Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 2, 2. Aufl. (Version 2010), Kapitel 6

17 Normierte Vektorräume

Abschnitt 17.A, Aufg. 1, p. 540 (1.11.2012) :

Man beweise 17.A.2: Für einen normierten Vektorraum V sind die Addition $V \times V \to V$, die Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times V \to V$ und die Norm $V \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Es genügt jeweils zu zeigen, dass jede abgeschlossene ε-Kugel des Bildraums das Bild einer abgeschlossenen Kugel des Urbildraums enthält.

Sei also $(a, b) \in V \times V$, wobei wir auf $V \times V$ die Maximumsnorm mit $\|(x, y)\| := \operatorname{Max}\big(\|x\|, \|y\|\big)$ wählen, und sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Aus $\|(x, y) - (a, b)\| := \operatorname{Max}\big(\|x-a\|, \|y-b\|\big) \le \delta := \frac{1}{2}\varepsilon$ folgt dann in der Tat $\|(x+y) - (a+b)\| \le \|x-a\| + \|y-b\| \le 2\delta = \varepsilon$.

Sei ferner $(r, a) \in \mathbb{K} \times V$, wobei wir auf $\mathbb{K} \times V$ wieder die Maximumsnorm mit $\|(t, x)\| := \operatorname{Max}\big(|t|, \|x\|\big)$ benutzen, und sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $\delta := \operatorname{Min}\big(1, \varepsilon/\big(\|a\|+1+|r|\big)\big)$. Aus $\|(t, x) - (r, a)\| := \operatorname{Max}\big(|t-r|, \|x-a\|\big) \le \delta$ folgt dann zunächst $\|x\| - \|a\| \le \|x-a\| \le \delta \le 1$, also $\|x\| \le \|a\|+1$ und damit

$$\|tx - ra\| \le \|(t-r)x + r(x-a)\| \le |t-r|\|x\| + |r|\|x-a\| \le \delta\|x\| + |r|\delta \le \delta\big(\|a\|+1+|r|\big) \le \varepsilon\,.$$

Sei schließlich $a \in V$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Aus $\|x-a\| \le \delta := \varepsilon$ folgt dann $\|x\| - \|a\| \le \|x-a\| \le \varepsilon$ und $\|a\| - \|x\| \le \|a-x\| = \|x-a\| \le \varepsilon$, also $\big|\|x\| - \|a\|\big| \le \varepsilon$. •

Abschnitt 17.A, Aufg. 2, p. 540 (1.11.2012) :

Man führe den Beweis von 17.A.4 für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aus: Eine Norm $\|-\|$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V kommt genau dann von einem Skalarprodukt auf V, wenn die Parallelogrammregel

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,, \qquad x, y \in V\,,$$

für diese Norm gilt.

Beweis: Für Elemente x, y des $\mathbb{C}$-Vektorraums V definieren wir

$$\langle x, y\rangle := \tfrac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big(\|\mathrm{i}x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)\,.$$

Die Parallelogrammregel liefert $\|\mathrm{i}x+y\|^2 + \|\mathrm{i}x-y\|^2 = 2\|\mathrm{i}x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, also

$$\begin{aligned}\|\mathrm{i}x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 &= -\big(\|\mathrm{i}x-y\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\big) = -\big(\|\mathrm{i}(\mathrm{i}y+x)\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\big)\\ &= -\big(\|\mathrm{i}y+x\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\big)\,. \qquad \text{Es folgt:}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\langle x, y\rangle} &= \tfrac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big(\|\mathrm{i}x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)\\ &= \tfrac{1}{2}\big(\|y+x\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\big) - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big(\|\mathrm{i}y+x\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\big) = \langle y, x\rangle\,.\end{aligned}$$

Damit erhält man $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$, d.h. $\langle x, x\rangle = \operatorname{Re}\langle x, x\rangle = \frac{1}{2}\big(\|x+x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2\big) = \|x\|^2$.

Wir zeigen nun $\langle x+x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$ für $x, x', y \in V$ und gehen dabei wie im Beweis zu Satz 17.A.4 vor. Mit dreimaligem Anwenden der Parallelogrammregel ergibt sich

$$\begin{aligned}2\|x+x'+y\|^2 + 2\|y\|^2 &= \|x+x'+2y\|^2 + \|x+x'\|^2\\ &= 2\|x+y\|^2 + 2\|x'+y\|^2 - \|x-x'\|^2 + \|x+x'\|^2\\ &= 2\|x+y\|^2 + 2\|x'+y\|^2 + 2\|x+x'\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x'\|^2\,, \qquad \text{also}\end{aligned}$$

$$\|x+x'+y\|^2 - \|x+x'\|^2 - \|y\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \|x'+y\|^2 - \|x'\|^2 - \|y\|^2$$

Ersetzt man darin x und x' durch $\mathrm{i}x$ bzw. $\mathrm{i}x'$, so erhält man wegen $\|\mathrm{i}x\|^2 = \|x\|^2$, $\|\mathrm{i}x'\|^2 = \|x'\|^2$ außerdem

$$\|\mathrm{i}x+\mathrm{i}x'+y\|^2 - \|\mathrm{i}x+\mathrm{i}x'\|^2 - \|y\|^2 = \|\mathrm{i}x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \|\mathrm{i}x'+y\|^2 - \|x'\|^2 - \|y\|^2.$$

Damit sieht man

$$\begin{aligned}\langle x+x',\,y\rangle &= \tfrac12\big(\|x+x'+y\|^2-\|x+x'\|^2-\|y\|^2\big)-\tfrac{\mathrm i}{2}\big(\|\mathrm ix+\mathrm ix'+y\|^2-\|x+x'\|^2-\|y\|^2\big)\\ &= \tfrac12\big(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\big)+\tfrac12\big(\|x'+y\|^2-\|x'\|^2-\|y\|^2\big)\\ &\quad-\tfrac{\mathrm i}{2}\big(\|\mathrm ix+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\big)-\tfrac{\mathrm i}{2}\big(\|\mathrm ix'+y\|^2-\|x'\|^2-\|y\|^2\big)=\langle x,\,y\rangle+\langle x',\,y\rangle\,.\end{aligned}$$

Die Gleichung $\langle ax,\,y\rangle = a\langle x,\,y\rangle$ gilt bei festen $x,\,y\in V$ wegen der schon bewiesenen Additivität für alle $a\in\mathbb{Q}$. Da aber beide Seiten dieser Gleichung stetige Funktionen in a sind, gilt sie für alle $a\in\mathbb{R}$. Haben wir die Gleichung auch für $a=\mathrm i$ gezeigt, so ist sie damit für alle $a\in\mathbb{C}$ bewiesen. Die Parallelogrammregel liefert in der Tat $\|y+x\|^2+\|y-x\|^2=2\|y\|^2+2\|x\|^2$, d.h. $-\big(\|-x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\big)=\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2$, und somit

$$\begin{aligned}\langle \mathrm ix,\,y\rangle &= \tfrac12\big(\|\mathrm ix+y\|^2-\|\mathrm ix\|^2-\|y\|^2\big)-\tfrac{\mathrm i}{2}\big(\|-x+y\|^2-\|\mathrm ix\|^2-\|y\|^2\big)\\ &= \mathrm i\Big(-\tfrac{\mathrm i}{2}\big(\|\mathrm ix+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\big)+\tfrac12\big(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\big)\Big)=\mathrm i\langle x,\,y\rangle\,.\end{aligned}$$

Schließlich folgt aus dem Bewiesenen $\langle y,\,x+x'\rangle=\overline{\langle x+x',\,y\rangle}=\overline{\langle x,\,y\rangle}+\overline{\langle x',\,y\rangle}=\langle y,\,x\rangle+\langle y,\,x'\rangle$ und $\langle x,\,ay\rangle=\overline{\langle ay,\,x\rangle}=\overline{a}\,\overline{\langle y,\,x\rangle}=\overline{a}\,\langle x,\,y\rangle$. Insgesamt ist gezeigt, dass $\langle -,\,-\rangle$ ein Skalarprodukt ist mit $\|-\|$ als zugehöriger Norm. •

Bemerkung: Man hätte auch das reelle Resultat 17.A.4 benutzen können, um zu sehen, dass es sich bei der betrachteten Funktion $\langle x,\,y\rangle$ um eine reell-bilineare Funktion auf V handelt, und hat dann nur noch die Gleichungen $\langle \mathrm ix,\,y\rangle=\mathrm i\,\langle x,\,y\rangle$ und $\langle y,\,x\rangle=\overline{\langle x,\,y\rangle}$ für alle $x,\,y\in V$ zu prüfen.

Abschnitt 17.A, Aufg. 4, p. 540 (1.11.2012) :

a) Man zeige, dass die Maximumsnorm und die Summennorm auf $\mathbb{K}^{(I)}$ bei $|I|\ge 2$ nicht von einem Skalarprodukt herrühren.

b) Man zeige, dass die Supremumsnorm und die L^1-Norm auf $\mathrm{C}_{\mathbb{K}}([a,\,b])$, $a<b$, beide nicht von einem Skalarprodukt herrühren.

Beweis: Nach Satz 17.A.4 genügt es jeweils ein Beispiel zu geben, bei dem für die betrachtete Norm die Parallelogrammregel verletzt ist.

a) Seien $i_0,\,j_0\in I$ mit $i_0\ne j_0$. Wir definieren $x=(x_i)$ und $y=(y_i)$ durch $x_{i_0}:=1$, $x_{j_0}:=0$ und $x_i:=0$ für $i\ne i_0,\,j_0$ bzw. durch $y_{i_0}:=0$, $y_{j_0}:=1$ und $y_i:=0$ für $i\ne i_0,\,j_0$.

Dann gilt $\|x\|_\infty=\|y\|_\infty=\|x+y\|_\infty=\|x-y\|_\infty=1$ und wegen $\|x+y\|_\infty^2+\|x-y\|_\infty^2=1^2+1^2=2\ne 2\|x\|_\infty^2+2\|y\|_\infty^2=2\cdot 1^2+2\cdot 1^2=4$ ist die Parallelogrammregel verletzt. Die Maximumsnorm $\|-\|_\infty$ rührt daher nicht von einem Skalarprodukt her.

Ferner gilt dann $\|x\|_1=\|y\|_1=1$, $\|x+y\|_1=\|x-y\|_1=2$ und wegen $\|x+y\|_1^2+\|x-y\|_1^2=2^2+2^2=8\ne 2\|x\|_1^2+2\|y\|_1^2=2\cdot 1^2+2\cdot 1^2=4$ ist die Parallelogrammregel verletzt. Die Summennorm $\|-\|_1$ rührt somit ebenfalls nicht von einem Skalarprodukt her.

b) Sei etwa $x(t):=(t-a)/(b-a)$ und $y(t):=1$, $z(t):=\frac12$ für alle $t\in[a,\,b]$.

Dann ist $\|x\|_{[a,b]}=1$, $\|y\|_{[a,b]}=1$, $\|x+y\|_{[a,b]}=2$ und $\|x-y\|_{[a,b]}=1$, $\|x+y\|_{[a,b]}^2+\|x-y\|_{[a,b]}^2=2^2+1^2=5\ne 2\|x\|_{[a,b]}^2+2\|y\|_{[a,b}^2=2\cdot 1^2+2\cdot 1^2=4$. Bei der Supremumsnorm $\|-\|_{[a,b]}$ ist also die Parallelogrammregel verletzt. Sie rührt daher nicht von einem Skalarprodukt her.

Ferner ist $\|x\|_1=\int\limits_a^b\frac{t-a}{b-a}\,dt=\frac{(t-a)^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac12(b-a),\quad \|z\|_1=\int\limits_a^b\frac12\,dt=\frac12(b-a),$

$\|x+z\|_1=\int\limits_a^b\Big|\frac{t-a}{b-a}+\frac12\Big|\,dt=\int\limits_a^b\Big(\frac{t-a}{b-a}+\frac12\Big)\,dt=b-a$ sowie

$$\begin{aligned}\|x-z\|_1=\int\limits_a^b\Big|\frac{t-a}{b-a}-\frac12\Big|\,dt&=\int\limits_a^{(a+b)/2}\Big(\frac12-\frac{t-a}{b-a}\Big)\,dt+\int\limits_{(a+b)/2}^b\Big(\frac{t-a}{b-a}-\frac12\Big)\,dt\\ &=\tfrac14(b-a)-\tfrac18(b-a)+\tfrac38(b-a)-\tfrac14(b-a)=\tfrac14(b-a)\,,\end{aligned}$$

also $\|x+z\|_1^2+\|x-z\|_1^2=\big(1+\frac1{16}\big)(b-a)^2=\frac{17}{16}(b-a)^2\ne 2\|x\|_1^2+2\|z\|_1^2=\big(2\cdot\frac14+2\cdot\frac14\big)(b-a)^2=(b-a)^2$. Die L^1-Norm verletzt also ebenfalls die Parallelogrammregel und rührt daher nicht von einem Skalarprodukt her. •

Abschnitt 17.A, Aufg. 5. p. 540 (1.11.2012) :

a) Die Vervollständigung von $\mathbb{K}^{(I)}$ bzgl. der Norm, die vom Standardskalarprodukt herrührt, ist der Hilbert-Raum $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ der quadratsummierbaren Familien $(a_i) \in \mathbb{K}^I$, d.h. der Familien (a_i) in $\mathbb{K}^I$, für die $\sum_{i\in I} |a_i|^2$ endlich ist. Das Skalarprodukt auf $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ ist gegeben durch

$$\langle (a_i)\,,(b_i)\rangle_2 = \sum_{i\in I} a_i\overline{b}_i\,.$$

Für $I = \mathbb{N}$ schreibt man einfach $\ell^2_{\mathbb{K}}$ statt $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. Dieser Raum heißt der Hilbertsche Folgenraum.

b) Die Vervollständigung von $\mathbb{K}^{(I)}$ bzgl. der Maximumsnorm ist der Banach-Raum $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ der Nullfamilien $(a_i) \in \mathbb{K}^I$ (für die in jeder Umgebung von $0 \in \mathbb{K}$ fast alle Glieder der Familie liegen). Die Norm auf $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ ist die Maximumsnorm

$$\|(a_i)\|_\infty := \operatorname{Max}\big\{|a_i| \;\big|\; i\in I\big\}\,.$$

$\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(I)$. Ebenso ist bei unendlichem I der Raum $c_{\mathbb{K}}(I) := \mathbb{K}+\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ der konvergenten Familien über der Indexmenge I (vgl. Bd. 1, Anschnitt 6.B) ein abgeschlossener Unterraum von $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(I)$.

c) Die Vervollständigung von $\mathbb{K}^{(I)}$ bzgl. der Summennorm ist der Banach-Raum $\ell^1_{\mathbb{K}}(I)$ der summierbaren Familien $(a_i) \in \mathbb{K}^I$ mit der Norm

$$\|(a_i)\|_1 := \sum_{i\in I} |a_i|\,.$$

Beweis: a) $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ *ist ein Unterraum von* $\mathbb{K}^I$: Für $(a_i)\,,(b_i) \in \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ und $a\in\mathbb{K}$ gilt nämlich $\sum\limits_{i\in I}|a_i|^2, \sum\limits_{i\in I}|b_i|^2 < \infty$ und folglich $\sum\limits_{i\in I}|aa_i|^2<\infty$ sowie $\sum\limits_{i\in I}|a_i+b_i|^2 \le 2\sum\limits_{i\in I}|a_i|^2+2\sum\limits_{i\in I}|b_i|^2<\infty$ (letzteres wegen $|a_i+b_i|^2 = |a_i|^2+|b_i|^2+2\operatorname{Re} a_i\overline{b}_i \le |a_i|^2+|b_i|^2+2|a_i||b_i| \le 2|a_i|^2+2|b_i|^2$), also $a(a_i), (a_i)+(b_i) \in \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. Ferner ist $\langle -,-\rangle_2$ offenbar ein Skalarprodukt auf $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$.

$\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ *ist vollständig*: Zum Beweis sei (a_{ik}), $k\in\mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. Es ist zu zeigen, dass (a_{ik}) in $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ konvergiert. Sei dazu $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $k_0\in\mathbb{N}$ mit $\|(a_{ik})-(a_{i\ell})\|_2^2 = \sum\limits_{i\in I}|a_{ik}-a_{i\ell}|^2\le\varepsilon$ für alle $k,\ell\ge k_0$, also mit $\sum\limits_{i\in H}|a_{ik}-a_{i\ell}|^2\le\varepsilon$ für jede endliche Teilmenge H von I und erst recht $|a_{ik}-a_{i\ell}|^2\le\varepsilon$ für alle $k,\ell\ge k_0$. Für jedes $i\in I$ ist also a_{ik}, $k\in\mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge und konvergiert somit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ gegen ein $a_i\in\mathbb{K}$. Für $\ell\to\infty$ ergibt sich $\sum\limits_{i\in H}|a_{ik}-a_i|^2\le\varepsilon$, also auch $\|(a_{ik})-(a_i)\|_2^2 = \sum\limits_{i\in I}|a_{ik}-a_i|^2\le\varepsilon$, da H eine beliebige endliche Teilmenge von I ist. Mit der Dreiecksungleichung sieht man $\|(a_i)\|_2 \le \|(a_{ik})-(a_i)\|_2+\|(a_{ik})\|_2 \le \sqrt{\varepsilon}+\|(a_{ik})\|_2<\infty$. Damit ist gezeigt, dass (a_i) in $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ liegt und dass die Cauchy-Folge (a_{ik}), $k\in\mathbb{N}$, gegen (a_i) konvergiert.

Offenbar gilt $\big(\mathbb{K}^{(I)}, \|-\|_2\big) \subseteq \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. Ferner ist $\mathbb{K}^{(I)}$ dicht in $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$: Ist nämlich $(a_i)\in\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ und ist $\varepsilon>0$, so gibt es eine endliche Teilmenge H von I mit $\sum\limits_{i\in I-H}|a_i|^2 = \Big|\sum\limits_{i\in I}|a_i|^2-\sum\limits_{i\in H}|a_i|^2\Big|\le\varepsilon^2$. Setzt man $b_i:=a_i$ für $i\in H$ und $b_i:=0$ für $i\in I-H$. so liegt (b_i) in $K^{(I)}$ und es gilt nach Konstruktion $\|(a_i)-(b_i)\|_2\le\varepsilon$. (Ferner ist $(a_i)=\sum_{i\in I}a_ie_i$ und folglich e_i, $i\in I$, eine Hilbert-Basis des Hilbert-Raums $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. Vgl. dazu Abschnitt 19.A und insbesondere dort die Aufg. 6, die zeigt, dass die Räume $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ bis auf Isomorphie die einzigen Hilbert-Räume sind.)

b) Offenbar ist $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ ein normierter Unterraum von $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(I)$. $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ *ist vollständig*: Zum Beweis sei (a_{ik}), $k\in\mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$. Es ist zu zeigen, dass (a_{ik}) in $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ konvergiert. Sei dazu $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $k_0\in\mathbb{N}$ mit $\|(a_{ik})-(a_{i\ell})\|_\infty = \operatorname{Max}\{|a_{ik}-a_{i\ell}| \mid i\in I\}\le\varepsilon$ für alle $k,\ell\ge k_0$, also erst recht $|a_{ik}-a_{i\ell}|\le\varepsilon$ für alle $i\in I$ und $k,\ell\ge k_0$. Für jedes $i\in I$ ist a_{ik}, $k\in\mathbb{N}$, daher eine Cauchy-Folge und konvergiert somit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ gegen ein $a_i\in\mathbb{K}$. Für hinreichend große $k\in\mathbb{N}$ gilt also $|a_{ik}-a_i|\le\varepsilon$ und ferner $|a_{ik}|\le\varepsilon$ wegen $(a_{ik})\in\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$. Für diese k gilt dann auch $|a_i|\le|a_{ik}-a_i|+|a_{ik}|\le 2\varepsilon$, d.h. es ist $(a_i)\in\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$. Ferner erhält man $\|(a_{ik})-(a_i)\|_\infty = \operatorname{Max}\{|a_{ik}-a_i| \mid i\in I\}\le\varepsilon$ für diese k, d.h. die Folge (a_{ik}) konvergiert in $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ gegen (a_i).

Offenbar gilt $\big(\mathbb{K}^{(I)}, \|-\|_\infty\big)\subseteq\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$. $\mathbb{K}^{(I)}$ *ist dicht in* $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$: Ist nämlich $(a_i)\in\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ und ist $\varepsilon>0$, so ist die Menge $H:=\{i\in I \mid |a_i|>\varepsilon\}$ nach Definiton von $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ endlich. Setzt man $b_i:=a_i$ für $i\in H$ und $b_i:=0$ für $i\in I-H$. so liegt (b_i) in $K^{(I)}$ und es gilt nach Konstruktion $\|(a_i)-(b_i)\|_\infty\le\varepsilon$.

Nach ANH.E.5 (1) ist $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ als vollständiger Teilraum in $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(I)$ abgeschlossen. Man hätte auch umgekehrt zunächst zeigen können, dass $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ abgeschlossen in der Banach-Algebra $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(I)$ ist. $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ ist natürlich auch multiplikativ abgeschlossen, aber bei unendlichem I keine Unteralgebra, da dann das Einselement fehlt.

Sei nun I unendlich. Für $a\in\mathbb{K}$ ist dann $a+\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ die Menge der konvergenten Familien über I mit Grenzwert a, also $\mathbb{K}+\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ die Menge aller konvergenten Familien über I.

