $D_A(B)$ ein Torsionsmodul. Man weiß, daß $D_k^e(B)$ ein B-Modul des Ranges n = dim B = dim A ist. Wegen $B\otimes_A D_k^e(A) = B\otimes_A A^n = B^n$ ist h also aus Ranggründen injektiv. (Wegen der in diesem Passus verwendeten einfachen Grundtatsachen über universell-endliche Differentialmoduln vgl. [11].)

Da B nach Voraussetzung auch in der Kodimension 1 unverzweigt ist, ist $\operatorname{codim} \operatorname{Ann}_B D_A(B) \geq 2$. Es gibt also in $\operatorname{Ann}_B D_A(B)$ eine Primfolge der Länge 2 , denn B ist normal. Nach (24.3) ist dann $\operatorname{Hom}_B(D_A(B),B) = 0$ und $\operatorname{Ext}_B^1(D_A(B),B) = 0$. Aus der exakten Sequenz mit h erhält man also beim Dualisieren mit $\operatorname{Hom}_B(-,B)$ eine Isomorphie

$$\operatorname{Hom}_B(B\otimes_A D_k^e(A),B) \xleftarrow{h^*} \operatorname{Hom}_B(D_k^e(B),B) \ .$$

Es gibt also Elemente $h_i \in \operatorname{Hom}_B(D_k^e(B),B)$, die auf den totalen Differentialen dX_j die Werte $h_i dX_j = \partial_i X_j = \delta_{ij}$ (Kroneckerdelta) annehmen, also k-Derivationen δ_i von B in sich mit $\delta_i X_j = \delta_{ij}$. (Dies sind die Fortsetzungen der ∂_i.)

Nach dem nachfolgend behandelten Lemma von Vasconcelos (Teil einer Variante des Jacobi-Kriteriums) ist jetzt $X_1,\dots,X_n$ eine Primfolge im lokalen Ring B . Das bedeutet, daß der A-Modul B die homologische Kodimension n hat. Da A regulär ist, hat man $dh_A B < \infty$. Nach (10.11) ist daher B freier A-Modul. Das einfache Diskriminantenkriterium (13.7) zeigt wegen $\operatorname{codim} Vzw_A^B \geq 2$, daß B unverzweigt über A ist. -

Wir haben noch das erwähnte Lemma von Vasconcelos aus [14] nachzuholen:

<u>(25.5) Lemma</u>. Seien R ein noetherscher lokaler Ring, der einen Körper der Charakteristik 0 enthält, $x_1,\dots,x_n$ Elemente des maximalen Ideales $\mathfrak{m}_R$ und $\delta_1,\dots,\delta_n$ Derivationen von R in sich mit $\delta_i(x_j) = \delta_{ij}$. Dann ist $x_1,\dots,x_n$ eine Primfolge in R .

<u>Beweis</u>. Induktion über n . Der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei nun $n \geqq 1$. Das Ideal $Rx_1+\ldots+Rx_{n-1}$ ist invariant unter δ_n , wie man sofort sieht. Daher induziert δ_n eine Derivation auf $\bar{R} : R/Rx_1+\ldots+Rx_n$ mit dem Wert 1 auf der Restklasse $\bar{x}_n$ von x_n . Nach Induktionsvoraussetzung ist $x_1,\ldots,x_{n-1}$ eine Primfolge in R. Es genügt nun zu zeigen, daß $\bar{x}_n$ Nichtnullteiler in $\bar{R}$ ist, d.h. wir brauchen nur noch den Fall $n = 1$ zu betrachten.

Sei also $x \in \mathfrak{m}_R$ und δ eine Derivation in R mit $\delta x = 1$. Sei $\mathfrak{a} := \mathrm{Ann}_R x$. Wir zeigen nun durch Induktion über m , daß $\mathfrak{a} \subseteq Rx^m$ für jedes m . Nach dem Krullschen Durchschnittssatz ist dann $\mathfrak{a} \subseteq \bigcap_m Rx^m = 0$.