Wir zeigen noch, dass auch $\mathbb{K}+\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ in $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(I)$ abgeschlossen und damit eine $\mathbb{K}$-Banach-Unteralgebra von $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(I)$ ist. Sei dazu (a_{ik}), $k\in\mathbb{N}$, eine konvergente Folge von konvergenten Familien über I mit der Familie $(b_i)\in\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(I)$ als Grenzwert. Wir haben zu zeigen, dass auch (b_i) eine konvergente Familie ist, also in $\mathbb{K}+\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ liegt. Sei dazu $\varepsilon>0$ vorgegeben. Bezeichnet $a_k\in\mathbb{K}$ für jedes $k\in\mathbb{N}$ den Grenzwert der Familie (a_{ik}), so gibt es eine endliche Teilmenge H_k von I mit $|a_{ik}-a_k|\le\varepsilon$ für alle $i\in I-H_k$ und alle k. Die Folge (a_{ik}), $k\in\mathbb{N}$, konvergiert gegen (b_i), es gibt daher außerdem ein $k_0\in\mathbb{N}$ mit $\|(a_{ik})-(b_i)\|_\infty = \mathrm{Max}\,\big\{|a_{ik}-b_i|\;\big|\; i\in I\big\}\le\varepsilon$ für alle $k\ge k_0$, also mit $|b_i-a_k|\le|b_i-a_{ik}|+|a_{ik}-a_k|\le 2\varepsilon$ für alle $k\ge k_0$ und alle $i\in I-(H_0\cup\cdots\cup H_{k_0-1})$. Da I unendlich ist, besitzt die beschränkte Familie $\{b_i\mid i\in I\}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt $b\in\mathbb{K}$, d.h. für unendlich viele $i\in I$ gibt es ein b_i mit $|b_i-b|\le\varepsilon$. Da $H_0\cup\cdots\cup H_{k_0-1}$ endlich ist, gibt es insgesamt ein $i_0\in I$ mit $|b_{i_0}-b|\le\varepsilon$ und $|b_{i_0}-a_k|\le 2\varepsilon$ für alle $k\ge k_0$, also mit $|a_k-b|\le|b_{i_0}-a_k|+|b_{i_0}-b|\le 3\varepsilon$ für alle $k\ge k_0$. Die Folge a_k, $k\in\mathbb{N}$ konvergiert daher gegen b. Nach Konstruktion liegt die konvergente Folge $(a_{ik}-a_k)$, $k\in\mathbb{N}$, konvergenter Familien in $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ und konvergiert gegen die Familie (b_i-b). Da $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ in $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(I)$ abgeschlossen ist, liegt (b_i-b) ebenfalls in $\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$, d.h. die Familie (b_i) konvergiert gegen b.

(Bemerkung. Der Raum $\big(\ell^0_{\mathbb{K}}(I)$ ist der Raum der stetigen $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf dem kompakten Raum $I\uplus\{\omega\}$, der die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von I mit der diskreten Topologie ist, vgl. Bd. 3, Beispiel 2.B.18.)

c) Offenbar ist $\ell^1_{\mathbb{K}}(I)$ ein Unterraum von $\mathbb{K}^I$. $\ell^1_{\mathbb{K}}(I)$ ist vollständig: Zum Beweis sei (a_{ik}), $k\in\mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in $\ell^1_{\mathbb{K}}(I)$. Es ist zu zeigen, dass (a_{ik}), $k\in\mathbb{N}$, in $\ell^1_{\mathbb{K}}(I)$ konvergiert. Sei dazu $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $k_0\in\mathbb{N}$ mit $\|(a_{ik})-(a_{i\ell})\|_1=\sum\limits_{i\in I}|a_{ik}-a_{i\ell}|\le\varepsilon$ für alle $k,\ell\ge k_0$, also mit $\sum\limits_{i\in H}|a_{ik}-a_{i\ell}|\le\varepsilon$ für jede endliche Teilmenge H von I und erst recht $|a_{ik}-a_{i\ell}|\le\varepsilon$ für alle $i\in I$ und $k,\ell\ge k_0$. Für jedes $i\in I$ ist a_{ik}, $k\in\mathbb{N}$, daher eine Cauchy-Folge und konvergiert somit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ gegen ein $a_i\in\mathbb{K}$. Für $\ell\to\infty$ ergibt sich $\|(a_{ik})-(a_i)\|_1=\sum\limits_{i\in I}|a_{ik}-a_i|\le\varepsilon$, da H eine beliebige endliche Teilmenge von I war. Mit der Dreiecksungleichung sieht man $\|(a_i)\|_1\le\|(a_{ik})-(a_i)\|_1+\|(a_{ik})\|_1\le\varepsilon+\|(a_{ik})\|_1<\infty$. Damit ist $(a_i)\in\ell^1_{\mathbb{K}}(I)$ gezeigt und dass die Cauchy-Folge (a_{ik}), $k\in\mathbb{N}$, gegen (a_i) konvergiert.

Offenbar ist $\big(\mathbb{K}^{(I)},\|{-}\|_1\big)\subseteq\ell^1_{\mathbb{K}}(I)$. Ferner ist $\mathbb{K}^{(I)}$ dicht in $\ell^1_{\mathbb{K}}(I)$: Ist nämlich $(a_i)\in\ell^1_{\mathbb{K}}(I)$ und ist $\varepsilon>0$, so gibt es eine endliche Teilmenge H von I mit $\sum\limits_{i\in I-H}|a_i|=\Big|\sum\limits_{i\in I}|a_i|-\sum\limits_{i\in H}|a_i|\Big|\le\varepsilon$. Setzt man $b_i:=a_i$ für $i\in H$ und $b_i:=0$ für $i\in I-H$. so liegt (b_i) in $K^{(I)}$ und es gilt nach Konstruktion $\|(a_i)-(b_i)\|_1\le\varepsilon$. •

Abschnitt 17.A, Aufg. 6. p. 541 (1.11.2012):

Seien $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty,\omega\}$ und $V:=\mathrm{C}^m_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big)$ der Vektorraum der m-mal stetig differenzierbaren bzw. bei $m=\omega$ der analytischen $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, $a<b$.

a) Bei $m\ne 0$ ist V, versehen mit der Supremumsnorm, kein Banach-Raum.

b) Für $m\in\mathbb{N}$ wird durch

$$\|f\|^{(m)}:=\mathrm{Sup}\,\Big\{\sum_{k=0}^{m}|f^{(k)}(t)|\;\Big|\;t\in[a,b]\Big\}$$

eine Norm auf V gegeben, bezüglich der V ein Banach-Raum ist. (Diese Norm heißt auch die C^m-Norm.)

Beweis: a) Sei $f:[a,b]:\mathbb{K}$ eine stetige, nicht differenzierbare Funktion. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz 12.A.14 aus Band 1 gibt es sogar eine Folge (f_n) von Polynomfunktionen auf $[a,b]$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Nach dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz 12.A.2 aus Band 1 ist die Folge bzgl. der Supremumsnorm eine Cauchy-Folge, die in $\mathrm{C}^0_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big)$ gegen f konvergiert, aber wegen $f\notin\mathrm{C}^m_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big)$ nicht im Raum $\mathrm{C}^m_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big)$ für $m\ne 0$. – Es genügte natürlich ein einziges Beispiel einer gleichmäßig konvergenten Folge von Polynomen anzugeben, deren Grenzfunktion nicht differenzierbar ist. Nach Band 1, Beispiel 13.C.7 (1) konvergiert zum Beispiel die Reihe $\sum_{n=0}^\infty\binom{1/2}{n}(x^2-1)^n$ auf $[-\sqrt2,\sqrt2\,]$ gleichmäßig gegen $|x|$.

b) Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $\mathrm{C}^m_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big)$ bezgl. der Norm $\|-\|^{(m)}$. Für $k=0,\ldots,m$ ist jede der Folgen $\big(f_n^{(k)}\big)$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Supremumsnorm, konvergiert also auf $[a,b]$ gleichmäßig. Nach Bd. 1, 14.E.1, ist dann $f:=\lim f_n$ m-mal differenzierbar, und es gilt $f^{(k)}=\lim f_n^{(k)}$ für $k=0,\ldots,m$. Die Folge (f_n) konvergiert also in $\mathrm{C}^m_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big)$ gegen f. •

Abschnitt 17.A, Aufg. 15. p. 543 (1.11.2012):

Die Multiplikation $A\times A\longrightarrow A$ einer normierten $\mathbb{K}$-Algebra A ist stetig.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass jede abgeschlossene ε-Kugel des Bildraums das Bild einer abgeschlossenen Kugel (mit positivem Radius) des Urbildraums enthält (wobei die Norm auf $A\times A$ so gewählt ist, dass sie die Produkttopologie definiert). Sei also $(a,b)\in A\times A$, wobei wir auf $A\times A$ die Maximumsnorm mit $\|(x,y)\|:=\mathrm{Max}\,\big(\|x\|\,,\|y\|\big)$ wählen, und sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Sei $\delta:=\mathrm{Min}\,\big(1\,,\varepsilon/(\|a\|+\|b\|+1)\big)$. Aus $\|(x,y)-(a,b)\|:=\mathrm{Max}\,\big(\|x-a\|\,,\|y-b\|\big)\le\delta$ folgt dann zunächst $\|x\|-\|a\|\le\|x-a\|\le\delta$, also $\|x\|\le\|a\|+1$ und

$$\|xy-ab\|\le\|x(y-b)\|+\|(x-a)b\|\le\|x\|\|y-b\|+\|x-a\|\|b\|\le(\|a\|+1)\delta+\delta\|b\|\le\varepsilon\,.$$ •

Abschnitt 17.A, Aufg. 18, p. 543 (1.11.2012):

Für Vektoren x_1,x_2,x_3,x_4 eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums gilt

$$\|x_1-x_3\|+\|x_2-x_4\|\le\|x_1-x_2\|+\|x_2-x_3\|+\|x_3-x_4\|+\|x_4-x_1\|\,.$$

(Die Summe der Längen der beiden Diagonalen eines beliebigen Vierecks ist kleiner-gleich der Summe der Längen der vier Seiten.)

Beweis: Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\|x_1-x_3\|\ge\|x_2-x_4\|$ annehmen. Dann bekommt man durch zweimaliges Anwenden der Dreiecksungleichung:

$$\|x_1-x_2\|+\|x_2-x_3\|+\|x_3-x_4\|+\|x_4-x_1\|\ge\|x_1-x_3\|+\|x_3-x_1\|\ge\|x_1-x_3\|+\|x_2-x_4\|\,.$$ •

Abschnitt 17.B, Aufg. 1. p. 553 (1.11.2012):

Sind V und W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume, ist V nicht endlichdimensional und ist $W\neq 0$, so ist $\mathrm{L}_{\mathbb{K}}(V,W)\neq\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$.

Beweis: Nach Satz 3.A.18 besitzt V eine Basis v_i, $i\in I$. Indem wir jedes v_i durch $v_i/\|v_i\|$ ersetzen, können wir $\|v_i\|=1$ für alle $i\in I$ annehmen. Da V nicht endlichdimensional ist, ist I eine unendliche Menge. Für jede nicht beschränkte Familie $(a_i)\in\mathbb{K}^I$ und jedes $w\in W$, $w\neq 0$, ist dann die durch $f(v_i):=a_iw$, $i\in I$, definierte lineare Abbildung $f:V\to W$ nicht stetig, da das f-Bild der Einheitskugel $\overline{\mathrm{B}}_V(0\,;1)$ eine nicht beschränkte Menge in W ist, vgl. Satz 17.B.1. •

Abschnitt 17.B, Aufg. 2. p. 553 (1.11.2012):

a) Seien $\|-\|$ und $\|-\|'$ zwei nicht äquivalente Normen auf einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gibt es eine Folge in V, die bezüglich einer der beiden Normen eine Nullfolge ist und bezüglich der anderen unbeschränkt ist.

b) Sei $f:V\to W$ eine lineare Abbildung normierter $\mathbb{K}$-Vektorräume. Genau dann ist f stetig, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V die Bildfolge $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in W beschränkt ist.

Beweis: a) Gemäß Satz 17.B.9 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass es kein $\beta\in\mathbb{R}$ gibt mit $\|x\|'\le\beta\|x\|$ für alle $x\in V$. Zu jedem $n\in\mathbb{N}^*$ gibt es dann ein $x_n\in V-\{0\}$ mit $\|x_n\|'\ge n^2\|x_n\|$. Für $y_n:=\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\|=0$ wegen $\|y_n\|=\Big\|\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}\Big\|=\dfrac{1}{n}\to 0$ bei $n\to\infty$, aber $\|y_n\|'=\Big\|\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}\Big\|'=\dfrac{\|x_n\|'}{n\|x_n\|}\ge\dfrac{n^2\|x_n\|}{n\|x_n\|}=n\to\infty$. Die Folge (y_n) ist also bzgl. $\|-\|$ eine Nullfolge, aber bzgl. $\|-\|'$ unbeschränkt.

b) Wenn f stetig ist, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f\big(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\big)=f(0)=0$ für jede Nullfolge (x_n) in V. Dann ist die Bildfolge $\big(f(x_n)\big)$ als Nullfolge in W erst recht beschränkt.

Sei umgekehrt f nicht stetig. Dann ist f nicht beschränkt, d.h. es gibt keine reelle Zahl $C>0$ mit $\|f(x)\|\le C\|x\|$ für alle $x\in V$. Zu jeder natürlichen Zahl $n\in\mathbb{N}^*$ gibt es somit ein $x_n\in V-\{0\}$ mit $\|f(x_n)\|\ge n^2\|x_n\|$.

Für die Folge (y_n) mit $x_n' := \dfrac{x_n}{n\|x_n\|} \in V$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ wegen $\|y_n\| = \Big\|\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}\Big\| = \dfrac{1}{n} \to 0$ bei $n\to\infty$, aber $\|f(y_n)\| = \Big\|f\Big(\dfrac{x_n}{n\,\|x_n\|}\Big)\Big\| = \dfrac{\|f(x_n)\|}{n\,\|x_n\|} \geq \dfrac{n^2\|x_n\|}{n\,\|x_n\|} = n \to \infty$. Daher ist (y_n) eine Nullfolge in V, deren Bildfolge unter f in W nicht beschränkt ist. – Man beachte, dass a) auch aus b) folgt. •

Abschnitt 17.B, Aufg. 3. p. 553 (1.11.2012) :

Eine Norm $\|-\|$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt feiner als die Norm $\|-\|'$ auf V, wenn es eine positive reelle Zahl β gibt mit $\|x\|' \leq \beta\,\|x\|$ für alle $x\in V$. Zwei Normen heißen vergleichbar, wenn eine der beiden feiner als die andere ist. (Zwei Normen sind also äquivalent, wenn jede davon feiner als die andere ist.)

a) Folgende Aussagen sind äquivalent: (1) $\|-\|$ ist feiner als $\|-\|'$. (2) Die Identität $V\to V$ von V ist stetig, wenn man den Urbildraum V mit der Norm $\|-\|$ und den Bildraum V mit $\|-\|'$ versieht. (3) Jede bezüglich $\|-\|$ konvergente Folge ist auch bezüglich $\|-\|'$ konvergent. (4) Jede Nullfolge bezüglich $\|-\|$ ist auch eine Nullfolge bezüglich $\|-\|'$. (5) Jede bezüglich $\|-\|$ beschränkte Menge ist auch bezüglich $\|-\|'$ beschränkt.

b) Ist $\|-\|$ feiner als $\|-\|'$, so ist jede bzgl. $\|-\|$ dichte Teilmenge von V auch dicht bzgl. $\|-\|'$.

c) Man untersuche jeweils die folgenden Normen auf Vergleichbarkeit:

(1) die euklidische Norm, die Maximumsnorm sowie die Summennorm auf $\mathbb{K}^{(I)}$, I unendlich;

(2) die Supremumsnorm, die L^2- und die L^1-Norm auf $C^0_{\mathbb{K}}([a,b])$;

(3) die Normen $\quad \operatorname{Sup}\Big\{\sum\limits_{k=0}^m |f^{(k)}(t)| \;\Big|\; t\in[a,b]\Big\} = \Big\|\sum\limits_{k=0}^m |f^{(k)}|\Big\|_\infty$, $\quad \sum\limits_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_\infty$,

$$\operatorname{Max}\big(\|f^{(0)}\|_\infty,\dots,\|f^{(m)}\|_\infty\big)\,,\quad \big\|\operatorname{Max}\big(|f^{(0)}|,\dots,|f^{(m)}|\big)\big\|_\infty\,,\quad \Big(\sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_2^2\Big)^{1/2},\quad \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_1$$

auf $C^m_{\mathbb{K}}([a,b])$, $m\in\mathbb{N}$. (Die beiden letzten Normen sind so genannte Sobolew-Normen.)

Beweis: a) (1) $\Leftrightarrow$ (2): Genau dann ist $\|-\|$ feiner als $\|-\|'$, wenn es ein $\beta\in\mathbb{R}$ gibt mit $\|x\|'\leq\beta\,\|x\|$ für alle $x\in V$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\|\mathrm{id}_V(x)\|'\leq\beta\,\|x\|$ für alle $x\in V$ ist, d.h. wenn die Identität $V\to V$ von V stetig ist, wenn man den Urbildraum V mit der Norm $\|-\|$ und den Bildraum V mit $\|-\|'$ versieht, vgl. Satz 17.B.1.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Nach ANH.B.3 ist id_V als Abbildung von V, versehen mit der Norm $\|-\|$, nach V, versehen mit der Norm $\|-\|'$, stetig in einem Punkt $x\in V$, wenn für jede Folge (x_n) in V, die bzgl. $\|-\|$ gegen $x\in V$ konvergiert, die Bildfolge $(\mathrm{id}_V(x_n)) = (x_n)$ bzgl. $\|-\|'$ gegen $\mathrm{id}_V(x) = x$ konvergiert.

(3) $\Leftrightarrow$ (4): Die Äquivalenz folgt daraus, dass eine Folge (x_n) in einem normierten Vektorraum V genau dann gegen $x\in V$ konvergiert, wenn die Folge $(x_n - x)$ eine Nullfolge in V ist.

(1) $\Rightarrow$ (5): Sei $M\subseteq V$ eine durch $C>0$ bezüglich $\|-\|$ beschränkte Menge in V. Ist nun $\|-\|$ feiner als $\|-\|'$, d.h. gibt es eine positive reelle Zahl β gibt mit $\|x\|'\leq\beta\,\|x\|$ für alle $x\in V$, so folgt für $x\in M$ aus $\|x\|\leq C$ sofort $\|x\|'\leq\beta C$, d.h. M ist auch bzgl. $\|-\|'$ beschränkt.

(5) $\Rightarrow$ (2): Nach Satz 17.B.1 ist id_V stetig, wenn id_V auf der Einheitssphäre $S(0;1)$ von V bzgl. $\|-\|$ beschränkt ist. Da diese Sphäre bzgl. $\|-\|$ durch 1 beschränkt ist, ist $\mathrm{id}_V(S(0;1)) = S(0;1)$ nach (5) aber auch bzgl. $\|-\|'$ beschränkt.

b) Sei $\|-\|$ feiner als $\|-\|'$, d.h. es gebe eine positive reelle Zahl β gibt mit $\|x\|'\leq\beta\,\|x\|$ für alle $x\in V$. $M\subseteq V$ sei eine bzgl. $\|-\|$ dichte Teimenge von V. Sei nun $x\in V$. Zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ gibt es dann ein $y\in M$ mit $\|x-y\|\leq\varepsilon/\beta$, also mit $\|x-y\|'\leq\beta\|x-y\|\leq\varepsilon$. Daher ist M auch bzgl. $\|-\|'$ dicht in V.

c) (1) Sei $(x_i)\in\mathbb{K}^{(I)}$, d.h. nur endlich viele der Komponenten $x_i\in\mathbb{K}$ seien $\neq 0$. Dann gilt: $\operatorname{Max}\{|x_i| \mid i\in I\}^2 \leq \sum\limits_{i\in I}|x_i|^2 \leq \Big(\sum\limits_{i\in I}|x_i|\Big)^2$, d.h. $\|x\|_\infty\leq\|x\|_2\leq\|x\|_1$. Die Summennorm ist also feiner als Maximumsnorm und euklidische Norm, und die euklidische Norm ist feiner als die Maximumsnorm (jeweils mit Skalierungsfaktor $\beta:=1$).

Da I unendlich ist, enthält I eine abzählbar unendliche Teilmenge $J=\{j_1,\dots,j_k,\dots\}$ mit $j_k\neq j_\ell$ für $k\neq\ell$. Setzt man dann $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i\in I}$ mit $x_i^{(n)} := 0$ für $i\in I-\{j_1,\dots,j_n\}$ und $x_i := 1$ für $i = j_k$, $1\leq k\leq n$, so gilt $\|x^{(n)}\|_\infty = 1$, $\|x^{(n)}\|_2 = \sqrt{n}$ und $\|x^{(n)}\|_1 = n$. Für $n \to \infty$ sieht man, dass es kein $\beta \in \mathbb{R}$ geben kann mit $\|x\|_1 \le \beta\|x\|_2$ bzw. $\|x\|_1 \le \beta\|x\|_\infty$ bzw. $\|x\|_2 \le \beta\|x\|_\infty$. Daher sind weder euklidische Norm noch Maximumsnorm feiner als die Summennorm, und die Maximumsnorm ist auch nicht feiner als die euklidische Norm.

(2) Die L^2-Norm ist feiner als die L^1-Norm: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert nämlich

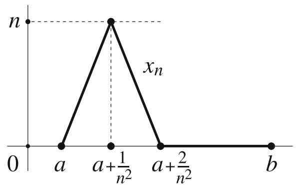
$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,dt = \int_a^b 1\cdot|x(t)|\,dt = \langle 1\,,\,|x|\rangle_2 \le \|1\|_2\,\|x\|_2 = \sqrt{b-a}\cdot\|x\|_2\,.$$

Die Supremumsnorm $\|-\|_\infty$ ist feiner als $\|-\|_2$: Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert nämlich

$$\|x\|_2 = \Big(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \le \big((b-a)\,\|x(t)\|_\infty^2\big)^{1/2} = \sqrt{b-a}\cdot\|x\|_\infty\,.$$

Natürlich ist dann die Supremumsnorm $\|-\|_\infty$ auch feiner als die L^1-Norm (wegen $\|x\|_1 \le (b-a)\cdot\|x\|_\infty$). Wir betrachten nun für $n > \sqrt{2/(b-a)}$ die stetigen Funktionen $x_n : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$x_n(t) := \begin{cases} n^3(t-a) & \text{für } a \le t \le a+(1/n^2)\,,\\ 2n-n^3(t-a) & \text{für } a+(1/n^2) \le t \le a+(2/n^2)\,,\\ 0 & \text{für } a+(2/n^2) \le t \le b\,.\end{cases}$$



Dann ist $\|x_n\|_2 = \Big(\int_a^b |x_n(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} = \Big(2\int_a^{a+1/n^2} n^6(t-a)^2\,dt\Big)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\|x_n\|_\infty = n$ und $\|x_n\|_1 = \int_0^1 |x_n(t)|\,dt = 2\int_a^{a+1/n^2} n^3(t-a)\,dt = \frac{1}{n}$. Es gibt also kein $\beta > 0$ mit $\|x_n\|_\infty \le \beta\,\|x_n\|_2$ und kein $\beta' > 0$ mit $\|x_n\|_2 \le \beta'\,\|x_n\|_1$ für alle n, d.h. die L^2-Norm ist nicht feiner als die Supremumsnorm und die L^1-Norm ist nicht feiner als die L^2-Norm.

(3) Es gilt

$$\begin{aligned}&\mathrm{Max}\big(\|f^{(0)}\|_\infty,\dots,\|f^{(m)}\|_\infty\big) = \mathrm{Max}\big(\mathrm{Sup}\,\{|f^{(0)}(t)| \mid t\in[a,b]\},\dots,\mathrm{Sup}\,\{|f^{(m)}(t)| \mid t\in[a,b]\}\big)\\ &= \mathrm{Sup}\,\big\{\mathrm{Max}\big(|f^{(0)}(t)|,\dots,|f^{(m)}(t)|\big) \bigm| t\in[a,b]\big\} = \big\|\mathrm{Max}\big(|f^{(0)}|,\dots,|f^{(m)}|\big)\big\|_\infty\end{aligned}$$

Die ersten vier der angegebenen Normen sind nun äquivalent wegen

$$\mathrm{Max}\big(\|f^{(0)}\|_\infty,\dots,\|f^{(m)}\|_\infty\big) \le \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_\infty \le (m+1)\,\mathrm{Max}\big(\|f^{(0)}\|_\infty,\dots,\|f^{(m)}\|_\infty\big)\,,$$

$$\big\|\mathrm{Max}\big(|f^{(0)}|,\dots,|f^{(m)}|\big)\big\|_\infty \le \Big\|\sum_{k=0}^m |f^{(k)}|\,\Big\|_\infty \le (m+1)\,\big\|\mathrm{Max}\big(|f^{(0)}|,\dots,|f^{(m)}|\big)\big\|_\infty\,.$$

Die fünfte Norm ist feiner als die sechste Norm: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert nämlich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_1 &= \sum_{k=0}^m \int_a^b |f^{(k)}(t)|\,dt = \sum_{k=0}^m \int_a^b 1\cdot|f^{(k)}(t)|\,dt = \sum_{k=0}^m \langle 1\,,\,|f^{(k)}|\rangle_2 \le \sum_{k=0}^m \|1\|_2\cdot\|f^{(k)}\|_2\\ &= \sqrt{b-a}\cdot\sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_2 = \sqrt{b-a}\cdot\big\langle (1,\dots,1)\,,\,\big(\|f^{(0)}\|_2,\dots,\|f^{(m)}\|_2\big)\big\rangle_2\\ &= \sqrt{b-a}\cdot\|(1,\dots,1)\|_2\cdot\big\|\big(\|f^{(0)}\|_2,\dots,\|f^{(m)}\|_2\big)\big\|_2 = \sqrt{(m+1)(b-a)}\cdot\Big(\sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_2^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Die Norm $\operatorname{Max}\big(\|f^{(0)}\|_\infty, \ldots, \|f^{(m)}\|_\infty\big)$ ist feiner als die Norm $\Big(\sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_2^2\Big)^{1/2}$ (und damit auch als die Norm $\sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_1$): Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert nämlich

$$\Big(\sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_2^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=0}^m \int_a^b |f^{(k)}(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \le \Big((b-a)\sum_{k=0}^m \operatorname{Max}\big(\|f^{(0)}\|_\infty^2, \ldots, \|f^{(m)}\|_\infty^2\big)\Big)^{1/2}$$
$$= \sqrt{(m+1)(b-a)}\cdot \operatorname{Max}\big(\|f^{(0)}\|_\infty, \ldots, \|f^{(m)}\|_\infty\big).$$

Zwischen den drei zuletzt betrachteten Normen gibt es keine weiteren Feiner-Beziehungen. Als Beispiele betrachten wir die stückweise m-mal stetig differenzierbaren Funktionen x_n aus (2) (die sich durch geeignetes "Glätten" der Knickstellen zu C^m-Funktionen abändern lassen). Dafür gilt nämlich (bei $m \ge 1$) $\Big(\sum_{k=0}^m \|x_n^{(k)}\|_2^2\Big)^{1/2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}+n^2}$ sowie $\operatorname{Max}\big(\|x_n^{(0)}\|_\infty, \ldots, \|x_n^{(m)}\|_\infty\big) = n+n^3$ und $\sum_{k=0}^m \|x_n^{(k)}\|_1 = \tfrac{1}{n}+n$. •

Abschnitt 17.B, Aufg. 4. p. 554 (1.11.2012):

Eine stetige additive Abbildung $f: V \to W$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorräume ist $\mathbb{R}$-linear.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in V$. Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$ zeigen wir $f(nx) = nf(x)$ für alle $x \in V$. Es ist $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$, also $f(0\cdot x) = f(0) = 0 = 0\cdot f(x)$, und der Schluss von n auf $n+1$ folgt wegen $f\big((n+1)x\big) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x)+f(x) = (n+1)f(x)$. Außerdem gilt $0 = f(0) = f(x-x) = f(x)+f(-x)$, also $f(-x) = -f(x)$. Ferner ist $f(x) = f(m\cdot\frac{1}{m}x) = mf\big(\frac{1}{m}x\big)$, also $f\big(\frac{1}{m}x\big) = \frac{1}{m}x$ bei $m \ne 0$, und somit insgesamt $f(qx) = qf(x)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in V$.

Ist nun $r \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es, da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist, eine Folge q_n rationaler Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} q_n = r$. Die Stetigkeit von f liefert wie gewünscht $f(rx) = f(\lim_{n\to\infty} q_n x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n x) = \lim_{n\to\infty} q_n f(x) = rf(x)$. •

Das Ergebnis der Aufgabe besagt insbesondere, dass *eine additive Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorräume notwendigerweise $\mathbb{R}$-linear ist.*

Abschnitt 17.B, Aufg. 5. p. 554 (1.11.2012):

Der Differenziationsoperator $D: \mathrm{C}^1_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big) \to \mathrm{C}^0_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big)$ ist stetig, wenn die beiden Räume jeweils mit den Normen aus 17.A, Aufg. 6b) versehen werden.

Beweis: Es gilt $\|D(x)\|_\infty = \|\dot{x}\|_\infty = \operatorname{Sup}\big\{|\dot{x}(t)| \;\big|\; t \in [a,b]\big\} \le \operatorname{Sup}\big\{|x(t)| + |\dot{x}(t)| \;\big|\; t \in [a,b]\big\}$ für $x \in \mathrm{C}^1_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big)$, d.h. es ist $\|D\| \le 1$ und D ist beschränkt, also stetig. •

Abschnitt 17.B, Aufg. 13. p. 556 (1.11.2012):

Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt und $f: V \to W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung, für die die adjungierte Abbildung $\hat{f}: W \to V$ existiert. Dann gilt $\|f\| = \|\hat{f}\|$. Genau dann ist f stetig, wenn $\hat{f}f$ stetig ist. Insbesondere ist ein selbstadjungierter Operator g auf V genau dann stetig, wenn g^2 stetig ist. Ist V nicht endlichdimensional, so gibt es stets nicht stetige Operatoren g auf V derart, dass g^2 stetig ist.

Beweis: Für $x \in V$ gilt $\|\hat{f}(x)\|^2 = \big\langle \hat{f}(x), \hat{f}(x)\big\rangle = \langle x, f\hat{f}(x)\rangle \le \|x\|\,\|f\hat{f}(x)\| \le \|x\|\,\|f\|\,\|\hat{f}(x)\|$ und somit $\|\hat{f}(x)\| \le \|f\|\,\|x\|$. Es folgt $\|\hat{\hat{f}}\| \le \|f\|$ und $\|f\| = \|\hat{\hat{f}}\| \le \|\hat{f}\|$, also insgesamt $\|\hat{f}\| = \|f\|$. Insbesondere ist mit f auch $\hat{f}f$ stetig sowie f^2 bei $f = \hat{f}$.

Ist umgekehrt $\|\hat{f}f\| < \infty$, so gilt $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, \hat{f}f(x)\rangle \le \|x\|\|\hat{f}f(x)\| \le \|x\|\|\hat{f}f\|\|x\|$ für $x \in V$ und somit $\|f(x)\| \le \sqrt{\|\hat{f}f\|}\cdot\|x\|$, d.h. $\|f\| \le \sqrt{\|\hat{f}f\|} < \infty$, und f ist stetig.

Sei V nun unendlichdimensional. Ähnlich wie in Aufg. 1 konstruiert man eine nicht stetige lineare Abbildung $g: V \to V$, deren Quadrat g^2 sogar 0 ist. •

Abschnitt 17.B, Teil von **Aufg. 14**. p. 556 (1.11.2012):

Sei V ein endlichdimensionaler Hilbert-Raum.

a) Für ein $f \in V^* = V'$ ist $\|f\| = \|\mathrm{grad}\, f\|$. Die Norm auf V^* rührt ebenfalls von einem Skalarprodukt her. Ist v_i, $i \in I$, eine Orthonormalbasis von V, so ist die Dualbasis v_i^*, $i \in I$, eine Orthonormalbasis von V^* bezüglich des in dieser Weise assoziierten Skalarprodukts auf V^*. (Ein ähnliches Resultat gilt für V' auch dann, wenn V ein beliebiger Hilbert-Raum ist, vgl. 19.A.9.)

b) Für einen Operator $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V = \mathrm{L}_{\mathbb{K}}(V)$ mit dem adjungierten Operator $\hat{f}$ ist $\|f\| = \sqrt{c}$, wobei c der größte Eigenwert von $\hat{f} f$ ist. (Da $\hat{f} f$ und $f \hat{f}$ dieselben Eigenwerte haben, folgt insbesondere $\|f\| = \|\hat{f}\|$, vgl. auch Aufg. 13. Ferner ist für einen selbstadjungierten Operator f auf V die Norm $\|f\|$ von f gleich dem Maximum der Beträge der Eigenwerte von f. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt dies allgemeiner für normale Operatoren auf V.)

c) Auf $\mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ wird durch $\langle f, g\rangle := \mathrm{Sp}\, \hat{g} f = \mathrm{Sp}\, f \hat{g}$ ein Skalarprodukt definiert. Die zugehörige Norm

$$\|f\|_{\mathrm{H}} = \big(\mathrm{Sp}\, \hat{f} f\big)^{1/2} = \big(\mathrm{Sp}\, f \hat{f}\big)^{1/2}$$

heißt die Hilbert-Raum-Norm auf $\mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, vgl. Beispiel 15.C.6. Es ist $\|f\| \le \|f\|_{\mathrm{H}}$ für alle $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\mathrm{Rang}\, f \le 1$ ist.

d) Ist $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}} V \ge 2$, so rührt die Operatornorm $\|-\|$ auf $\mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ nicht von einem Skalarprodukt her.

Beweis: a) *Für $f \in V^* = V'$ ist $\|f\| = \|\mathrm{grad}\, f\|$*: Aus $\|\mathrm{grad}\, f\|^2 = \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f\rangle = |f(\mathrm{grad}\, f)| \le \|f\|\|\mathrm{grad}\, f\|$ folgt nämlich $\|\mathrm{grad}\, f\| \le \|f\|$ (auch bei $\mathrm{grad}\, f = 0$). Umgekehrt gilt $|f(x)| = |\langle x, \mathrm{grad}\, f\rangle| \le \|x\|\|\mathrm{grad}\, f\|$ für alle $x \in V$, d.h. $\|f\| \le \|\mathrm{grad}\, f\|$.

Die Norm auf V^* rührt von einem Skalarprodukt her: Für $f, g \in V^*$ gilt $\mathrm{grad}\, f + \mathrm{grad}\, g = \mathrm{grad}(f+g)$ wegen $\langle x, \mathrm{grad}\, f + \mathrm{grad}\, g\rangle = \langle x, \mathrm{grad}\, f\rangle + \langle x, \mathrm{grad}\, g\rangle = f(x) + g(x) = (f+g)(x) = \langle x, \mathrm{grad}\,(f+g)\rangle$ für alle $x \in V$. Ist ferner $a \in \mathbb{K}$, so hat man $\langle x, \mathrm{grad}(af)\rangle = (af)(x) = af(x) = a\langle x, \mathrm{grad}\, f\rangle = \langle x, \overline{a}\, \mathrm{grad}\, f\rangle$, also $\mathrm{grad}\,(af) = \overline{a}\, \mathrm{grad}\, f$. Dann wird durch

$$\langle f, g\rangle := \langle \mathrm{grad}\, g, \mathrm{grad}\, f\rangle\,, \qquad f, g \in V^*,$$

ein Skalarprodukt $\langle -, -\rangle$ auf V^* definiert, für das $\sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f\rangle} = \|\mathrm{grad}\, f\|$ nach dem bereits Gezeigten die Operatornorm $\|f\|$ ist. Die Symmetrie von $\langle -, -\rangle$ und die Additivität in beiden Komponenten folgt dabei aus den entsprechenden Eigenschaften des Skalarprodukts von V. Außerdem gilt $\langle af, g\rangle = \langle \mathrm{grad}\, g, \mathrm{grad}\,(af)\rangle = \langle \mathrm{grad}\, g, \overline{a}\, \mathrm{grad}\, f\rangle = a\langle \mathrm{grad}\, g, \mathrm{grad}\, f\rangle = a\langle f, g\rangle$ und $\langle f, ag\rangle = \langle \mathrm{grad}\,(ag)\,, \mathrm{grad}\, f\rangle = \langle \overline{a}\, \mathrm{grad}\, g, \mathrm{grad}\, f\rangle = \overline{a}\langle \mathrm{grad}\, g, \mathrm{grad}\, f\rangle = \overline{a}\langle f, g\rangle$. (Das Skalarprodukt auf V^* wird also durch Zurücknehmen des Skalarprodukts von V mittels des antilinearen Isomorphismus $\mathrm{grad} : V^* \to V$ gewonnen.)

Sei v_i, $i \in I$, eine Orthonormalbasis von V. Dann ist die Dualbasis v_i^*, $i \in I$, eine Orthonormalbasis von V^*: Es gilt $v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \langle v_j, v_i\rangle$ für alle $i, j \in I$, also $v_i^*(x) = \langle x, v_i\rangle$ für alle $x \in V$ und somit $\mathrm{grad}\, v_i^* = v_i$. Damit folgt wie behauptet $\langle v_i^*, v_j^*\rangle = \langle \mathrm{grad}\, v_j^*, \mathrm{grad}\, v_i^*\rangle = \langle v_j, v_i\rangle = \delta_{ji}$.

b) Wir betrachten die nichtnegative hermitesche Form Φ auf V mit $\Phi(x, y) := \langle x, \hat{f} f(y)\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$. Das Maximum der Rayleigh-Quotienten $\Phi(x, x)/\langle x, x\rangle = \|f(x)\|^2/\|x\|^2 = \|f(x)\|^2$ auf der kompakten Einheitskugel $\mathrm{S}(0\,;1)$ ist nach Satz 15.B.5 der größte Hauptwert von Φ, also der größte Eigenwert c von $\hat{f} f$. Andererseits ist das Maximum von $\|f(x)\|$ auf $\mathrm{S}(0\,;1)$ definitionsgemäß gleich $\|f\|$. Es folgt $\|f\| = \sqrt{c}$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und f normal, so ist f nach dem Spektralsatz 15.A.15 diagonalisierbar in einer Orthonormalbasis v_i, $i \in I$, aus Eigenvektoren zu Eigenwerten c_i, $i \in I$. Dann wird $\hat{f}$ in dieser Basis durch die konjugiert transponierte Matrix beschrieben, d.h. es ist $\hat{f}(v_i) = \overline{c}_i v_i$ und somit $\hat{f} f(v_i) = |c_i|^2 v_i$. $\hat{f}$ hat also die Eigenwerte $|c_i|^2$, und das Maximum der $|c_i|$ ist nach dem Bewiesenen gleich $\|f\|$.

c) Wegen
$$\begin{aligned}
\langle f_1 + f_2\,, g\rangle &= \mathrm{Sp}\,(f_1 + f_2)\hat{g} = \mathrm{Sp}\, f_1\hat{g} + \mathrm{Sp}\, f_2\hat{g} = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle\,,\\
\langle f, g_1 + g_2\rangle &= \mathrm{Sp}\, f\, \widehat{g_1 + g_2} = \mathrm{Sp}\, f\hat{g}_1 + \mathrm{Sp}\, f\hat{g}_2 = \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle\,,\\
\langle af, g\rangle &= \mathrm{Sp}\, af\hat{g} = a\, \mathrm{Sp}\, f\hat{g} = a\langle f, g\rangle\,,\\
\langle f, ag\rangle &= \mathrm{Sp}\, f\widehat{ag} = \mathrm{Sp}\, f\,\overline{a}\,\hat{g} = \overline{a}\, \mathrm{Sp}\, f\hat{g} = \overline{a}\langle f, g\rangle
\end{aligned}$$

für $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, $a \in \mathbb{K}$ ist $\langle -, -\rangle$ sesquilinear.

Da die Matrix von $\hat{f}$ bzgl. einer Orthonormalbasis von V nach 15.A.5 aus der von f durch Transponieren und Queren hervorgeht, gilt $\operatorname{Sp}\hat{f} = \overline{\operatorname{Sp} f}$. Es folgt $\overline{\langle g, f\rangle} = \overline{\operatorname{Sp}\hat{f} g} = \operatorname{Sp}\widehat{\hat{f} g} = \operatorname{Sp}\hat{g} f = \langle f, g\rangle$, dh. $\langle -, -\rangle$ ist auch hermitesch. Da $\hat{f} f$ ein semipositiver Operator ist, ist $\hat{f} f$ diagonalisierbar mit nichtnegativen Eigenwerten. Genau dann ist also $\langle f, f\rangle = 0$, wenn $\operatorname{Sp}\hat{f} f$, also die Summe dieser Eigenwerte, gleich 0 ist. Dann sind diese Eigenwerte aber schon selber 0, und es folgt $f = 0$. Insgesamt ist $\langle -, -\rangle$ also ein Skalarprodukt.

Da $\|f\|^2$ nach b) der größte Eigenwert von $\hat{f} f$ ist und $\|f\|_{\mathrm{H}}^2$ die Summe aller dieser Eigenwerte (in ihrer Vielfachheit gezählt), gilt $\|f\| \le \|f\|_{\mathrm{H}}$. Genau dann gilt dabei das Gleichheitszeichen, wenn es außer dem größten Eigenwert der selbstadjungierten Abbildung $\hat{f} f$ keine weiteren Eigenwerte $\neq 0$ gibt, d.h. wenn $\operatorname{Rang}\hat{f} f \le 1$ ist. Dies ist nach dem Rangsatz genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Dim}\operatorname{Kern}(\hat{f} f) \ge \operatorname{Dim} V - 1$ ist. Nach 15.A, Aufg. 7 ist aber $\operatorname{Kern}(\hat{f} f) = \operatorname{Kern} f$. Also gilt $\|f\| = \|f\|_{\mathrm{H}}$ genau dann, wenn $\operatorname{Rang} f \le 1$ ist.

d) Wir wählen eine Orthonormalbasis v_i, $i \in I$. Wegen $|I| = \operatorname{Dim}_{\mathbb{K}} V \ge 2$ gibt es eine Zerlegung $I = I_1 \uplus I_2$ von I in zwei nichtleere disjunkte Teilmengen I_1 und I_2. Dann definieren wir durch $f(v_i) := v_i$ für $i \in I_1$, $f(v_i) := 0$ für $i \in I_2$ bzw. $g(v_i) := 0$ für $i \in I_1$, $g(v_i) := -v_i$ für $i \in I_2$ zwei Abbildungen $f, g : V \to V$. Dann sind $f, g, f+g, f-g$ diagonalisierbar, in ihrer Hauptdiagonale stehen nur die reellen Diagonalelemente $1, 0, -1$, d.h. diese Abbildungen sind selbstadjungiert und ihre Operatornorm ist nach b) jeweils das Maximum der Beträge der Eigenwerte. Es gilt also nach Konstruktion $\|f\| = \|g\| = \|f+g\| = \|f-g\| = 1$. Daher gilt für dieses Beispiel $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 1^2+1^2 = 2 \neq 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 = 4$, und die Parallelogrammregel ist verletzt. Nach Satz 17.A.4 rührt die Operatornorm auf V somit nicht von einem Skalarprodukt her. •

Abschnitt 17.B, Aufg. 15. p. 557 (1.11.2012) :

Sei $\|-\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Diese Norm induziert auf dem Raum $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ der $n\times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ eine Norm durch $\|\mathfrak{A}\| := \|f_{\mathfrak{A}}\|$, $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, wobei $f_{\mathfrak{A}}$ der Operator $x \mapsto \mathfrak{A}x$ auf $\mathbb{K}^n$ mit der Matrix $\mathfrak{A}$ bezüglich der Standardbasis ist. Aus 17.B.4 folgt dann insbesondere $|\lambda| \le \|\mathfrak{A}\|$ für jeden Eigenwert λ von $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Überdies bemerken wir, dass nach 11.A, Aufg. 41 jeder Eigenwert von $\mathfrak{A}$ sowohl in der Vereinigung der Kreise $\overline{\mathrm{B}}\big(a_{ii}\,;\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\big)$, $i = 1, \ldots, n$, als auch in der Vereinigung der Kreise $\overline{\mathrm{B}}\big(a_{jj}\,;\sum_{i\neq j}|a_{ij}|\big)$, $j = 1, \ldots, n$, liegt. – Wendet man diese Ergebnisse auf die Begleitmatrix

$$\mathfrak{A}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

eines Polynoms $F = a_0 + a_1X + \cdots + X^n \in \mathbb{K}[X]$ an (vgl. Beispiel 11.A.23), so gewinnt man Aussagen über die Lage der Nullstellen eines solchen Polynoms. Häufig ist es auch nützlich, statt der Matrix $\mathfrak{A}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die verschobene Matrix $\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{E}_n$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 - \lambda, \ldots, \lambda_n - \lambda$ zu betrachten (S p e k t r a l v e r s c h i e b u n g). Zum Beispiel bietet sich das Zentrieren auf den Schwerpunkt

$$\lambda := \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \frac{1}{n}\operatorname{Sp}\mathfrak{A}$$

der Eigenwerte an. Die Matrix $\mathfrak{A} - \frac{1}{n}(\operatorname{Sp}\mathfrak{A})\,\mathfrak{E}_n$ ist s p u r l o s, d.h. ihre Spur ist 0.

a) Ist $\|-\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{K}^n$, so ist $\|\mathfrak{A}\| = \sqrt{c}$, wobei c der größte Eigenwert von ${}^t\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}$ ist.

b) Ist $\|-\| = \|-\|_\infty$ die Maximumsnorm auf $\mathbb{K}^n$, so ist $\|\mathfrak{A}\|$ das Maximum der Summennormen $\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, $i = 1, \ldots, n$, der Zeilen von $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (Z e i l e n s u m m e n n o r m).

c) Ist $\|-\| = \|-\|_1$ die Summennorm auf $\mathbb{K}^n$, so ist $\|\mathfrak{A}\|$ das Maximum der Summennormen $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, $j = 1, \ldots, n$, der Spalten von $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (S p a l t e n s u m m e n n o r m).