Es ist $\mathfrak{a} \subseteq Rx^0 = R$. Sei $\mathfrak{a} \subseteq Rx^m$, $m \geqq 0$. Wir haben dann zu zeigen: $\mathfrak{a} \subseteq Rx^{m+1}$. Sei $a \in \mathfrak{a}$. Es gibt nach Voraussetzung ein $b \in R$ mit $a = bx^m$. Aus $0 = ax = bx^{m+1}$ folgt $0 = \delta(b)x^{m+1}+b(m+1)x^m = x(\delta(b)x^m+(m+1)bx^{m-1})$, falls $m \geq 1$. Der Ausdruck in der Klammer ist ein Element von $\mathfrak{a}$ und ist deshalb in der Form cx^m darstellbar. $m+1$ ist Einheit in R . Daher folgt nun $bx^{m-1} \in Rx^m$. Weiteres Ausklammern von x liefert nach endlich vielen Schritten $b \in Rx$. Dann ist aber $a \in Rx^{m+1}$. –

Schließlich sei noch erwähnt, daß es in der komplex-analytischen Geometrie auch einen topologischen Beweis für den Reinheitssatz gibt. Ist nämlich $\pi : Y \longrightarrow X$ eine endliche Überlagerung komplexer Räume, Y normal, X Mannigfaltigkeit, und ist $X_1 \subsetneq X$ die analytische Diskriminantenmenge, so ist X_1 leer oder rein 1-kodimensional. Sei nämlich $x \in X_1$ und U eine Umgebung von x derart, daß $X_1 \cap U$ ($\geqq 2$)-kodimensional ist. Wir dürfen voraussetzen, daß $n := \dim X \geqq 2$ ist, daß U in geeigneten Koordinaten Kreuzprodukt $U_1 \times \ldots \times U_n$ von Gebieten $U_i \subseteq \mathbb{C}$ ist und daß $X_1 \cap U$ darin die Form $\{0\} \times \ldots \times \{0\} \times U_r \times \ldots \times U_n$ mit $r \geqq 3$ hat, wenn nicht der triviale Fall $X_1 \cap U = \emptyset$ vorliegt. Dann ist $U-X_1$ einfach zusammenhängend, die unverzweigte Überlagerung $Y-\pi^{-1}(U-X_1)$ von $U-X_1$ zerfällt in zu $U-X_1$ homöomorphe Blätter, die sich aus trivialen Gründen in $\pi^{-1}(U)$ fortsetzen. Also ist $\pi^{-1}(U)$ unverzweigt über U , und es ist doch $U \cap X_1 = \emptyset$.

LITERATUR

[1] Auslander, M., On the purity of the branch locus. Amer. J. Math. 84 , 116 - 125 (1962).

[2] —— und Buchsbaum, D.A., Ramification theory in noetherian rings. Amer. J. Math. 81 , 749 - 765 (1959).

[3] —— und Goldman, O., The Brauer group of a commutative ring. Trans. Amer. Math. Soc. 97 , 367 - 409 (1960).

[4] Bass, H., On the ubiquity of Gorenstein rings. Math. Zeitschr. 82 , 8 - 28 (1963).

[5] Bourbaki, N., Algèbre commutative. Chap. 1. Modules plats. Chap. 2. Localisation. Paris 1961.

[6] Denneberg, D., Universell-endliche Erweiterungen analytischer Algebren. Math. Ann. 200 , 307 - 326 (1973).

[7] Kunz, E., Remark on the purity of the branch locus. Proc. Amer. Math. Soc. 20 , 378 - 380 (1969).

[8] Nagata, M., Local rings. New York - London 1962.

[9] Raynaud, M., Anneaux locaux henséliens. Lect. Notes Math. 169 (1970).

[10] Roquette,P., Über den Singularitätengrad von Teilringen in Funktionenkörpern. Math. Zeitschr. 77 , 228 - 240 (1961).

[11] Scheja, G., Differentialmoduln lokaler analytischer Algebren. Schriftenreihe Math. Inst. Fribourg 2 , (1970).

[12] —— und Storch, U., Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren. Math. Ann. 197 , 137 - 170 (1972).

[13] —— —— , Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten. Erscheint in J. reine angew. Math.

[14] Vasconcelos, W.V., Derivations of commutative noetherian rings. Math. Zeitschr. 112 , 229 - 233 (1969).

R E G I S T E R