Beweis: Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Die euklidische Norm auf $\mathbb{K}^n$ rührt vom euklidischen Skalarprodukt her. Da $\hat{f}_{\mathfrak{A}} f_{\mathfrak{A}}$ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ durch die Matrix ${}^t\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}$ beschrieben wird, ist $\|f_{\mathfrak{A}}\|$ nach Aufg.14b) gleich $\sqrt{c}$, wo c der größte Eigenwert von ${}^t\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}$ ist.

b) Bezgl. der Norm $\|-\|_\infty$ ist $\|\mathfrak{A}\| \le \|\mathfrak{A}\|_z := \operatorname{Max}\left\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \;\middle|\; i=1,\dots n\right\}$. Für $\mathfrak{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{A}\mathfrak{x}\|_\infty &= \operatorname{Max}\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \;\middle|\; i=1,\dots n\right\} \le \operatorname{Max}\left\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,|x_j| \;\middle|\; i=1,\dots n\right\}\\ &\le \operatorname{Max}\left\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,\|\mathfrak{x}\|_\infty \;\middle|\; i=1,\dots n\right\} = \operatorname{Max}\left\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \;\middle|\; i=1,\dots n\right\}\cdot\|\mathfrak{x}\|_\infty = \|\mathfrak{A}\|_z\,\|\mathfrak{x}\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Ist $\|\mathfrak{A}\|_z = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}|$, d.h. wird das zugehörige Maximum in der i_0-ten Zeile von $\mathfrak{A}$ angenommen, und ist $\mathfrak{y} = {}^t(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n$ mit $y_j := \overline{a_{i_0j}}\big/|a_{i_0j}|$, falls $a_{i_0j} \ne 0$ ist, und $y_j := 0$ sonst, so gilt in jedem dieser beiden Fälle $a_{i_0j}\,y_j = |a_{i_0j}|$ und ferner $\|\mathfrak{y}\|_\infty = 1$ (bei $\mathfrak{A} \ne 0$). Daraus folgt $\|\mathfrak{A}\| \ge \|\mathfrak{A}\|_z$ wegen

$$\|\mathfrak{A}\mathfrak{y}\|_\infty = \operatorname{Max}\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\,y_j\right| \;\middle|\; i=1,\dots,n\right\} \ge \left|\sum_{j=1}^n a_{i_0j}\,y_j\right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| = \|\mathfrak{A}\|_z = \|\mathfrak{A}\|_z\,\|\mathfrak{y}\|_\infty\,.$$

c) Bzgl. der Norm $\|-\|_1$ ist $\|\mathfrak{A}\| \le \|\mathfrak{A}\|_s := \operatorname{Max}\left\{\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \;\middle|\; j=1,\dots n\right\}$. Für $\mathfrak{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt nämlich

$$\|\mathfrak{A}\mathfrak{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \le \sum_{j=1}^n |x_j|\,\|\mathfrak{A}\|_s = \|\mathfrak{A}\|_s\,\|\mathfrak{x}\|_1\,.$$

Ist $\|\mathfrak{A}\|_s = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$, d.h. wird das zugehörige Maximum in der j_0-ten Spalte von $\mathfrak{A}$ angenommen, und ist $\mathfrak{e}_{j_0}$ der j_0-te Standardbasisvektor, so gilt $\|\mathfrak{e}_{j_0}\|_1 = 1$ und $\|\mathfrak{A}\mathfrak{e}_{j_0}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = \|\mathfrak{A}\|_s = \|\mathfrak{A}\|_s\,\|\mathfrak{e}_{j_0}\|_1$, also $\|\mathfrak{A}\|_s \le \|\mathfrak{A}\|$. •

Abschnitt 17.B, Aufg. 26. p. 559 (1.11.2012):

$f: V \to W$ sei eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung normierter $\mathbb{K}$-Vektorräume und $U \subseteq \operatorname{Kern} f$ sei ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt $\|f\| = \|\overline{f}\|$ für die induzierte lineare Abbildung $\overline{f}: V/U \to W$.

Beweis: Gemäß 17.A, Aufg. 10a) wird die Norm $\|-\|$ auf $\overline{V} := V/U$ definiert durch

$$\|\overline{x}\| := d(U,x) = \operatorname{Inf}\left\{\|x-u\| \;\middle|\; u \in U\right\} = \operatorname{Inf}\left\{\|y\| \;\middle|\; y \in \overline{x} = x+U\right\} \quad \text{für} \quad x \in V\,.$$

Insbesondere ist $\|\overline{x}\| \le \|x\|$. Da definitionsgemäß $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ ist, gilt $\|f(x)\| = \|\overline{f}(\overline{x})\| \le \|\overline{f}\|\|\overline{x}\| \le \|\overline{f}\|\|x\|$, also $\|f\| \le \|\overline{f}\|$. Für beliebige Elemente $y \in \overline{x}$ gilt $\|\overline{f}(\overline{x})\| = \|f(y)\| \le \|f\|\|y\|$ und somit $\|\overline{f}(\overline{x})\| \le \|f\| \operatorname{Inf}\left\{\|y\| \;\middle|\; y \in \overline{x}\right\} = \|f\|\|\overline{x}\|$. Dies liefert $\|\overline{f}\| \le \|f\|$, insgesamt also $\|\overline{f}\| = \|f\|$ •

Abschnitt 17.B, Aufg. 27. p. 559 (1.11.2012):

V sei ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $f: U \to \mathbb{K}$ eine stetige Linearform. Dann lässt f sich zu einer stetigen Linearform $g: V \to \mathbb{K}$ mit $\|g\| = \|f\|$ fortsetzen. (Eine stetige lineare Abbildung $f: U \to W$ lässt sich auch dann zu einer stetigen linearen Abbildung $g: V \to W$ fortsetzen, falls W nur endlichdimensional ist, *in der Regel jedoch* nicht, *ohne dabei die Norm zu vergrößern. Für ein Beispiel siehe Band 4, 6.B, Aufg. 1e).)*

Beweis: U ist ein dichter Unterraum des Abschlusses $\overline{U}$ von U in V. Daher lässt sich $f: U \to \mathbb{K}$ nach Satz 17.B.6 zu einer eindeutig bestimmten stetigen Linearform auf $\overline{U}$ mit derselben Norm wie f fortsetzen. Wir können daher gleich annehmen, dass U selbst in V abgeschlossen ist.

Bei $f = 0$ können wir $g = 0$ nehmen. Sei also $f \ne 0$. Dann ist $\operatorname{Kern} f$ eine abgeschlossene Hyperebene in V, d.h. es ist $V/\operatorname{Kern} f = \mathbb{K}\overline{y}$ mit einem $y \notin \operatorname{Kern} f$ aus V. Indem wir $y/\|\overline{y}\|$ statt y betrachten, können wir noch $\|\overline{y}\| = 1$ annehmen. Nach Aufg. 26 ist dann $\|f\| = \|\overline{f}\| = |\overline{f}(\overline{y})| = |f(y)|$. Der Satz 17.B.19 liefert eine stetige Linearform $e: V/\operatorname{Kern} f \to \mathbb{K}$ mit $e(\overline{y}) = \|\overline{y}\| = 1$ und $\|e\| = 1$. Für die stetige Linearform $g: V \to \mathbb{K}$ mit $g(x) := f(y)\,e(\overline{x})$ auf V gilt dann $g(y) = f(y)\,e(\overline{y}) = f(y)$, d.h. g setzt f auf V fort. Außerdem ist $\|g\| = \|\overline{g}\| = \|f(y)\,e\| = |f(y)|\,\|e\| = |f(y)| = \|f\|$.

Ist W n-dimensional, d.h. $W \cong \mathbb{K}^n$, so ist für einen normierten Vektorraum X eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $h: X \to W$ dasselbe wie ein n-Tupel $(h_1,\dots,h_n)$ von Linearformen $X \to \mathbb{K}$, wobei h genau dann stetig ist, wenn die Komponentenabbildungen h_i alle stetig sind. Die Behauptung für W folgt dann direkt aus dem Bewiesenen. Die Norm einer Fortsetzung g ist natürlich mindestens so groß, wie die Norm von f. •

Bemerkung. Vielfach heißt auch die bewiesene allgemeinere Version von 17.B.19 der Satz von Hahn-Banach.

Abschnitt 17.B, Aufg. 28. p. 559 (1.11.2012) :

Seien V ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Ein Vektor $x \in V$ gehört genau dann zur abgeschlossenen Hülle $\overline{U}$ von U in V, wenn jede stetige Linearform, die auf U verschwindet, auch auf x verschwindet. $\overline{U}$ ist also der Durchschnitt der abgeschlossenen Hyperebenen in V, die U umfassen.

Beweis: Sei $x \in \overline{U}$ und $f \in V'$ eine stetige Linearform, die auf U verschwindet. Dann gibt es eine Folge (x_n) in U mit $\lim x_n = x$, und es gilt $f(x_n) = 0$. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 0$. Oder: Der Kern einer stetigen linearen Abbildung ist abgeschlossen und enthält daher mit U auch $\overline{U}$.

Sei nun $x \in V - \overline{U}$. Dann gilt $\overline{U} \cap \mathbb{K}x = 0$ und $d(\overline{U}, x) > 0$. Gäbe es nämlich eine Folge (x_n) in $\overline{U}$ mit $\lim d(x_n, x) = 0$, so wäre $x = \lim x_n \in \overline{U}$, da $\overline{U}$ abgeschlossen ist. Durch $f(u + rx) := r$ für $u \in \overline{U}$ und $r \in \mathbb{K}$ ist eine Linearform f auf dem Unterraum $\overline{U} \oplus \mathbb{K}x$ von V wohldefiniert. f ist stetig mit Norm $\leq 1/d(\overline{U}, x)$. Für $r \in \mathbb{K}$, also $-u/r \in \overline{U}$, gilt nämlich

$$|f(u+rx)| = |r| = \frac{|r|}{d(\overline{U}, x)}\, d(\overline{U}, x) \leq \frac{|r|}{d(\overline{U}, x)}\, \|-\frac{1}{r}u - x\| = \frac{1}{d(\overline{U}, x)}\, \|u+rx\|\,.$$

(In der Tat ist sogar $\|f\| = 1/d(\overline{U}, x)$.) Nach Aufg. 27 lässt sich f zu einer stetigen Linearform $g : V \to \mathbb{K}$ fortsetzen. Nach Konstruktion verschwindet g wie f auf $\overline{U}$ und hat auf x den Wert 1. Kern g ist eine abgeschlossene Hyperfläche in V, die $\overline{U}$ enthält, nicht aber x. •

Abschnitt 17.B, Aufg. 29. p. 559 (1.11.2012) :

Sei U ein abgeschlossener Unterraum des normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die kanonische Sequenz

$$0 \longrightarrow (V/U)' \xrightarrow{\ \pi'\ } V' \xrightarrow{\ \iota'\ } U' \longrightarrow 0$$

der stetigen Duale exakt: π' ist eine normerhaltende Abbildung, und U' identifiziert sich einschließlich der Normen mit dem Faktorraum $V'/\operatorname{Bild}\pi'$.

Beweis: ι' *ist surjektiv*: Jedes $f \in U'$ lässt sich nach Aufg. 27 zu einer stetigen Linearform g_0 auf ganz V fortsetzen. Für $u \in U$ gilt dann $\iota'(g_0)(u) = g_0(\iota(u)) = g_0(u) = f(u)$, d.h. $\iota'(g_0) = f$.

π' *ist injektiv*: Für $f \in (V/U)'$ mit $\pi'(f) = 0$ hat man $f \circ \pi = 0$ und dann wegen der Surjektivität der kanonischen Projektion $\pi : V \to V/U$ auch $f = 0$. (Man beachte, dass π nach 17.A, Aufg. 10b) stetig ist, also mit jedem $f \in (V/U)'$ auch $\pi'(f) = f \circ \pi$ stetig ist und somit in V' liegt.)

Es ist $\iota' \circ \pi' = 0$, *also* $\operatorname{Bild}\pi' \subseteq \operatorname{Kern}\iota'$: Für $h \in (V/U)'$ gilt $\iota'(\pi'(h)) = h \circ \pi \circ \iota = 0$ wegen $\pi \circ \iota = 0$. Da definitionsgemäß $\overline{\pi'(h)} = h$ gilt, ist $\|\pi'(h)\| = \|\overline{\pi'(h)}\| = \|h\|$ nach Aufg. 26, d.h. π' ist normerhaltend.

Es ist $\operatorname{Bild}\pi' = \operatorname{Kern}\iota'$: Für $f \in \operatorname{Kern}\iota'$ gilt nämlich $\iota'(f) = 0$, d.h. $f|U = 0$ und somit $U \subseteq \operatorname{Kern} f$. Nach Aufg. 26 gilt dann $\|f\| = \|\overline{f}\|$ für die induzierte Linearform $\overline{f} : V/U \to \mathbb{K}$. Daher ist auch $\overline{f}$ stetig, und es gilt $\pi'(\overline{f}) = \overline{f} \circ \pi = f$, d.h. $f \in \operatorname{Bild}\pi'$.

Versehen wir schließlich $V'/\operatorname{Bild}\pi'$ mit der Norm gemäß 17.A, Aufg. 10a), so gilt $\|\overline{g}\| = d(g, \operatorname{Bild}\pi') = \operatorname{Inf}\big\{\|h - g\| \;\big|\; h \in \operatorname{Bild}\pi'\big\} = \operatorname{Inf}\big\{\|h \circ \pi - g\| \;\big|\; h : V/U \to \mathbb{K} \text{ stetig}\big\}$ für $g \in V'$. Sei nun $f \in U'$. Dann gibt es – wie oben gezeigt – ein $g_0 \in V'$ mit $\iota'(g_0) = f$ und $\|g_0\| = \|f\|$. Wegen $\iota'(g) = g|U$ gilt sicher $\|g\| \geq \|f\|$ für alle $g \in V'$ mit $\iota'(g) = f$. Da $h \circ \pi$ für alle $h : V/U \to \mathbb{K}$ auf U verschwindet, ist dann auch $\|h \circ \pi - g\| \geq \|f\|$ für diese g. Es folgt $d(g, \operatorname{Bild}\pi') \geq \|f\|$. Ferner gilt dafür $(g - g_0)|U = f - f = 0$, d.h. $g - g_0$ lässt sich in der Form $g - g_0 = h \circ \pi$ mit einem $h : V/U \to \mathbb{K}$ schreiben, und man sieht $d(g, \operatorname{Bild}\pi') \leq \|h \circ \pi - g\| = \|(g - g_0) - g\| = \|g_0\| = \|f\|$. Insgesamt folgt $d(g, \operatorname{Bild}\pi') = \|f\|$. •

Bemerkung: Ist $f : V \to W$ eine stetige surjektive lineare Abbildung normierter $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\operatorname{Kern} f = U$, so sagt man W trage die Q u o t i e n t e n n o r m von V, wenn der induzierte Isomorphismus $\overline{f} : V/U \to W$ normerhaltend ist. *U' trägt also die Quotientennorm von V'.*

19 Hilbert-Räume

Abschnitt 19.A, Aufg. 1, p. 642 (1.11.2012):

Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen im $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Dann ist auch die Folge $\big(\langle x_n\,,\,y_n\rangle\big)$ konvergent in $\mathbb{K}$, und es gilt

$$\lim \langle x_n\,,\,y_n\rangle = \langle \lim x_n\,,\,\lim y_n\rangle \qquad \text{(Stetigkeit des Skalarprodukts).}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, so gibt es zu $\varepsilon' := \operatorname{Min}\big(1,\,\varepsilon/(1+\|x\|+\|y\|)\big)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x\| \le \varepsilon'$ und $\|y_n - y\| \le \varepsilon'$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$. Für diese n gilt dann auch $\|y_n\| = \|y_n - y + y\| \le \|y_n - y\| + \|y\| \le \varepsilon' + \|y\|$. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung sieht man nun für $n \ge n_0$:

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle|\\ &\le \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \le \varepsilon'(\varepsilon' + \|y\|) + \|x\|\varepsilon' \le \varepsilon'(1 + \|y\| + \|x\|) \le \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Daher konvergiert die Folge $(\langle x_n, y_n\rangle)$ gegen $\langle x, y\rangle$. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 2, p. 642 (1.11.2012):

Sei $v_i\,,\ i \in I$, ein Orthonormalsystem im $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Für beliebige $x, y \in V$ gilt dann

$$\sum_{i\in I} |\langle x, v_i\rangle\langle v_i, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|\,.$$

Beweis: Sei H eine beliebige endliche Teilmenge von I. Indem wir zunächst die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf die beiden Vektoren $\big(|\langle x, v_i\rangle|\big)_{i\in H}$ und $\big(|\langle y, v_i\rangle|\big)_{i\in H}$ des mit dem Standardskalarprodukt versehenen $\mathbb{R}^H$ anwenden und dann die Besselsche Ungleichung für $\langle -, -\rangle$, erhalten wir

$$\sum_{i\in H} |\langle x, v_i\rangle\langle v_i, y\rangle| = \sum_{i\in H} |\langle x, v_i\rangle|\,|\langle y, v_i\rangle| \le \sqrt{\sum_{i\in H} |\langle x, v_i\rangle|^2}\,\sqrt{\sum_{i\in H} |\langle y, v_i\rangle|^2} \le \sqrt{\|x\|^2}\sqrt{\|y\|^2} = \|x\|\,\|y\|.$$

Da dies für alle endlichen Teilmengen H von I gilt, ergibt sich die Behauptung mit Hilfe des Majorantenkriteriums 6.B.7 aus Band 1. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 3, p. 642 (1.11.2012):

Ein Orthonormalsystem $v_i\,,\ i \in I$, im $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt ist genau dann vollständig, wenn für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, v_i\rangle\langle v_i, y\rangle\,.$$

Beweis: Gilt die angegebene Gleichung, so erhält man für $x = y$

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, v_i\rangle\langle v_i, x\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, v_i\rangle\overline{\langle x, v_i\rangle} = \sum_{i\in I} |\langle x, v_i\rangle|^2.$$

MIt Satz 19.A.3 , (3) $\Rightarrow$ (1), ergibt sich daraus die Vollständigkeit von $v_i,\ i \in I$.

Sei umgekehrt $v_i,\ i \in I$, ein vollständiges Orthonormalsystem von V. Nach Satz 19.A.1c) (1) gilt dann $\sum\limits_{i\in I} \langle x, v_i\rangle v_i = x$ und $\sum\limits_{j\in I} \langle y, v_j\rangle v_j = y$. Wegen der Stetigkeit von $\langle -, -\rangle$, vgl. Aufg. 1, und $\langle v_i\,,\,v_j\rangle = \delta_{ij}$ folgt:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \Big\langle \sum_{i\in I} \langle x, v_i\rangle v_i\,,\,\sum_{j\in I} \langle y, v_j\rangle v_j\Big\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, v_i\rangle \sum_{j\in I} \overline{\langle y, v_j\rangle}\,\langle v_i\,,\,v_j\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, v_i\rangle\overline{\langle y, v_i\rangle}\\ &= \sum_{i\in I} \langle x, v_i\rangle\langle v_i, y\rangle\,.\end{aligned}$$

•

Abschnitt 19.A, Aufg. 4, p. 642 (1.11.2012) :

Ein Orthonormalsystem in einem Hilbert-Raum V ist genau dann eine Hilbert-Basis, wenn es maximal ist.

Beweis: Sei w_s, $s \in S$, ein Orthonormalsystem in V. Nach Satz 19.A.7 gibt es ein $K \subseteq V$ derart, dass die Vektoren v, $v \in K$, zusammen mit den w_s, $s \in S$, eine Hilbert-Basis und damit ein Orthonormalsystem von V bilden. Ist w_s, $s \in S$, ein maximales Orthonormalsystem, so muss $K = \emptyset$ sein und somit w_s, $s \in S$, selbst eine Hilbert-Basis von V.

Ist umgekehrt w_s, $s \in S$, eine Hilbert-Basis von V und liesse sie sich durch einen Vektor $v \in V$ zu einem gößeren Orthonormalsystem von V ergänzen, so wäre $\langle v, w_s \rangle = 0$ für alle $s \in S$. Mit Satz 19.A.3 (4) erhielte man $v = 0$ im Widerspruch zu $\|v\| = 1$. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 5, p. 642 (1.11.2012) :

In einem separablen Vektorraum mit Skalarprodukt ist jedes Orthonormalsystem abzählbar. (Insbesondere sind in separablen Vektorräumen mit Skalarprodukt alle Hilbert-Basen gleichmächtig. – Dies gilt übrigens für beliebige Vektorräume mit Skalarprodukt.)

Beweis: Sei v_i, $i \in I$, ein Orthonormalsystem im $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Für $i \neq j$ liefert der Satz von Pythagoras $\|v_i - v_j\|^2 = \|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 = 1 + 1 = 2$, d.h. $\|v_i - v_j\| = \sqrt{2}$. Ferner sei V separabel, d.h. es gebe eine abzählbare Teilmenge W von V, die dicht in V ist. Zu jedem $i \in I$ gibt es also ein $w_i \in W$ mit $\|v_i - w_i\| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Mit der Dreiecksungleichung sieht man dann für $i \neq j$

$$\sqrt{2} = \|v_i - v_j\| = \|v_i - w_i + w_i - w_j + w_j - v_j\| \leq \|v_i - w_i\| + \|w_i - w_j\| + \|v_j - w_j\| < \sqrt{2} + \|w_i - w_j\|,$$

d.h. $\|w_i - w_j\| > 0$ und somit $w_i \neq w_j$. Die Abbildung $I \to W$ mit $i \mapsto w_i$ ist also injektiv. Da W abzählbar ist, ist auch I und damit das Orthonormalsystem v_i, $i \in I$, abzählbar. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 7, p. 643 (1.11.2012) :

Sei V ein Hilbert-Raum mit der Hilbert-Basis v_n, $n \in \mathbb{N}$. Die Unter-Hilbert-Räume U und W von V seien definiert als Abschluss von $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K} v_{2n}$ bzw. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}\big(v_{2n} + \frac{1}{n+1} v_{2n+1}\big)$. Dann ist $U \cap W = 0$, aber $U + W$ ist nicht abgeschlossen, also kein Unter-Hilbert-Raum von V. (Sind U, W aber *orthogonale* abgeschlossene Unterräume eines Hilbert-Raumes V, so ist auch $U + W = U \oplus W$ abgeschlossen in V.)

Beweis: Sei $c_n := \langle v_{2n} + \frac{1}{2n+1} v_{2n+1}, v_{2n} + \frac{1}{2n+1} v_{2n+1} \rangle = 1 + \big(\frac{1}{2n+1}\big)^2$, $w_n := c_n^{-1/2}\big(v_{2n} + \frac{1}{2n+1} v_{2n+1}\big)$ und $u_n := v_{2n}$. Dann bilden u_n, $n \in \mathbb{N}$, und w_n, $n \in \mathbb{N}$, Hilbert-Basen von U bzw. W. Ein Element $x \in U \cap W$ besitzt nun nach Satz 19.A.1 c) Darstellungen der Form $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i u_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i w_i$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{K}$. Es folgt $\langle x, v_{2n+1} \rangle = \sum_{i\in I} a_i \langle v_{2i}, v_{2n+1} \rangle = 0$ und $a_n = \langle x, u_n \rangle = \langle x, v_{2n} \rangle = c_n^{1/2} \langle x, w_n \rangle - \frac{1}{2n+1} \langle x, v_{2n+1} \rangle = c_n^{1/2} b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i v_{2i}$ sowie $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i w_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i^{-1} a_i v_{2i} + \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i^{-1} a_i \frac{1}{2i+1} v_{2i+1}$. Dann ist $a_n = \langle x, v_{2n} \rangle = c_n^{-1} a_n$ und somit $a_n = 0$ für alle n wegen $c_n \neq 1$, also $x = 0$. Daher ist $U \cap W = 0$.

Offenbar liegen die Elemente v_{2n} und v_{2n+1} der gegebenen Hilbert-Basis von V alle in $U + W$. Daher ist $U + W$ dicht in V, also der Abschluss von $U + W$ gleich V. Es bleibt zu zeigen, dass $U + W \neq V$ ist. Wegen $\sum_{i\in\mathbb{N}} \big(\frac{1}{2i+1}\big)^2 < \infty$ ist $\frac{1}{2i+1} v_{2i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, nach Satz 19.A.1 d) eine Cauchy-Familie, $x := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2i+1} v_{2i+1}$ liegt also im Hilbert-Raum V. Läge x in $U + W$, so gäbe es eine Darstellung $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i u_i + \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i w_i$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{K}$. Dann ist einerseits $\langle x, v_{2n+1} \rangle = \frac{1}{2n+1}$ und andererseits $\langle x, v_{2n+1} \rangle = b_n \langle w_n, v_{2n+1} \rangle = \frac{1}{2n+1} c_n^{-1/2} b_n$, also $b_n = c_n^{1/2} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 19.A.1 d) ist nun $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n w_n$ kein Element von W, da $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^2 = \infty$ ist.

Zum Beweis des Zusatzes sei $z_n = u_n + w_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine konvergente Folge in $U + W$ mit $u_n \in U$ und $w_n \in W$. Wegen $\|z_n - z_m\|^2 = \|u_n - u_m\|^2 + \|w_n - w_m\|^2$ sind dann (u_n) und (w_n) Cauchy-Folgen in U bzw. W und damit konvergent mit einem Grenwert $u \in U$ bzw. $w \in W$, da U und W abgeschlossen, also Hilbert-Räume, sind. Dann ist $\lim z_n = u + w \in U + W$. Also ist $U + W$ abgeschlossen. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 8, p. 643 (1.11.2012) :

a) Ein unendlichdimensionaler Hilbert-Raum besitzt keine Orthonormalbasis.

b) Ein separabler Vektorraum mit Skalarprodukt von überabzählbarer Dimension besitzt keine Orthonormalbasis. Insbesondere besitzt der Vektorraum $\mathrm{C}^0_{\mathbb{K}}\big([a, b]\big)$ keine Orthonormalbasis.

Beweis: a) Sei V ein unendlichdimensionaler Hilbert-Raum. Angenommen, $v_i,\ i \in I$, sei eine Orthonormalbasis von V (im Sinne der Linearen Algebra), es habe also jedes $y \in V$ eine Darstellung $y = \sum a'_i v_i$, wobei nur endlich viele der $a'_i \in \mathbb{K}$ von 0 verschieden seien. Da I unendlich ist, besitzt I eine abzählbar unendliche Teilmenge, die wir mit $\mathbb{N}$ identifizieren können. Setzen wir nun $a_i := 0$ für $i \in I - \mathbb{N}$ und $a_i := 1/(i+1)$ für $i \in \mathbb{N}$, so ist die Familie $|a_i|^2,\ i \in I$, summierbar in $\mathbb{R}$ und somit $a_i v_i,\ i \in I$, nach 19.A.1 d) eine Cauchy-Familie in V. Da V ein Hilbert-Raum ist, ist die Fammilie sogar summierbar, und es gilt $a_i = \langle y, v_i \rangle$ für $y := \sum_{i\in I} a_i v_i$, vgl. 19.A.1 e). Andererseits besitzt y aber eine Darstellung $y = \sum a'_i v_i$, wobei nur endlich viele der $a'_i \in \mathbb{K}$ von 0 verschieden sind, und auch dafür gilt $a'_i = \langle y, v_i \rangle = a_i$. Dies ist ein Widerspruch zu $a_i \neq 0$ für unendlich viele i.

b) Hätte der separable $\mathbb{K}$-vektorraum V mit Skalarprodukt eine überabzählbare Orthonormalbasis (wieder im Sinne der Linearen Algebra), so wäre dies ein überabzählbares Orthonormalsystem in V im Widerspruch zum Ergebnis von Aufg. 5.

Der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathrm{C}^0_{\mathbb{K}}\big([a,b]\big)$, $a<b$, hat gewiss überabzählbare Dimension. Beispielsweise sind die Funktionen $e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, linear unabhängig. (Das Skalarprodukt ist natürlich $\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$.) •

Abschnitt 19.A, Aufg. 9, p. 643 (1.11.2012):

Seien V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und W ein vollständiger Unterraum von V. Ferner seien $x \in V$ ein Punkt und $y_n,\ n \in \mathbb{N}$, eine Folge in W mit $\lim \|x - y_n\| = d(x, W)$.

a) $y_n,\ n \in \mathbb{N}$, ist eine Cauchy-Folge und damit konvergent in W.

b) Ist $x' := \lim\ y_n$, so ist $x - x' \in W^\perp$ und x' unabhängig von der Wahl der Folge (y_n).

c) Die Abbildung $p : x \mapsto x'$ ist die Orthogonalprojektion p_W von V auf W.

Beweis: a) Wegen $\lim \|x - y_n\| = d := d(x, W)$ ist $\lim \|x - y_n\|^2 = d^2$. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\varepsilon' := \varepsilon^2/4$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\,\|x - y_n\|^2 - d^2| \le \varepsilon'$ für alle $n \ge n_0$. Seien nun $n, m \ge n_0$. Da die (affine) Gerade durch y_n und y_m endlichdimensional ist, existiert die orthogonale Projektion q von V auf diese Gerade. Sei $y := q(x) \in W$. Nach dem Satz des Pythagoras ist dann $\|x - y_n\| \ge \|x - y\| \ge d$ und analog $\|x - y_m\| \ge \|x - y\| \ge d$. Es folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung und dann des Satzes von Pythagoras

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\| &\le \|y_n - y\| + \|y_m - y\| = \sqrt{\|x-y_n\|^2 - \|x-y\|^2} + \sqrt{\|x-y_m\|^2 - \|x-y\|^2}\\ &\le \sqrt{\|x-y_n\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x-y_m\|^2 - d^2} \le \sqrt{\varepsilon'} + \sqrt{\varepsilon'} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

b) Da die Folge (y_n) nach a) eine Cauchy-Folge ist und W vollständig ist. konvergiert die Folge gegen ein Element $x' \in W$. Sei nun $w \in W$, $w \neq 0$, beliebig und $z \in W$ das Bild von x bei der orthogonalen Projektion von V auf die Gerade durch x' und $x' + w$. Nach dem Satz des Pythagoras ist $\|x - z\| < \|x - x'\|$ bei $z \neq x'$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $d := d(x, W) = \lim \|x - y_n\| = \|x - \lim y_n\| = \|x - x'\|$ das Infimum der Entfernungen von x zu einem Punkt von W ist. Also ist $z = x'$ und daher $x - x' = x - z$ orthogonal zu w. Ist auch $x'' \in W$ Grenzwert einer Folge von Punkten aus W, deren Abstand zu x gegen $d(x, W)$ konvergiert, so ist auch $x - x''$ orthogonal zu W. Das Dreieck mit den Eckpunkten x, x', x'' ist nun gleichschenklig und hat zwei rechte Winkel bei x' bzw. x''. Dann muss $x' = x''$ sein.

c) Nach Konstruktion ist $p(x) = x$ für $x \in W$, also $p|W = \mathrm{id}_W$. Für $x \in W^\perp$ gilt $x - p(x) = x - x' \in W^\perp$ und somit $p(x) \in W^\perp \cap W = 0$, also $p(x) = 0$. Wir zeigen noch, dass p linear ist. Dazu seien $x, y \in V$ und U sei der von den Bildern $x' := p(x)$, $y' = p(y)$ und $p(x+y)$ erzeugte Unterraum von W. Dann ist offenbar $\|x - x'\| = d(x, U) = d(x, W)$, $\|y - y'\| = d(y, U) = d(y, W)$ und $\|(x+y) - p(x+y)\| = d(p(x+y), U) = d(p(x+y), W)$. Da die Werte der orthogonalen Projektion p_U von V auf U nach Satz 13.B.4 mit denen von p übereinstimmen und linear ist, ist auch p linear. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 11, p. 643 (1.11.2012):

Sei U ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Hilbert-Raums V. Für einen Vektor $x \in V$ sind folgende Aussagen äquivalent: (1) $x \in \overline{U}$. (2) $x \in (U^\perp)^\perp$. (3) Für jeden Vektor $y \in V$ mit $y \perp U$ ist auch $y \perp x$. (4) Jede stetige Linearform auf V, die auf U verschwindet, verschwindet auch auf x.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Zu $x \in \overline{U}$ gibt es eine Folge (x_n) von Elementen $x_n \in U$ mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Für beliebige Elemente $y \in U^\perp$ gilt dann $\langle x_n, y\rangle = 0$ und somit $\langle x, y\rangle = \langle \lim x_n, y\rangle = \lim \langle x_n, y\rangle = 0$, d.h. $x \in (U^\perp)^\perp$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir zeigen zunächst $\overline{U}^{\perp} = U^{\perp}$. Wegen $U \subseteq \overline{U}$ gilt $\overline{U}^{\perp} \subseteq U^{\perp}$. Sei umgekehrt $z \in U^{\perp}$. Für $y \in \overline{U}$, also $y = \lim y_n$ mit $y_n \in U$, gilt dann $\langle z, y_n\rangle = 0$ und folglich $\langle z, y\rangle = \langle z, \lim y_n\rangle = \lim\langle z, y_n\rangle = 0$, also $z \in \overline{U}^{\perp}$. – Da $\overline{U}$ abgeschlossen und somit vollständig ist, gilt $V = \overline{U} \oplus \overline{U}^{\perp} = \overline{U} \oplus U^{\perp}$ nach Satz 19.A.5. Zu $x \in (U^{\perp})^{\perp}$ gibt es daher Elemente $u \in \overline{U}$ und $u^{\perp} \in U^{\perp}$ mit $x = u + u^{\perp}$. Es folgt $\|u^{\perp}\|^2 = \langle u^{\perp}, u^{\perp}\rangle = \langle x-u, u^{\perp}\rangle = \langle x, u^{\perp}\rangle - \langle u, u^{\perp}\rangle = 0 - 0 = 0$, d.h. $u^{\perp} = 0$ und $x = u \in \overline{U}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Für $y \in V$ mit $y \perp U$ gilt $y \in U^{\perp}$. Ist nun $x \in (U^{\perp})^{\perp}$, so gilt also $\langle x, y\rangle = 0$ und folglich $y \perp x$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Gilt $y \perp x$ für jedes $y \in U^{\perp}$, so ist definitionsgemäß $x \in (U^{\perp})^{\perp}$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Sei $f \in V'$ eine stetige Linearform auf V, die auf U verschwindet. Da f stetig ist, ist Kern $f = f^{-1}(0)$ abgeschlossen und umfasst daher mit U auch $\overline{U}$.

(4) $\Rightarrow$ (3): Sei $y \in V$ mit $y \perp U$. Die stetige Linearform $z \mapsto \langle z, y\rangle$ auf V verschwindet dann auf U und daher nach (4) auch auf x, d.h. es ist $x \perp y$. (Man beachte, dass die betrachteten Linearformen $z \mapsto \langle z, y\rangle$ nach dem Rieszschen Darstellungssatz 19.A.9 *sämtliche* stetigen Linearformen auf V sind.) •

Abschnitt 19.A, Aufg. 12, p. 643 (1.11.2012) :

Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und f ein Operator auf V, der einen adjungierten Operator $\hat{f}$ besitzt.

a) Es ist Kern $\hat{f} = (\text{Bild } f)^{\perp}$. **b)** Ist V ein Hilbert-Raum, so gilt $\overline{\text{Bild } \hat{f}} = (\text{Kern } f)^{\perp}$.

Beweis: a) *Es ist* Kern $\hat{f} \subseteq (\text{Bild } f)^{\perp}$: Für $x \in \text{Kern } \hat{f}$ und beliebige Elemente $f(y) \in \text{Bild } f$ gilt nämlich $\hat{f}(x) = 0$ und daher $\langle x, f(y)\rangle = \langle \hat{f}(x), y\rangle = 0$, d.h. es ist $x \in (\text{Bild } f)^{\perp}$.

Es ist Kern $\hat{f} \supseteq (\text{Bild } f)^{\perp}$: Für $x \in (\text{Bild } f)^{\perp}$ ist $f\big(\hat{f}(x)\big) \in \text{Bild } f$ und folglich $0 = \langle x, f\big(\hat{f}(x)\big)\rangle = \langle \hat{f}(x), \hat{f}(x)\rangle = \|\hat{f}(x)\|^2 = 0$, d.h. $\hat{f}(x) = 0$ und somit $x \in \text{Kern } \hat{f}$.

b) Mit a) und wegen der Äquivalenz "(1) $\Leftrightarrow$ (2)" in Aufg. 11 sieht man $\overline{\text{Bild } \hat{f}} = \big((\text{Bild } \hat{f})^{\perp}\big)^{\perp} = \big(\text{Kern } \hat{\hat{f}}\big)^{\perp} = (\text{Kern } f)^{\perp}$. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 13, p. 644 (1.11.2012) :

Sei f ein stetiger Operator auf dem Hilbert-Raum V. Dann gilt:

a) $\hat{\hat{f}} = f$. **b)** Es ist $\|\hat{f} f\| = \|f \hat{f}\| = \|f\|^2$. **c)** Es ist Kern $\hat{f} = \text{Kern } f\hat{f}$ und $\overline{\text{Bild } f} = \overline{\text{Bild } f\hat{f}}$.

Beweis: a) Da f stetig ist, besitzt f nach Satz 19.A.10 einen adjungierten Operator $\hat{f}$. Mit 15.A.3 (3) folgt dann $\hat{\hat{f}} = f$.

b) Für alle $x \in V$ gilt einerseits nach Satz 19.A.10 $\|\hat{f}\| = \|f\|$ und somit $\|\hat{f} f(x)\| \le \|\hat{f}\|\,\|f(x)\| \le \|\hat{f}\|\,\|f\|\,\|x| = \|f\|^2\|x\|$, d.h. es ist $\|\hat{f} f\| \le \|f\|^2$. Andererseits liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle \hat{f} f(x), x\rangle \le \|\hat{f} f(x)\|\,\|x\| \le \|\hat{f} f\|\,\|x\|^2$, also $\|f\|^2 \le \|\hat{f} f\|$. Insgesamt folgt $\|\hat{f} f\| = \|f\|^2$. Analog wird $\|f\hat{f}\| = \|f\|^2$ bewiesen.

c) Für $x \in V$ folgt aus $\hat{f}(x) = 0$ sofort $f\hat{f}(x) = 0$, d.h. es gilt Kern $\hat{f} \subseteq \text{Kern } f\hat{f}$. Sei umgekehrt $x \in \text{Kern } f\hat{f}$. Dann ist $f\hat{f}(x) = 0$ und folglich $\|\hat{f}(x)\|^2 = \langle \hat{f}(x), \hat{f}(x)\rangle = \langle x, f\hat{f}(x)\rangle = 0$, d.h. $\hat{f}(x) = 0$ und somit $x \in \text{Kern } f\hat{f}$. – Nutzt man nun die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (2) in Aufg. 11 und dann Aufg 12a) (mit f statt $\hat{f}$), so erhält man

$$\overline{\text{Bild } f} = ((\text{Bild } f)^{\perp})^{\perp} = (\text{Kern } \hat{f})^{\perp} = (\text{Kern } f\hat{f})^{\perp} = (\text{Kern}\,(f\hat{f})\hat{\ })^{\perp} = ((\text{Bild } f\hat{f})^{\perp})^{\perp} = \overline{\text{Bild } f\hat{f}}\,. \quad \bullet$$

Abschnitt 19.A, Aufg. 14, p. 643 (1.11.2012) :

Sei $p \neq 0$ eine Orthogonalprojektion eines Vektorraums mit Skalarprodukt. Dann ist p stetig mit $\|p\| = 1$.

Beweis: Nach Satz 13.B.1 ist eine Projektion $p \neq 0$ *genau dann* eine Orthogonalprojektion, wenn $\|p(x)\| \le \|x\|$ für alle $x \in V$ ist, d.h. wenn p stetig mit $\|p\| \le 1$ ist. Da aber für eine $x \neq 0$ in Bild p gilt $p(x) = x$, ergibt sich sogar $\|p\| = 1$. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 15, p. 644 (1.11.2012):

a) Für zwei Orthogonalprojektionen p und q eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V mit Skalarprodukt sind äquivalent: (1) $p \le q$. (2) $q-p$ ist eine Orthogonalprojektion. (3) $\|p(x)\| \le \|q(x)\|$ für alle $x \in V$.

b) Für die Orthogonalprojektionen $p_1, \ldots, p_n$ des $\mathbb{K}$-Vektorraums V mit Skalarprodukt sind äquivalent: (1) $p_1 + \cdots + p_n$ ist eine Orthogonalprojektion. (2) $\|p_1 + \cdots + p_n\| \le 1$. (3) $p_i p_j = 0$ für $i < j$.

Beweis: a) Da p und q Orthogonalprojektionen sind, gilt $V = \text{Bild}\, p \oplus \text{Kern}\, p = \text{Bild}\, q \oplus \text{Kern}\, q$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $p \le q$, d.h. $\text{Bild}\, p \subseteq \text{Bild}\, q$. Wir zeigen $V = (\text{Bild}\, q \cap \text{Kern}\, p) \oplus (\text{Bild}\, p \oplus \text{Kern}\, q)$:

Da $\text{Bild}\, q$ zu $\text{Kern}\, q$ und $\text{Kern}\, p$ zu $\text{Bild}\, p$ orthogonal ist, sind die beiden angegebenen Unterräume von V zueinander orthogonal. Außerdem gibt es zu jedem $x \in V$ Elemente $y \in \text{Bild}\, q$ und $z \in \text{Kern}\, q$ mit $x = y+z$ und dazu $u \in \text{Bild}\, p$ und $v \in \text{Kern}\, p$ mit $y = u+v$. Es folgt $x = v + (u+z)$ mit $u+z \in \text{Bild}\, p \oplus \text{Kern}\, q$ und $v \in \text{Bild}\, q \cap \text{Kern}\, p$. Letzteres folgt aus $u \in \text{Bild}\, p \subseteq \text{Bild}\, q$, da $u+v = y = q(y) = q(u)+q(v) = u+q(v)$ ist, also $q(v) = v$, und ferner $v \in \text{Kern}\, p$.

Für $v \in \text{Bild}\, q \cap \text{Kern}\, p$ gilt nun $(q-p)(v) = q(v) - p(v) = v - 0 = v$, für $u \in \text{Bild}\, p$ gilt $(q-p)(u) = q(u) - p(u) = u - u = 0$ und für $z \in \text{Kern}\, q$ gilt $(q-p)(z) = q(z) - p(z) = 0 - 0 = 0$ wegen $\text{Kern}\, q = (\text{Bild}\, q)^\perp \subseteq (\text{Bild}\, p)^\perp = \text{Kern}\, p$. Insgesamt ist $q-p$ also die orthogonale Projektion von V auf $\text{Bild}\, q \cap \text{Kern}\, p$ längs $(\text{Bild}\, p \oplus \text{Kern}\, q)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $q-p$ eine Projektion. Da die Summe $p + (q-p) = q$ ebenfalls eine Projektion ist, liefert 5.F, Aufg. 15a) die Gleichung $(q-p)p = 0$ und somit $qp = p^2 = p$. Für jedes $u = p(u) \in \text{Bild}\, p$ gilt also $u = p(u) = qp(u) = q(u) \in \text{Bild}\, q$. (Bemerkung. Einen etwas anderen Beweis der Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (2) findet man als Lösung zu 13.B, Aufg. 1c).)

(1) $\Rightarrow$ (3) Sei $p \le q$, d.h. $\text{Bild}\, p \subseteq \text{Bild}\, q$ und $\text{Kern}\, q \subseteq \text{Kern}\, p$. Zu $x \in V$ gibt es Elemente $y \in \text{Bild}\, q$ und $z \in \text{Kern}\, q$ mit $x = y+z$. Wegen $\|p\| \le 1$ folgt $\|p(x)\| = \|p(y) + p(z)\| = \|p(y)\| \le \|y\| = \|q(y) + q(z)\| = \|q(x)\|$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sei $x \in \text{Bild}\, p$. Aus (3) folgt $\|x\| = \|p(x)\| \le \|q(x)\| \le \|q\|\,\|x\| \le \|x\|$ (wegen $\|q\| = 1$), also $\|q(x)\| = \|x\|$. Zu x gibt es Elemente $y \in \text{Bild}\, q$ und $z \in \text{Kern}\, q$ mit $x = y+z$. Der Satz von Pythagoras liefert nun $\|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2 = \|x\|^2 = \|q(x)\|^2 = \|q(y) + q(z)\|^2 = \|y\|^2$, also $z = 0$ und somit $x = y \in \text{Bild}\, q$. •

b) (1) $\Rightarrow$ (2) folgt sofort aus Aufg. 14.

(2) $\Rightarrow$ (1) Wir verwenden Induktion über n. Der Fall $n=1$ ist trivial. Sei nun $n \ge 2$ und $\|p_1 + \cdots + p_n\| \le 1$. Für alle $x \in V$ gilt dann $\|(p_1 + \cdots + p_{n-1})(x) + p_n(x)\|^2 \le \|p_1 + \cdots + p_n\|^2 \|x\|^2 \le \|x\|^2$.

Da die p_i Orthogonalprojektionen, also semipositive Operatoren, sind, gilt $\langle (p_1 + \cdots + p_{n-1})(x)\,, x\rangle = \langle x\,, (p_1 + \cdots + p_{n-1})(x)\rangle \ge 0$. Für $x \in \text{Bild}\, p_n$, d.h. $p_n(x) = x$, erhält man so

$$\|x\|^2 \ge \|(p_1 + \cdots + p_{n-1})(x) + x\|^2 = \|(p_1 + \cdots + p_{n-1})(x)\|^2 + 2\langle (p_1 + \cdots + p_{n-1})(x)\,, x\rangle + \|x\|^2.$$

Dies liefert $(p_1 + \cdots + p_{n-1})(x) = 0$ für alle $x \in \text{Bild}\, p_n$, d.h. $(p_1 + \cdots + p_{n-1})p_n = 0$. Dann gilt auch $p_n(p_1 + \cdots + p_{n-1}) = 0$. (Sind f, g selbstadjungiert mit $fg = 0$, so gilt $0 = \langle fg(x)\,, y\rangle = \langle x\,, gf(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$. Speziell für $x = gf(y)$ ergibt sich $gf(y) = 0$, vgl. auch 15.A, Aufg. 7e).) Wir erhalten so $\text{Bild}\,(p_1 + \cdots + p_{n-1}) \subseteq \text{Kern}\, p_n = (\text{Bild}\, p_n)^\perp$. Mit dem Satz von Pythagoras bekommt die Ausgangsungleichung dann die Gestalt

$$\|(p_1 + \cdots + p_{n-1})(x)\|^2 + \|p_n(x)\|^2 = \|(p_1 + \cdots + p_{n-1})(x) + p_n(x)\|^2 \le \|x\|^2.$$

Folglich ist $\|(p_1 + \cdots + p_{n-1})(x)\| \le \|x\|$ für alle $x \in V$ und somit $\|p_1 + \cdots + p_{n-1}\| \le 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $p_1 + \cdots + p_{n-1}$ eine Orthogonalprojektion. Wegen $(p_1 + \cdots + p_{n-1})p_n = 0$ ist dann nach 13.B, Aufg. 1b) auch $p_1 + \cdots + p_n$ eine Orthogonalprojektion.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sei $p_1 + \cdots + p_n$ eine Orthogonalprojektion. Da es auf die Reihenfolge der p_i nicht ankommt, zeigt der Äquivalenzbeweis von (1) und (2), dass dann auch $p_i + p_j$ für beliebige i, j eine Orthogonalprojektion ist. Mit 13.B, Aufg. 1b) folgt $p_i p_j = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Wir verwenden Induktion über n. Der Fall $n=1$ ist trivial, der Fall $n=2$ wird in 13.B, Aufg. 1b) behandelt. Beim Schluss von $n-1$ auf n folgt aus $p_i p_j = 0$ für $i < j$ zunächst nach Induktionsvoraussetzung, dass $p_1 + \cdots + p_{n-1}$ Orthogonalprojekion ist und dann wegen $(p_1 + \cdots + p_{n-1})p_n = p_1 p_n + \cdots + p_{n-1} p_n = 0$ wieder mit 13.B, Aufg. 1b), dass auch $p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n$ eine Orthogonalprojektion ist. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 16, p. 644 (1.11.2012):
Mit $\widetilde{P}_n$ bezeichnen wir die in der Rekursionsformel 19.A.14 auftretenden Legendre-Polynome des Intervalls $[a, b]$. Für ihre Ableitungen gilt:

a) Für $n \geq 1$ ist $\widetilde{P}'_{n+1} - \widetilde{P}'_{n-1} = \dfrac{2(2n+1)}{b-a}\,\widetilde{P}_n$.

b) Die Beziehung in a) lässt sich stets zerlegen in

$$\widetilde{P}'_{n+1} - \frac{2t-(a+b)}{b-a}\,\widetilde{P}'_n = \frac{2(n+1)}{b-a}\,\widetilde{P}_n \qquad \text{und} \qquad \frac{2t-(a+b)}{b-a}\,\widetilde{P}'_n - \widetilde{P}'_{n-1} = \frac{2n}{b-a}\,\widetilde{P}_n\,.$$

Beweis: a) Durch zweimaliges Differenzieren erhält man

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}'_{n+1}(t) - \frac{2(2n+1)}{b-a}\,\widetilde{P}_n(t)\\
&= \frac{1}{(n+1)!\,(b-a)^{n+1}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\Big(\frac{d}{dt}\Big)^2\big((t-a)(t-b)\big)^{n+1} - \frac{2(2n+1)}{n!\,(b-a)^{n+1}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\big((t-a)(t-b)\big)^n\\
&= \frac{1}{n!\,(b-a)^n}\Big(\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\frac{d}{dt}\Big(\frac{2t-a-b}{b-a}\,\big((t-a)(t-b)\big)^n\Big) - \frac{2(2n+1)}{b-a}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\big((t-a)(t-b)\big)^n\Big)\\
&= \frac{1}{n!\,(b-a)^n}\Big(\frac{2}{b-a}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\big((t-a)(t-b)\big)^n + \Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\Big(\frac{(2t-a-b)^2 n}{b-a}\,\big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}\Big)\\
&\qquad - \frac{2(2n+1)}{b-a}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\big((t-a)(t-b)\big)^n\Big)\\
&= \frac{1}{n!\,(b-a)^n}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\Big(\Big(\frac{(2t-a-b)^2 n}{b-a} - \frac{4n(t-a)(t-b)}{b-a}\Big)\big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}\Big)\\
&= \frac{1}{n!\,(b-a)^n}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\Big(\frac{(a+b)^2 n - 4abn}{b-a}\big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}\Big)\\
&= \frac{1}{(n-1)!\,(b-a)^{n-1}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\big((t-a)(t-b)\big)^{n-1} = \widetilde{P}'_{n-1}(t)\,.
\end{aligned}$$

b) Wir vergleichen beide Seiten der ersten Formel durch direkte Rechnung. Mit der Leibniz-Regel hat man

$$\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n+1}\Big(\big(2t-(a+b)\big)\big((t-a)(t-b)\big)^n\Big) = \big(2t-(a+b)\big)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n+1}\big((t-a)(t-b)\big)^n + 2(n+1)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\big((t-a)(t-b)\big)^n$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}'_{n+1}(t) - \frac{2t-(a+b)}{b-a}\,\widetilde{P}'_n(t)\\
&= \frac{1}{(n+1)!\,(b-a)^{n+1}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n+1}\frac{d}{dt}\big((t-a)(t-b)\big)^{n+1} - \frac{2t-(a+b)}{n!\,(b-a)^{n+1}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n+1}\big((t-a)(t-b)\big)^n\\
&= \frac{1}{n!\,(b-a)^{n+1}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n+1}\Big(\big(2t-(a+b)\big)\big((t-a)(t-b)\big)^n\Big) - \frac{2t-(a+b)}{n!\,(b-a)^{n+1}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n+1}\big((t-a)(t-b)\big)^n\\
&= \frac{1}{n!\,(b-a)^{n+1}}\Big(\big(2t-(a+b)\big)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n+1}\big((t-a)(t-b)\big)^n + 2(n+1)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\big((t-a)(t-b)\big)^n\Big)\\
&\qquad - \frac{2t-(a+b)}{n!\,(b-a)^{n+1}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n+1}\big((t-a)(t-b)\big)^n\\
&= \frac{2(n+1)}{n!\,(b-a)^{n+1}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\big((t-a)(t-b)\big)^n = \frac{2(n+1)}{b-a}\,\widetilde{P}_n(t)\,.
\end{aligned}$$

Die zweite Formel ließe sich in analoger Weise erhalten. Wir beweisen sie aber mit der im Buch angegebenen Anleitung (was auch bei der ersten Formel möglich gewesen wäre). Zunächst zeigen wir mit partieller Integration, dass die linke Seite orthogonal ist zu jedem reellen Polynom Q eines Grades $<n$. Es ist aber

$$\int_a^b \Big(\frac{2t-(a+b)}{b-a}\,\widetilde{P}'_n(t) - \widetilde{P}'_{n-1}(t)\Big)\,Q(t)\,dt$$

$$= \frac{2t-(a+b)}{b-a}\,\widetilde{P}_n\,Q\Big|_a^b - \widetilde{P}_{n-1}Q\Big|_a^b - \int_a^b \widetilde{P}_n(t)\Big(\frac{2t-(a+b)}{b-a}\,Q(t)\Big)'\,dt + \int_a^b \widetilde{P}_{n-1}(t)\,Q'(t)\,dt$$
$$= \widetilde{P}_n(b)\,Q(b) + \widetilde{P}_n(a)\,Q(a) - \widetilde{P}_{n-1}(b)\,Q(b) + \widetilde{P}_{n-1}(a)\,Q(a)$$
$$= Q(b) + (-1)^n Q(a) - Q(b) + (-1)^{n-1}Q(b) = 0\,,$$

da die Integrale verschwinden, weil alle Polynome vom Grad $<n$ orthogonal zu $\widetilde{P}_n$ sind und alle Polynome vom Grad $<n-1$ orthogonal zu $\widetilde{P}_{n-1}$. Da die linke Seite der zu beweisenden Formel ein Polynom vom Grad n ist, kann sie sich von $\widetilde{P}_n$ nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden. Die Leitkoeffizienten $\dfrac{2}{b-a}\cdot\dfrac{n\cdot(2n)!}{(b-a)^n n!\,n!}$ bzw. $\dfrac{2n}{b-a}\cdot\dfrac{(2n)!}{(b-a)^n\,n!\,n!}$ der beiden Seiten stimmen aber überein. •

Bemerkung. Im Allgemeinen genügt es, Formeln über die Legendre-Polynome für ein festes Intervall zu beweisen, zum Beispiel für das Standardintervall $[-1,1]$, da sich die Legendre-Polynome $\widetilde{P}_{n\,;\,a,b}$ und $\widetilde{P}_{n\,;\,c,d}$ für verschiedene Intervalle $[a,b]$ und $[c,d]$, $a<b$, $c<d$, leicht ineinander transformieren lassen. Mit $t=\dfrac{b-a}{d-c}\,(\tau-c)+a$ gilt nämlich

$$\widetilde{P}_{n\,;\,c,d}(\tau) = \frac{d-c}{b-a}\,\widetilde{P}_{n\,;\,a,b}(t) \qquad \text{und} \qquad \widetilde{P}'_{n\,;\,c,d}(\tau) = \widetilde{P}'_{n\,;\,a,b}(t)\,.$$

Abschnitt 19.A, Aufg. 17, p. 644 (1.11.2012):

a) Für die Werte der Polynome $\widetilde{P}_n$ in der Mitte $c := \frac{1}{2}(a+b)$ des Intervalls $[a,b]$ gilt bei $m\ge 0$:

$$\widetilde{P}_{2m+1}(c) = 0\,, \qquad \widetilde{P}_{2m}(c) = \Big(-\frac{1}{4}\Big)^m\binom{2m}{m}.$$

b) Für $0<t<\frac{1}{2}(b-a)$ und $n\ge 0$ ist $\widetilde{P}_n(c-t) = (-1)^n\,\widetilde{P}_n(c+t)\,.$

1. Beweis: a) Wegen $(t-a)(t-b) = \big(t-c+\frac{1}{2}(b-a)\big)\big(t-c-\frac{1}{2}(b-a)\big) = (t-c)^2 - \frac{1}{4}(b-a)^2$ erhält man

$$\widetilde{P}_n(t) = \frac{1}{n!\,(b-a)^n}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\big((t-a)(t-b)\big)^n = \frac{1}{n!\,(b-a)^n}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\Big((t-c)^2-\frac{1}{4}(b-a)^2\Big)^n$$
$$= \frac{1}{n!\,(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^k(b-a)^{2k}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n(t-c)^{2n-2k}$$
$$= \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^k(b-a)^{2k}(t-c)^{n-2k}\,,$$

also

$$\widetilde{P}_n(c) = \frac{1}{(b-a)^n}(-1)^{[n/2]}\binom{n}{[n/2]}\binom{2n-2[n/2]}{n}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^{[n/2]}(b-a)^{2[n/2]}(c-c)^{n-2[n/2]}$$
$$= \begin{cases} 0\,, & \text{falls } n=2m+1\,,\\ \Big(-\frac{1}{4}\Big)^m\dbinom{2m}{m}\,, & \text{falls } n=2m\,. \end{cases}$$

b) Unter Verwendung der Rechnung in a) sieht man in der Tat

$$\widetilde{P}_n(c-t) = \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^k(b-a)^{2k}\big((c-t)-c\big)^{n-2k}$$
$$= \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^k(b-a)^{2k}(-t)^{n-2k}$$
$$= (-1)^n\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^k(b-a)^{2k}t^{n-2k}$$
$$= (-1)^n\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^k(b-a)^{2k}\big((c+t)-c\big)^{n-2k}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k (b-a)^{2k} t^{n-2k} = (-1)^n \widetilde{P}_n(c+t)\,. \qquad \bullet$$

2. Beweis: a) Wir verwenden die Rekursionsformel aus Satz 19.A.14. Wegen

$$\widetilde{P}_1(c) = \frac{2}{b-a}\, c - \frac{b+a}{b-a} = \frac{2}{b-a} \cdot \frac{b+a}{2} - \frac{b+a}{b-a} = 0$$

liefert sie $n\widetilde{P}_n(c) = -(n-1)\widetilde{P}_{n-2}(c)$. Durch Induktion über m erhält man damit sofort $\widetilde{P}_{2m+1}(c) = 0$ für alle m. Ferner bekommt man so mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung $\widetilde{P}_{2(m-1)} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-1}\binom{2(m-1)}{m-1}$ wegen $\widetilde{P}_0 = 1$

$$\widetilde{P}_{2m}(c) = -\frac{2m-1}{2m}\,\widetilde{P}_{2(m-1)}(c) = -\frac{2m-1}{2m}\left(-\frac{1}{4}\right)^{m-1} \frac{(2m-2)!}{(m-1)!\,(m-1)!} = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{m-1} \frac{(2m)!}{m!\,m!}$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^m \binom{2m}{m}.$$

b) Wir verwenden die Rekursionsformel aus Satz 19.A.14. Wegen $\widetilde{P}_0(c-t) = 1 = \widetilde{P}_0(c+t)$ und

$$\widetilde{P}_1(c-t) = \frac{2}{b-a}\left(\frac{a+b}{2} - t\right) - \frac{b+a}{b-a} = -\frac{2t}{b-a} = -\left(\frac{2}{b-a}\left(\frac{a+b}{2} + t\right) - \frac{b+a}{b-a}\right) = -\widetilde{P}_1(c+t)$$

gilt die Behauptung für $n=0$ und $n=1$. Der Induktionsschluss ergibt sich aus

$$\widetilde{P}_n(c-t) = \frac{2n-1}{n}\,\widetilde{P}_1(c-t)\,\widetilde{P}_{n-1}(c-t) - \frac{n-1}{n}\,\widetilde{P}_{n-2}(c-t)$$
$$= -\frac{2n-1}{n}\,\widetilde{P}_1(c+t)\,(-1)^{n-1}\widetilde{P}_{n-1}(c+t) - \frac{n-1}{n}(-1)^{n-2}\,\widetilde{P}_{n-2}(c+t)$$
$$= (-1)^n\left(\frac{2n-1}{n}\,\widetilde{P}_1(c+t)\,\widetilde{P}_{n-1}(c+t) - \frac{n-1}{n}\,\widetilde{P}_{n-2}(c+t)\right) = (-1)^n\,\widetilde{P}_n(c+t)\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 19.A, Aufg. 18, p. 644 (1.11.2012):

Für die Legendre-Polynome P_n bzgl. des Intervalls $[-1, 1]$ und $m \in \mathbb{N}$ zeige man:

$$\langle t^m, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} t^m P_n(t)\,dt = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } m<n \text{ oder } m-n \text{ ungerade,} \\ \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\; \dfrac{[m]_n}{2^n\,[\frac{1}{2}(m+n+1)]_{n+1}}\,, & \text{falls } m \ge n \text{ und } m-n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beweis: Für $m < n$ wurde $\langle t^m, P_n\rangle = 0$ im Beweis von 19.A.13 mitbewiesen; schließlich werden die P_n, $n \in \mathbb{N}$, aus der Basis t_n, $n \in \mathbb{N}$, durch Anwenden des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens gewonnen. Für $m-n$ ungerade erhält man, indem man Aufg. 17b) (mit $c=0$) anwendet, $\widetilde{P}_n(-t) = (-1)^n\widetilde{P}_n(t)$ und somit $(-t)^m\widetilde{P}_n(-t) = (-1)^m t^m (-1)^n \widetilde{P}_n(t) = (-1)^{m-n} t^m \widetilde{P}_n(t) = -t^m\widetilde{P}_n(t)$. Da der Integrand eine ungerade Funktion ist, verschwindet dann das $\langle t^m, P_n\rangle$ darstellende Integral ebenfalls.

Sei nun $m \ge n$ und $m-n$ gerade. Die k-te Ableitung von $(t^2-1)^n$ verschwindet bei $0 \le k < n$ an den Stellen 1 und -1, da $(t^2-1)^n$ dort Nullstellen n-ter Ordnung hat. Durch n-fache partielle Integration, wobei jeweils der zweite Faktor integriert wird, bekommt man daher

$$\int_{-1}^{1} t^m \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\,dt = t^m \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\,dt\,\Big|_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1} t^{m-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\,dt$$

$$= -m\int_{-1}^{1} t^{m-.1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\,dt$$

$$= -mt^{m-1}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^2-1)^n\,dt\,\Big|_{-1}^{1} + m(m-1)\int_{-1}^{1} t^{m-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^2-1)^n\,dt$$

$$= m(m-1)\int_{-1}^{1} t^{m-2}\,\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^2-1)^n\,dt = \cdots$$

$$= (-1)^n m(m-1)\cdots(m-n+1)\int_{-1}^{1} t^{m-n}(t^2-1)^n\,dt$$

$$= (-1)^n\,[m]_n\int_{-1}^{1} t^{m-n}(t^2-1)^n\,dt\,.$$

Weitere n-fache partielle Integration, wobei jetzt der erste Faktor integriert wird, liefert

$$\int_{-1}^{1} t^{m-n}(t^2-1)^n\,dt = \frac{1}{m-n+1}\,t^{m-n+1}(t^2-1)^n\,\Big|_{-1}^{1} - \frac{2n}{m-n+1}\int_{-1}^{1} t^{m-n+2}(t^2-1)^{n-1}\,dt$$

$$= -\frac{2n}{m-n+1}\int_{-1}^{1} t^{m-n+2}(t^2-1)^{n-1}\,dt = \cdots$$

$$= (-1)^n\,\frac{2n\,2(n-1)\cdots 2}{(m-n+1)(m-n+3)\cdots(m+n-1)}\int_{-1}^{1} t^{m+n}\,dt$$

$$= (-1)^n\,\frac{2n\,2(n-1)\cdots 2}{(m-n+1)(m-n+3)\cdots(m+n-1)}\cdot\frac{1-(-1)^{m+n+1}}{m+n+1} = \frac{(-1)^n n!}{[\frac{1}{2}(m+n+1)]_{n+1}}\,,$$

da $m+n+1 = (m-n)+(2n+1)$ nach Voraussetzung ungerade ist. Insgesamt erhält man so

$$\langle t^m, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} t^m P_n(t)\,dt = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} t^m\,\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\,dt$$

$$= \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}(-1)^n\,[m]_n\int_{-1}^{1} t^{m-n}(t^2-1)^n\,dt = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}(-1)^n\,[m]_n\,\frac{(-1)^n n!}{[\frac{1}{2}(m+n+1)]_{n+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{[m]_n}{2^n\,[\frac{1}{2}(m+n+1)]_{n+1}}\,.$$ •

Abschnitt 19.A, Aufg. 19, p. 644 (1.11.2012):

Man bestätige die Fourier-Entwicklungen für die folgenden Funktionen $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ bzgl. der Legendre-Polynome des Intervalls $[-1,1]$:

a) $f(t) := \begin{Bmatrix} 0\,, & \text{falls } -1\le t\le 0 \\ 1\,, & \text{falls } \quad 0< t\le 1 \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\,\frac{\sqrt{8m+6}}{m+1}\binom{2m}{m}\frac{P_{2m+1}}{2^{2m+2}}$. ($f$ ist nur stückweise stetig. Man vergleiche dazu den Anfang von Abschnitt 19.C.)

b) $f(t) = |t| = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\sqrt{8m+2}\binom{2m-2}{m-1}\frac{P_{2m}}{2^{2m}(m+1)m}$.

c) Welche Summenformeln werden bei a) und b) durch die Parsevalsche Identität geliefert?

Beweis: a) Wir berechnen die Koeffizienten c_n der gesuchten Fourier-Entwicklung. Es ist $c_0 = \int_0^1 1\cdot P_0\,dt = t\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und für $n\ge 1$ folgt mit Aufg. 16a) und 17a)

$$c_n = \int_0^1 1\cdot P_n\,dt = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\int_0^1 \widetilde{P}_n(t)\,dt = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2n+1}\int_0^1 \big(\widetilde{P}'_{n+1}(t)-\widetilde{P}'_{n-1}(t)\big)\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4n+2}}\Big(\widetilde{P}_{n+1}(1)-\widetilde{P}_{n-1}(1)-\big(\widetilde{P}_{n+1}(0)-\widetilde{P}_{n-1}(0)\big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{4n+2}}\big(\widetilde{P}_{n-1}(0)-\widetilde{P}_{n+1}(0)\big)\,.$$

Es folgt $c_{2m}=0$ und

$$c_{2m+1} = \frac{1}{\sqrt{8m+6}}\Big(\frac{(-1)^m}{4^m}\binom{2m}{m}-\frac{(-1)^{m+1}}{4^{m+1}}\binom{2m+2}{m+1}\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8m+6}}\binom{2m}{m}\frac{(-1)^m}{4^{m+1}}\Big(4+\frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)^2}\Big) = (-1)^m\frac{\sqrt{8m+6}}{4^{m+1}(m+1)}\binom{2m}{m}\,.$$

b) Wir berechnen die Koeffizienten c_n der gesuchten Fourier-Entwicklung. Es ist $c_0=\int_{-1}^1|t|\,P_0\,dt = \int_{-1}^1|t|\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1|t|\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und für $n\geq 1$ folgt mit Aufg. 16a) und 17a)

$$c_n = \int_{-1}^1 |t|\,P_n\,dt = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2n+1}\int_{-1}^1 |t|\,\big(\widetilde{P}'_{n+1}-\widetilde{P}'_{n-1}\big)\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(2n+1)}}\Big(\int_{-1}^0(-t)\,\big(\widetilde{P}'_{n+1}-\widetilde{P}'_{n-1}\big)\,dt+\int_0^1 t\,\big(\widetilde{P}'_{n+1}-\widetilde{P}'_{n-1}\big)\,dt\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4n+2}}\Big((-t)\,\big(\widetilde{P}_{n+1}-\widetilde{P}_{n-1}\big)\Big|_{-1}^0+t\,\big(\widetilde{P}_{n+1}-\widetilde{P}_{n-1}\big)\Big|_0^1+$$

$$+\int_{-1}^0\big(\widetilde{P}_{n+1}-\widetilde{P}_{n-1}\big)\,dt-\int_0^1\big(\widetilde{P}_{n+1}-\widetilde{P}_{n-1}\big)\,dt\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4n+2}}\Big(-\widetilde{P}_{n+1}(-1)+\widetilde{P}_{n-1}(-1)+\widetilde{P}_{n+1}(1)-\widetilde{P}_{n-1}(1)+$$

$$\Big(\frac{1}{2n+3}\big(\widetilde{P}_{n+2}-\widetilde{P}_n\big)-\frac{1}{2n-1}\big(\widetilde{P}_n-\widetilde{P}_{n-2}\big)\Big)\Big|_{-1}^0-\Big(\frac{1}{2n+3}\big(\widetilde{P}_{n+2}-\widetilde{P}_n\big)-\frac{1}{2n-1}\big(\widetilde{P}_n-\widetilde{P}_{n-2}\big)\Big)\Big|_0^1\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4n+2}}\Big(\frac{2}{2n+3}\big(\widetilde{P}_{n+2}(0)-\widetilde{P}_n(0)\big)-\frac{2}{2n-1}\big(\widetilde{P}_n(0)-\widetilde{P}_{n-2}(0)\big)\Big)\,.$$

Es folgt $c_{2m+1}=0$ und

$$c_{2m} = \frac{1}{\sqrt{8m+2}}\Big(\frac{2}{4m+3}\Big(\frac{(-1)^{m+1}}{4^{m+1}}\binom{2m+2}{m+1}-\frac{(-1)^m}{4^m}\binom{2m}{m}\Big)-$$

$$\frac{2}{4m-1}\Big(\frac{(-1)^m}{4^m}\binom{2m}{m}-\frac{(-1)^{m-1}}{4^{m-1}}\binom{2m-2}{m-1}\Big)\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8m+2}}\binom{2m-2}{m-1}\frac{(-1)^{m-1}}{4^m}\Big(\frac{2}{4m+3}\Big(\frac{2m+1}{2m+2}+1\Big)\frac{(2m-1)2m}{m^2}+\frac{2}{4m-1}\Big(\frac{(2m-1)2m}{m^2}+4\Big)\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8m+2}}\binom{2m-2}{m-1}\frac{(-1)^{m-1}}{4^m}\Big(\frac{4m-2}{m(m+1)}+\frac{4}{m}\Big) = (-1)^{m-1}\frac{\sqrt{8m+2}}{4^m\,m(m+1)}\binom{2m-2}{m-1}\,.$$

c) Für die Funktion f aus a) gilt $\|f\|_2^2=\int_0^1 1^2\,dt = 1$ und $\sum_{n=0}^\infty|\langle f,\,P_n\rangle_2|^2 = \frac{1}{2}+\sum_{m=0}^\infty\frac{8m+6}{4^{2m+2}(m+1)^2}\binom{2m}{m}^2$.

Die Parsevalsche Identität liefert also $\displaystyle\sum_{m=0}^\infty\frac{8m+6}{4^{2m+2}\,(m+1)^2}\binom{2m}{m}^2 = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,.$

Für die Funktion f aus b) gilt $\|x\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |t|^2\, dt = 2\int_0^1 t^2\, dt = \frac{2}{3}$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x\,,\, P_n\rangle_2|^2 = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(8m+2)\binom{2m-2}{m-1}^2 \frac{1}{4^{2m}\, m^2(m+1)^2}.$$

Die Parsevalsche Identität liefert also $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m+2}{4^{2m}\, m^2(m+1)^2}\binom{2m-2}{m-1}^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. •

Abschnitt 19.A, Aufg. 20, p. 645 (1.11.2012):

Seien $g :]a,b[\to \mathbb{R}_+$ eine (Dichte-)Funktion wie am Ende von Beispiel 19.A.12 und J_n, $n\in\mathbb{N}$, die Hilbert-Basis von $V := \mathrm{C}^0_{\mathbb{K}}([a,b])$, die aus $1, t, t^2, \ldots$ durch Orthonormalisieren bzgl. des Skalarprodukts $\langle -, -\rangle_g$ gewonnen wird. Dann sind alle Nullstellen von J_n reell, liegen im Intervall $]a,b[$ und sind einfach.

Beweis: Nach Konstruktion ist J_n ein Polynom vom Grad n, besitzt also höchstens n Nullstellen, und ist bzgl. $\langle -, -\rangle_g$ zu allen Polynomen vom Grad $<n$ orthogonal. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von J_n im Intervall $]a,b[$, so hat man eine Darstellung $J_n(t) = (t-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(t-\lambda_r)^{\alpha_r} H(t)$ mit Vielfachheiten $\alpha_i\in\mathbb{N}$ und einem Polynom H, das in $]a,b[$ keine Nullstelle, also dort nach dem Zwischenwertsatz immer das gleiche Vorzeichen hat. Es ist nur zu zeigen, dass $r=n$ ist.

Für das reelle Polynom $F(t) := (t-\lambda_1)^{\varepsilon_1}\ldots(t-\lambda_r)^{\varepsilon_r}$ mit $\varepsilon_i = 0$, falls α_i gerade ist, und $\varepsilon_i = 1$, falls α_i ungerade ist, hat nun die Polynomfunktion $J_nF_n = (t-\lambda_1)^{\alpha_1+\varepsilon_1}\cdots(t-\lambda_r)^{\alpha_r+\varepsilon_r} H(t)$ nur Nullstellen gerader Vielfachheit, also überall in $]a,b[$ dasselbe Vorzeichen, und verschwindet in den von den $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ verschiedenen Punkten nicht. Daher ist das Integral $\langle J_n, F\rangle_g = \int_a^b J_n(t)F(t)\,g(t)\,dt \neq 0$ und folglich $n\leq \mathrm{Grad}\, F = \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r \leq r\leq n$, also $r=n$. •

Bemerkung. Wie bereits am Ende von Beispiel 16.A.12 bemerkt, heißen auch hier die Polynome J_n, $n\in\mathbb{N}$, die Jacobi-Polynome bzgl. der Dichtefunktion g. Zu einer Verallgemeinerung dieser Polynome und einer Anwendung auf die numerische Integration verweisen wir auf Band 3, Beispiel 16.A.17.

Abschnitt 19.A, Aufg. 21, p. 645 (1.11.2012):

a) Ein Unterraum U eines $\mathbb{K}$-Hilbert–Raums V ist genau dann dicht, wenn $U^\perp = 0$ ist.

b) In jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt, der kein Hilbert-Raum ist, gibt es echte abgeschlossene Unterräume $W\subset V$ mit $W^\perp = 0$.

c) Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt ist genau dann ein Hilbert-Raum, wenn jeder abgeschlossene Unterraum W von V ein orthogonales Komplement besitzt.

Beweis: a) Sei zunächst U dicht in V und sei $y\in U^\perp$. Zu beliebigem $x\in V$ gibt es dann eine Folge (x_n) in U mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, also mit $\langle x, y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n\,,\, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n\,,\, y\rangle = 0$, d.h. es ist bereits $y\in V^\perp = 0$, also $y=0$. Folglich ist $U^\perp = 0$.

Sei umgekehrt $U^\perp = 0$. Wegen $U\subseteq \overline{U}$ ist dann erst recht $(\overline{U})^\perp = 0$. Da $\overline{U}$ als abgeschlossener Unterraum des Hilbert-Raums V vollständig ist, gilt $V = \overline{U}\oplus(\overline{U})^\perp = \overline{U}$ nach Satz 19.A.5, d.h. U ist dicht in V.

b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, der kein Hilbert-Raum ist. Dann ist V von der Komplettierung $\widehat{V}$ verschieden und es gibt ein $y\in\widehat{V}$ mit $y\notin V$. Die Linearform $f : V\to\mathbb{K}$ sei definiert durch $f(x) := \langle x, y\rangle$ für alle $x\in V$. Dann ist f stetig (mit $\|f\| = \|y\|$) und folglich $W := \mathrm{Kern}\, f$ ein von V verschiedener abgeschlossener Unterraum von V. Angenommen, $W^\perp$ enthielte ein Element $z\neq 0$. Für jedes $x\in V$ gilt dann $x - \big(f(x)/f(z)\big)\, z\in W$, d.h. es ist $V = W\oplus\mathbb{K}z$. Folglich ist $y' := \big(f(z)/\langle z, z\rangle\big)\, z$ ebenfalls ein Gradient von f wegen $\langle x, y'\rangle = 0 = f(x)$ für $x\in W$ und $\langle z, y'\rangle = f(z)$. Die Fortsetzung $f' : \widehat{V}\to\mathbb{K}$ von f auf $\widehat{V}$ mit $f'(x) = \langle x, y\rangle$ für $x\in\widehat{V}$ hätte auch y' als Gradient. Zu jedem $x\in\widehat{V}$ gibt es nämlich eine Folge $x_n\in V$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, also mit $\langle x, y'\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n\,,\, y'\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n\,,\, y'\rangle = \lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = f'(x)$. Es folgt $\|y-y'\|^2 = \langle y-y'\,,\, y\rangle - \langle y-y'\,,\, y'\rangle = f(y-y') - f(y-y') = 0$. also $y=y'$ im Widerspruch zu $y\in V$, $y'\notin V$.

c) Nach Satz 19.A.5 besitzt jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbert-Raums V ein Komplement. Ist umgekehrt V kein Hilbert-Raum, so gibt es nach b) abgeschlossene Unterräume von V, die kein Komplement besitzen. •

Abschnitt 19.B, Aufg. 1, p. 651 (1.11.2012) :

V und W seien normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f: V \to W$ und $g: V \to W$ seien kompakte $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen. Dann sind auch $f+g$ und af, $a \in \mathbb{K}$, kompakt. Ebenso ist die Fortsetzung $\widehat{f}: \widehat{V} \to \widehat{W}$ von f auf die Komplettierungen (vgl. 17.B.6) kompakt mit Bild $\widehat{f} \subseteq W$.

Beweis: Sei (x_n) eine beschränkte Folge in V. Da f kompakt ist, enthält $\big(f(x_n)\big)$ eine konvergente Teilfolge $\big(f(x_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Da auch g kompakt ist und (x_{n_k}) beschränkt, enthält ferner $\big(g(x_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\big(g(x_{n_{k_i}})\big)_{i\in\mathbb{N}}$. Dann ist $\big((f+g)(x_{n_{k_i}})\big)_{i\in I} = \big(f(x_{n_{k_i}})\big)_{i\in I} + \big(g(x_{n_{k_i}})\big)_{i\in I}$ eine konvergente Teilfolge von $\big((f+g)(x_n)\big)$. Daher ist $f+g$ kompakt. Außerdem ist natürlich $\big((af)(x_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}} = a\big(f(x_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $\big(f(x_n)\big)$, d.h. af ist ebenfalls kompakt.

Zu jedem $y \in \widehat{V}$ gibt es eine Folge (x_n) in V mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Dann gilt $\widehat{f}(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Da f kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) der beschränkten Folge (x_n), für die die Bildfolge $\big(f(x_{n_k})\big)$ gegen ein $w \in W$ konvergiert. Dann folgt aber auch $\widehat{f}(y) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = w \in W$. Daher gilt Bild $\widehat{f} \subseteq W$.

Sei schließlich (y_n) eine beschränkte Folge in $\widehat{V}$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in V$ mit $\|x_n - y_n\| \le \frac{1}{n}$. Die Folge (x_n) ist ebenfalls beschränkt in V, und wegen der Kompaktheit von f besitzt die Folge $\big(f(x_n)\big)$ eine konvergente Teilfolge $\big(f(x_{n_k})\big)$ mit einem Grenzwert $w \in W$. Da die Folge $(x_{n_k} - y_{n_k})$ nach Konstruktion eine Nullfolge ist und da $\widehat{f}$ wie f stetig ist, ist auch $\big(\widehat{f}(x_{n_k} - y_{n_k})\big) = \big(f(x_{n_k}) - \widehat{f}(y_{n_k})\big)$ eine Nullfolge in W, d.h. die Folge $\big(\widehat{f}(y_{n_k})\big)$ konvergiert ebenfalls gegen w. Daher ist auch $\widehat{f}$ kompakt. •

Abschnitt 19.B, Aufg. 2, p. 651 (1.11.2012) :

V sei ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, f sei ein kompakter und g ein stetiger Operator auf V. Dann sind auch die Operatoren fg und gf kompakt.

Beweis: Sei (x_n) eine durch $C > 0$ beschränkte Folge in V. Da g stetig ist, ist dann die Folge $\big(g(x_n)\big)$ beschränkt durch $\|g\| \cdot C$. Wegen der Kompaktheit von f besitzt nun die Folge $\big(f(g(x_n))\big) = \big(fg(x_n)\big)$ eine konvergente Teilfolge. Daher ist fg kompakt. Außerdem besitzt die Folge $\big(f(x_n)\big)$ eine konvergente Teilfolge. Wegen der Stetigkeit von g ist dann auch die Folge $\big(g(f(x_n))\big) = \big(gf(x_n)\big)$ konvergent. Somit ist gf kompakt. •

Abschnitt 19.B, Aufg. 3, p. 651 (1.11.2012) :

V sei ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, W sei ein $\mathbb{K}$-Banach-Raum und $f_n: V \to W$, $n \in \mathbb{N}$, sei ein Folge kompakter $\mathbb{K}$-linearer Abbildungen, die im $\mathbb{K}$-Banach-Raum $\mathrm{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$ gegen die $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f: V \to W$ konvergiere. Dann ist auch f kompakt.

1. Beweis: Sei (x_k) eine durch $C > 0$ beschränkte Folge in V. Da die f_n kompakt sind, gibt es zu jedem n eine Teilfolge $(x_{k_{n,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ von (x_k), für die die Bildfolge $\big(f_n(x_{k_{n,j}})\big)_{j\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y_n \in W$ konvergiert. Da auch jede Folge $(x_{k_{n,j}})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, können wir dabei sukzessive erreichen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_{k_{n,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_{k_{n-1,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ ist.

Wir zeigen zunächst, dass die Folge (y_n) eine Cauchy-Folge in W ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der Folge (f_n) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_m - f_n\| \le \frac{1}{3C}\varepsilon$ für alle $m, n \ge n_0$. Außerdem gibt es ein $j_0(n) \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n(x_{k_{n,j}}) - y_n\| \le \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $j \ge j_0(n)$ und alle n. Wir können dabei noch $j_0(n) \ge j_0(n-1)$ annehmen. Für alle $m \ge n \ge n_0$ gilt wegen $j_0(m) \ge j_0(n)$:

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\| &\le \|y_m - f_m(x_{k_{m,j_0(m)}})\| + \|(f_m(x_{k_{m,j_0(m)}}) - f_n(x_{k_{m,j_0(m)}})\| + \|f_n(x_{k_{m,j_0(m)}}) - y_n\| \\ &\le \tfrac{1}{3}\varepsilon + \|f_m - f_n\|\,\|x_{k_{m,j_0(m)}}\| + \tfrac{1}{3}\varepsilon \le \tfrac{2}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3C}\varepsilon C = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Da W nach Voraussetzung vollständig ist, konvergiert die Folge (y_n) also gegen ein $y \in W$. Es genügt nun zu zeigen, dass auch die Folge $\big(f(x_{k_{n,j_0(n)}})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert. Aus obiger Wahl von n_0 folgt

$\|f-f_n\| = \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\| \le \frac{1}{3C}\varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Wir können ferner annehmen, dass $\|y_n - y\| \le \frac{1}{3}\varepsilon$ für $n \ge n_0$ ist. Es ergibt sich dafür

$$\begin{aligned}\|f(x_{k_{n,j_0(n)}}) - y\| &\le \|f(x_{k_{n,j_0(n)}}) - f_n(x_{k_{n,j_0(n)}})\| + \|f_n(x_{k_{n,j_0(n)}}) - y_n\| + \|y_n - y\| \\ &\le \|f - f_n\|\, \|x_{k_{n,j_0(n)}}\| + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon \le \tfrac{1}{3C}\varepsilon C + \tfrac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon\,.\end{aligned}$$ •

2. Beweis: Nach Lemma 19.B.2 ist zu zeigen, dass $f\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big)$ relativ kompakt in W ist. Dazu verwenden wir Satz 3.A.4 aus Band 3 und haben nur zu zeigen, dass $\overline{f\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big)}$ präkompakt ist, d.h. dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Kugeln $\mathrm{B}(y_1\,;\varepsilon) \cdots \mathrm{B}(y_r\,;\varepsilon)$, $y_1,\ldots,y_r \in W$ gibt, die $\overline{f\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big)}$ überdecken. Wegen $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\| \le \frac{1}{3}\varepsilon$. Da $\overline{f_n\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big)}$ nach Voraussetzung kompakt ist, gibt es $y_1,\ldots,y_r \in W$ mit $\overline{f_n\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big)} \subseteq \bigcup_{j=1}^r \mathrm{B}(y_j\,;\frac{1}{3}\varepsilon)$. Zu $x \in \overline{\mathrm{B}}(0\,;1)$ gibt es daher ein j_0 mit $f_n(x) \in \mathrm{B}(y_{j_0}\,;\frac{1}{3}\varepsilon)$ und folglich mit $\|f(x) - y_{j_0}\| \le \|(f-f_n)(x)\| + \|f_n(x) - y_{j_0}\| < \|f - f_n\|\,\|x\| + \frac{1}{3}\varepsilon \le \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon$. Dies zeigt $f(x) \in \bigcup_{j=0}^r \mathrm{B}(y_j\,;\frac{2}{3}\varepsilon)$ für alle $x \in \overline{\mathrm{B}}(0\,;1)$ und folglich $\overline{f\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big)} \subseteq \bigcup_{j=0}^r \mathrm{B}(y_j\,;\varepsilon)$. Daher ist $\overline{f\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big)}$ präkompakt. •

Abschnitt 19.B, Aufg. 4, p. 651 (1.11.2012):

Man begründe, dass eine Isometrie auf einem unendlichdimensionalen Hilbert-Raum nicht kompakt sein kann.

Beweis: Jeder unendlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt besitzt eine orthonormale Folge v_i, $i \in \mathbb{N}$ (vgl. 19.A.4). Eine Isometrie f von V erhält die Abstände $\sqrt{2}$ zweier verschiedener Elemente der Folge v_i, $i \in \mathbb{N}$. Die Bildfolge $f(v_i)$, $i \in \mathbb{N}$, kann also keine konvergente Teilfolge besitzen. f ist somit nicht kompakt. •

Abschnitt 19.B, Aufg. 5, p. 651 (1.11.2012):

Die Orthogonalprojektion eines Hilbert-Raumes V auf einen abgeschlossenen Unterraum U von V ist stetig und selbstadjungiert und genau dann kompakt, wenn U endlichdimensional ist.

Beweis: Sei p eine Orthonormalprojektion des Hilbert-Raums V mit Bild $p = U$. Nach Satz 13.B.1 gilt dann $\|p(x)\| \le \|x\| = 1 \cdot \|x\|$ für alle $x \in V$, d.h. p ist stetig mit $\|p\| \le 1$, und nach Satz 13.B.2 ist p selbstadjungiert. Der abgeschlossene Unterraum U ist ebenfalls ein Hilbert-Raum, auf dem p die Identität id_U induziert. Ist p kompakt, so erst recht $p|U = \mathrm{id}_U$, und U muss endlichdimensional sein.

Ist umgekehrt U endlichdimensional, so ist wegen $\|p(x_n)\| \le \|x_n\|$ für jede beschränkte Folge (x_n) in V die Bildfolge $\big(p(x_n)\big)$ beschränkt, besitzt also nach dem Satz von Weierstraß-Bolzano, vgl. ANH.D.8, einen Häufungspunkt und damit eine konvergente Teilfolge. (Man beachte: Jede stetige Abbildung $f: V \to W$ endlichen Ranges ist kompakt, vgl. 19.B.3.) •

Abschnitt 19.B, Aufg. 6, p. 651 (1.11.2012):

Sei V ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Ferner sei $f: V \to W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung.

a) Es gilt $\|f\| = \|S_f\| := \mathrm{Sup}\big\{|\langle f(x)\,,y\rangle| \;\big|\; x \in V,\, y \in W,\, \|x\|=1,\, \|y\|=1\big\}$ $(\in \overline{\mathbb{R}}_+)$.

b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = W$ und $\|R_f\| := \mathrm{Sup}\big\{|\langle f(x)\,,x\rangle| \;\big|\; x \in V,\, \|x\| = 1\big\}$ die Rayleigh-Norm von f. Dann gilt $\|R_f\| \le \|f\| \le 2\|R_f\|$. Insbesondere ist f genau dann stetig, wenn die Rayleigh-Quotienten $\langle f(x)\,,x\rangle/\|x\|^2$ auf $V - \{0\}$ beschränkt bleiben. (Man gehe mit der Formel aus Satz 12.B.2 (2) vor wie im Beweis von 19.B.5. – Nach 19.B.5 gilt für *selbstadjungierte* Operatoren sogar $\|f\| = \|R_f\|$. Mit Hilfe der Spektralsätze 15.A.15 bzw. 19.B.11 zeigt man diese Formel auch direkt für normale Operatoren, falls $\mathrm{Dim}\, V < \infty$ ist bzw. f kompakt. Sie gilt ganz allgemein für normale Operatoren, vgl. Bd. 4, 19.C, Aufg. 5 für ein weitergehendes Resultat (wobei man bei $\|f\| < \infty$ zur Komplettierung überzugehen hat). – Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist beispielsweise $\|R_f\| = 0$ für jeden schiefselbstadjungierten Operator f, aber $\|f\| \ne 0$ bei $f \ne 0$. In der Komplexifizierung $f_{(\mathbb{C})}$ von f, die auch schiefselbstadjungiert ist (wegen $\widehat{g_{(\mathbb{C})}} = \hat{g}_{(\mathbb{C})}$ für jeden reellen Operator g, für den $\hat{g}$ existiert), ist aber $\|R_{f_{(\mathbb{C})}}\| = \|f_{(\mathbb{C})}\| = \|f\|$.)

c) Für den $\mathbb{C}$-linearen Operator $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $\binom{z_1}{z_2}\mapsto\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\binom{z_1}{z_2}=\binom{z_2}{0}$, gilt $\|f\|=2\|R_f\|$.

Beweis: a) Für $x\in V$, $y\in W$ mit $\|x\|=1$, $\|y\|=1$ gilt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $|\langle f(x)\,,\,y\rangle|\le\|f(x)\|\,\|y\|\le\|f\|\,\|x\|\,\|y\|=\|f\|$. Daher ist $\|S_f\|\le\|f\|$. Bei $f(x)\neq 0$ gilt andererseits $\|f(x)\|=\langle f(x)\,,\,f(x)/\|f(x)\|\,\rangle\le\|S_f\|$ nach Definition von $\|S_f\|$ und folglich $\|f\|\le\|S_f\|$. Insgesamt ergibt sich $\|f\|=\|S_f\|$.

b) Mit Hilfe von a) sieht man $\|R_f\|\le\|S_f\|=\|f\|$. – Es gilt $|\langle f(x)\,,\,x\rangle|\le\|R_f\|\|x\|^2$ für alle $x\in V$ nach Definition von $\|R_f\|$. Sei nun $x\in V$ mit $\|x\|=1$ und $f(x)\neq 0$. Es ist $\|f(x)\|\le 2\|R_f\|$ zu zeigen. Dazu verwenden wir die Formel aus Satz 12.B.2 (2) für die Sesquilinearform Φ mit $\Phi(x,y):=\langle f(x)\,,\,y\rangle$ für alle $x,y\in V$ und setzen darin $y:=f(x)/\|f(x)\|$. Dann ist $\|y\|=1$, und wir erhalten mit der Parallelogrammregel

$$\begin{aligned}\|f(x)\|&=\langle f(x)\,,\,f(x)\rangle/\|f(x)\|=\langle f(x)\,,\,y\rangle=\Phi(x,y)\\&=\tfrac14\big(\Phi(x+y\,,x+y)-\Phi(x-y\,,x-y)+\mathrm{i}\Phi(x+\mathrm{i}y\,,x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}\Phi(x-\mathrm{i}y\,,x-\mathrm{i}y)\big)\\&=\tfrac14\big(\langle f(x+y)\,,x+y\rangle-\langle f(x-y)\,,x-y\rangle+\mathrm{i}\langle f(x+\mathrm{i}y)\,,x+\mathrm{i}y\rangle-\mathrm{i}\langle f(x-\mathrm{i}y)\,,x-\mathrm{i}y\rangle\big)\\&\le\tfrac14\big(|\langle f(x+y)\,,x+y\rangle|+|\langle f(x-y)\,,x-y\rangle|+|\langle f(x+\mathrm{i}y)\,,x+\mathrm{i}y\rangle|+|\langle f(x-\mathrm{i}y)\,,x-\mathrm{i}y\rangle|\big)\\&\le\tfrac14\|R_f\|\big(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2+\|x+\mathrm{i}y\|^2+\|x-\mathrm{i}y\|^2\big)\\&=\tfrac14\|R_f\|\big(2\|x\|^2+2\|y\|^2+2\|x\|^2+2\|\mathrm{i}y\|^2\big)=\tfrac14\|R_f\|\big(4\|x\|^2+4\|y\|^2\big)=\tfrac14\|R_f\|\cdot 8=2\|R_f\|\,.\end{aligned}$$

c) Für alle $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ gilt $\|f(z_1,z_2)\|=\|(z_2,0)\|=|z_2|\le\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}=1\cdot\|(z_1,z_2)\|$. Außerdem ist $\|f(0,1)\|=\|(1,0)\|=1=1\cdot\|(0,1)\|$. Daher ist $\|f\|=1$.

Für $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ mit $\|(z_1,z_2)\|=|z_1|^2+|z_2|^2=1$ gilt ferner $|R_f(z_1,z_2)|=|\langle f(z_1,z_2)\,,(z_1,z_2)\rangle|=|\langle(z_2,0)\,,(z_1,z_2)\rangle|=|z_2\bar z_1|=|z_1|\,|z_2|\le\frac12$ nach der Ungleichung vom aritmetischen und geometrischen Mittel. Dabei gilt für $z_1=z_2=1/\sqrt2$ das Gleichheitszeichen. Insgesamt erhält man $\|R_f\|=\frac12=\frac12\|f\|$. •

Abschnitt 19.B, Aufg. 7, p. 651 (1.11.2012):

Seien $f:V\to V$ ein kompakter Operator auf dem Hilbert-Raum V und λ ein Eigenwert $\neq 0$ von f. Man zeige, dass Bild $(f-\lambda\,\mathrm{id})$ ein abgeschlossener Unterraum von V ist.

Beweis: Sei $(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, eine konvergente Folge in Bild $(f-\lambda\,\mathrm{id})$ mit $x_n\in V$. Zu zeigen ist $y:=\lim\limits_{n\to\infty}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(x_n)\in\mathrm{Bild}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)$. Da V ein Hilbert-Raum ist und $V_f(\lambda)=\mathrm{Kern}\,(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)$ ein abgeschlossener Unterraum, gibt es nach Satz 19.A.5 eine orthogonale Zerlegung $V=V_f(\lambda)\oplus V_f(\lambda)^\perp$. Wir können gleich annehmen, dass $x_n\in(V_f(\lambda))^\perp$ ist für alle n.

Wir zeigen zunächst, dass die Folge (x_n) beschränkt ist. Andernfalls gäbe es eine Teilfolge dieser Folge, für die die Folge der Beträge gegen ∞ konvergiert, und wir können nach Weglassen von Folgengliedern annehmen, dass dies die Folge (x_n) selbst ist. Die Folge $\big((f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(x_n)\big)$ konvergiert, ist also beschränkt. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)\big(x_n/\|x_n\|\big)=\lim\limits_{n\to\infty}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(x_n)/\|x_n\|=0$. Da die Folge $\big(x_n/\|x_n\|\big)$ beschränkt ist und f kompakt, besitzt die Folge $\big(f\big(x_n/\|x_n\|\big)\big)$ eine konvergente Teilfolge, und nach Weglassen von Folgengliedern können wir annehmen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}f\big(x_n/\|x_n\|\big)=:x\in V_f(\lambda)^\perp$ existiert. Dann ist $\|x\|=1$ und es folgt $\lim\limits_{n\to\infty}x_n/\|x_n\|=\lambda^{-1}\Big(\lim\limits_{n\to\infty}f\big(x_n/\|x_n\|\big)-\lim\limits_{n\to\infty}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)\big(x_n/\|x_n\|\big)\Big)=\lambda^{-1}x\neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f ergibt sich $f(x)=f\big(\lambda\lim\limits_{n\to\infty}x_n/\|x_n\|\big)=\lambda\lim\limits_{n\to\infty}f\big(x_n/\|x_n\|\big)=\lambda x$, d.h. es wäre $x\in V_f(\lambda)$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ im Widerspruch zu $x\in V_f(\lambda)^\perp$.

Da nun (x_n) beschränkt ist und f kompakt, besitzt die Folge $\big(f(x_n)\big)$ eine konvergente Teilfolge $\big(f(x_{n_k})\big)$. Dann konvergiert auch die Folge (x_{n_k}) gegen $v:=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})-\lambda^{-1}\lim\limits_{k\to\infty}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(x_{n_k})$. Wegen der Stetigkeit von $f-\lambda\,\mathrm{id}_V$ liegt dann $y=\lim\limits_{k\to\infty}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(x_{n_k})=(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)\big(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\big)=(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v)$ in Bild $(f-\lambda\,\mathrm{id})$. •

Abschnitt 19.B, Aufg. 9, p. 652 (1.11.2012):

V sei der $\mathbb{C}$-Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen x auf $[0,\pi]$ in $\mathbb{C}$ mit $x(0)=x(\pi)=0$, versehen mit der L^2-Norm. Man zeige, dass $f:V\to V$ mit $f(x):=x''$ selbstadjungiert, aber nicht stetig ist, und bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

Beweis: Partielle Integration liefert für $x,\, y\in V$ (wegen $x(0)=x(\pi)=y(0)=y(\pi)=0$):

$$\langle f(x)\,,\,y\rangle=\langle \ddot x,\,y\rangle=\int_0^\pi \ddot x(t)\,\overline{y(t)}\,dt=\dot x(t)\,\overline{y(t)}\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \dot x(t)\,\overline{\dot y(t)}\,dt=$$

$$=\dot x(\pi)\,\overline{y(\pi)}-\dot x(0)\,\overline{y(0)}-\int_0^\pi \dot x(t)\,\overline{\dot y(t)}\,dt=-\int_0^\pi \dot x(t)\,\overline{\dot y(t)}\,dt=-\langle \dot x\,,\,\dot y\rangle\,.$$

Daher gilt auch $\langle x\,,\,f(y)\rangle=\overline{\langle f(y)\,,\,x\rangle}=-\overline{\langle \dot y\,,\,\dot x\rangle}=-\langle \dot x\,,\,\dot y\rangle=\langle f(x)\,,\,y\rangle$, d.h. f ist selbstadjungiert. Speziell für $y=x$ ergibt sich $\langle f(x)\,,\,x\rangle=-\langle \dot x\,,\,\dot x\rangle=-\|\dot x\|^2\le 0$. Ist dabei $\|\dot x\|=0$, d.h. $\dot x=0$, so ist die Funktion $x(t)$ konstant und wegen $x(0)=0$ identisch 0. Daher ist f sogar negativ. Es folgt, dass alle Eigenwerte von f negative reelle Zahlen sind.

Sei nun $x\in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda<0$. Dann gilt $f(x)=\lambda x$, d.h. $\ddot x-\lambda x=0$, und zusätzlich muss $x(0)=x(\pi)=0$, aber $x\neq 0$ gelten. Die Differenzialgleichung $\ddot x-\lambda x=0$ hat das charakteristische Polynom $X^2-\lambda=(X+\mathrm{i}\sqrt{|\lambda|})(X-\mathrm{i}\sqrt{|\lambda|})$. Die Lösungen der Differenzialgleichung sind also $x(t)=a\cos\sqrt{|\lambda|}\,t+b\sin\sqrt{|\lambda|}\,t$ mit $a,b\in\mathbb{C}$. Wegen $x(0)=0$ ist $a=0$. Wegen $x(\pi)=0$, aber $x\neq 0$, ist dann $\sin\sqrt{|\lambda|}\,\pi=0$, also $\sqrt{|\lambda|}\,\pi$ ein ganzzahliges Vielfaches $\neq 0$ von π und $\lambda=-k^2$, $k\in\mathbb{N}^*$. Der zugehörige Eigenraum wird erzeugt von $x_k(t):=\sin kt$.

Wegen $f(x_k)=-k^2x_k$ ist $\|f\|\ge k^2$, $k\in\mathbb{N}^*$. Daher ist f nicht beschränkt und folglich nicht stetig. (Man beachte, dass die Menge der Eigenwerte eines stetigen Operators f stets beschränkt ist durch $\|f\|$.) •

Abschnitt 19.B, Variante zu **Aufg. 9**, p. 652 (1.11.2012):

V sei der $\mathbb{K}$-Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $x:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, die außerhalb eine (von x abhängenden) kompakten Intervalls verschwinden, versehen mit dem L^2-Skalarprodukt $\langle x\,,\,y\rangle:=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$. Zeigen Sie, dass der Hermitesche Differenzialoperator $f:V\to V$ mit $f(x):=-\ddot x+t^2x$ positiv ist.

Beweis: V enthält beispielsweise die Funktion z mit $z(t):=e^{1/(t^2-1)}$ für $|t|<1$ und $z(t):=0$ für $|t|\ge 1$. Vgl. auch Band 1, Beispiel 16.B.9. – Partielle Integration liefert für $x,\, y\in V$ (da die Limiten dieser Funktionen für $t\to\infty$ und $t\to-\infty$ verschwinden):

$$\langle f(x)\,,\,y\rangle=\langle -\ddot x+t^2x\,,\,y\rangle=-\int_{-\infty}^{\infty}\ddot x(t)\,\overline{y(t)}\,dt+\langle t^2x\,,\,y\rangle=$$

$$=-\dot x(t)\,\overline{y(t)}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\dot x(t)\,\overline{\dot y(t)}\,dt+\langle t^2x\,,\,y\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\dot x(t)\,\overline{\dot y(t)}\,dt+\langle t^2x\,,\,y\rangle=\langle \dot x\,,\,\dot y\rangle+\langle t^2x\,,\,y\rangle.$$

Daher gilt auch $\langle x\,,\,f(y)\rangle=\overline{\langle f(y)\,,\,x\rangle}=\overline{\langle \dot y\,,\,\dot x\rangle}+\overline{\langle t^2y\,,\,x\rangle}=\langle \dot x\,,\,\dot y\rangle+\langle x\,,\,t^2y\rangle=\langle \dot x\,,\,\dot y\rangle+\langle t^2x\,,\,y\rangle=\langle f(x)\,,\,y\rangle$, d.h. f ist selbstadjungiert. Speziell für $y=x$ hat man $\langle f(x)\,,\,x\rangle=\langle \dot x\,,\,\dot x\rangle+\langle t^2x\,,\,x\rangle\ge\|\dot x\|_2^2\ge 0$. Ist dabei $\|\dot x\|_2=0$, d.h. $\dot x=0$, so ist die Funktion $x(t)$ konstant und wegen $x(t)=0$ für große $|t|$ identisch 0. Daher ist f sogar positiv. Es folgt, dass alle Eigenwerte von f positive reelle Zahlen sind. •

Bemerkung: x erfüllt die Eigenwertgleichung $f(x)=-\ddot x+t^2x=\lambda x$ genau dann, wenn die Funktion $y:=xe^{t^2/2}$ die Differenzialgleichung $\ddot y-2t\dot y+(\lambda-1)y=0$ löst. Diese zweite Differenzialgleichung heißt die Hermitesche Differenzialgleichung. Beide Differenzialgleichungen haben für jedes $\lambda\in\mathbb{C}$ nichttriviale Lösungen, die auf $\mathbb{R}$ notwendigerweise analytisch sind, vgl. die Bemerkung im Anschluss an Satz 20.C.1. In V können also keine Eigenfunktionen des Hermiteschen Operators existieren, da V nach dem Identitätssatz außer 0 keine analytischen Funktionen enthält. Lösungen x der ersten Differenzialgleichung, für die $\|x\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt<\infty$ ist, existieren jedoch auf $\mathbb{R}$ (nur) für $\lambda=2n+1$, $n\in\mathbb{N}$. Es sind dies die Hermiteschen Funktionen $H_n(t)\,e^{-t^2/2}$ mit den Hermiteschen Polynomen H_n, vgl. Band 3, Beispiel 15.B.9, insbesondere Satz 15.B.14. $f:V\to V$ ist natürlich nicht stetig. Andernfalls ließe sich f zu einem Operator $\widehat f$ auf der Komplettierung $\widehat V=\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R};\lambda^1)$ von V fortsetzen, der notwendigerweise auf dem Unterraum $\widetilde V$

der $x \in \mathrm{C}^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ mit $\|x\|_2 < \infty$ mit dem Hermiteschen Operator $x \mapsto -\ddot{x} + t^2 x$ übereinstimmt, vgl. Band 3, Korollar 15.A.6. (Man betrachte zu $x \in \mathrm{C}^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ Funktionen der Form $x f_m \in V$, wobei f_m eine Hutfunktion ist, die auf $[-m, m]$ gleich 1 ist, $m \in \mathbb{N}$.) Auf dem Unterraum $\widetilde{V} \subseteq \widehat{V}$ hätte aber die Fortsetzung von f die Eigenfunktionen $H_n(t)\, e^{-t^2/2}$, deren Eigenwerte $2n+1$ beliebig groß werden. (Mit diesen Eigenfunktionen könnte man auch direkt die Stetigkeit von f zum Widerspruch führen.)